

TESIS DE MAESTRÍA

**ANÁLISIS GEOMÉTRICO AVANZADO DE REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA
POTABLE (RDAP) DISEÑADAS ÓPTIMAMENTE**

Juan Diego Carvajal Cruz

Asesor: Juan G. Saldarriaga Valderrama



**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL Y AMBIENTAL
MAESTRÍA EN INGENIERÍA CIVIL
BOGOTÁ D.C.
Enero, 2020**

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por su fidelidad.

A mi familia; en especial a mis abuelos Fermín, Alcyra, Luis Jesús y Alba y a mis padres Juan Carlos y Julieth. Gracias por su apoyo incondicional a lo largo de estos años.

A mi asesor, Juan Saldarriaga. Gracias por todos los consejos y las enseñanzas. Gracias por ser más que un profesor, un tutor de vida.

A Daniela Rodríguez, por la paciencia y amor brindado en el desarrollo de esta investigación. Gracias por siempre creer en mí y animarme a dar siempre lo mejor de mí.

A mis compañeros del CIACUA, por su amistad.

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|--|----|
| 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS..... | 8 |
| 1.1. Introducción..... | 8 |
| 1.2. Objetivos | 9 |
| 1.2.1. Objetivo General..... | 9 |
| 1.2.2. Objetivos Específicos | 9 |
| 2. OPTIMIZACIÓN EN REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE | 10 |
| 2.1. Optimización y problemas abordados en RDAP | 11 |
| 2.1.1. Diseño de Redes de Distribución de Agua Potable..... | 11 |
| 2.1.2. Operación de RDAP | 13 |
| 2.1.3. Otros usos de optimización en sistemas de distribución de agua potable... | 14 |
| 2.2. Métodos de optimización | 15 |
| 2.2.1. Optimización Determinística | 15 |
| 2.2.2. Metaheurísticas | 16 |
| 2.3. Resumen optimización en RDAP | 16 |
| 3. GEOMETRÍA DE REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE | 18 |
| 3.1. Complex Network Theory | 18 |
| 3.2. CNT y su aplicación en RDAP | 20 |
| 3.3. Teoría de grafos – Topología de redes..... | 22 |
| 3.3.1. Métricas topológicas (teoría de grafos) implementadas en RDAP | 31 |
| 3.3.2. Branch Index y sistema de clasificación..... | 40 |
| 3.4. Propiedades geométricas de componentes de la red | 41 |
| 4. ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE RDAP..... | 44 |
| 4.1. Selección de índices para el análisis de RDAP..... | 45 |
| 4.1.1. Herramientas computacionales | 45 |
| 4.1.2. Evaluación de índices en RDAP | 45 |
| 4.1.3. Caracterización geométrica de RDAP..... | 55 |

| | | |
|--------|---|-----|
| 4.2. | Ajuste de índices de CNT seleccionados..... | 62 |
| 4.2.1. | Índices de CNT con peso..... | 62 |
| 5. | METODOLOGÍA DE OPTIMIZACIÓN..... | 67 |
| 5.1. | Metodología OPUS..... | 68 |
| 5.2. | Algoritmos genéticos | 70 |
| 5.3. | Ecuación de costo | 72 |
| 5.4. | Resiliencia de RDAP | 72 |
| 6. | CASOS DE ESTUDIO | 74 |
| 7. | ANÁLISIS Y RESULTADOS | 77 |
| 7.1. | Caracterización geométrica diseños originales | 77 |
| 7.2. | Optimización de RDAP | 78 |
| 7.2.1. | Diámetros | 80 |
| 7.2.2. | Índices de CNT ajustados con peso | 82 |
| 7.2.3. | Centroides | 89 |
| 8. | CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES | 97 |
| 9. | Referencias | 100 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 2-1. Diagrama de investigación en optimización en RDAP | 17 |
| Figura 3-1. Problema "The Bridges of Konisberg" (Barabási, Towlson, & Cornelius, 2018) | 23 |
| Figura 3-2. Grafo (no dirigido - sin peso) | 24 |
| Figura 3-3. Grafo dirigido | 24 |
| Figura 3-4. Grafo dirigido y con peso | 24 |
| Figura 3-5. Grado para grafos no dirigidos | 25 |
| Figura 3-6. Grado para grafos dirigidos | 25 |
| Figura 3-7. Grado promedio del grafo | 25 |
| Figura 3-8. Distribución del grado $P(k)$ | 26 |
| Figura 3-9. Vecindario (nodo 4)..... | 27 |
| Figura 3-10. Matriz de adyacencia | 27 |
| Figura 3-11. Caminos y ciclos en grafos..... | 28 |
| Figura 3-12. Distancias, diámetro y longitud promedio de los caminos de un grafo | 28 |
| Figura 3-13. Conectividad de un grafo | 29 |
| Figura 3-14. Coeficiente de agrupación | 30 |
| Figura 3-15. Intermediación (Betweenness) | 30 |
| Figura 3-16. Cercanía (Closeness) | 31 |
| Figura 3-17. Diagrama de clasificación de RDAP (Hwang & Lansey, 2017)..... | 41 |
| Figura 4-1. Relación entre nodos y tuberías de las redes analizadas | 47 |
| Figura 4-2. Relación entre el diámetro promedio y el BI..... | 49 |
| Figura 4-3. Topología de redes KY15, Bogotá, KY3 y KY14 | 50 |
| Figura 4-4. Relación entre k y R_m | 54 |
| Figura 4-5. Relación entre diámetro de la red y longitud promedio de los caminos..... | 54 |
| Figura 4-6. Relación entre la eficiencia de la red y longitud promedio de los caminos | 55 |
| Figura 4-7. Resultados de cada una de las métricas para la caracterización | 56 |
| Figura 4-8. Clasificación de las RDAP (Conectividad)..... | 57 |
| Figura 4-9. Clasificación de RDAP (Eficiencia)..... | 58 |
| Figura 4-10. Clasificación de RDAP (Centralidad)..... | 59 |
| Figura 4-11. Clasificación RDAP (Diversidad) | 60 |

| | |
|--|----|
| Figura 4-12. Clasificación de RDAP (Robustez) | 61 |
| Figura 4-13. Clasificación RDAP (Modularidad) | 62 |
| Figura 4-14. Conectividad algebraica con pesos | 64 |
| Figura 4-15. Dominancia del punto central con pesos..... | 64 |
| Figura 4-16. Brecha espectral con pesos | 65 |
| Figura 4-17. Modularidad con pesos..... | 65 |
| Figura 4-18. Eficiencia con pesos | 65 |
| Figura 5-1. Parámetros generales - optimización REDES..... | 68 |
| Figura 5-2. Diámetros comerciales disponibles para optimización (RDE 26 PVC - PAVCO) | 72 |
| Figura 6-1. Casos de estudio. En rojo se señala la ubicación de los tanques | 75 |
| Figura 7-1. Distribución de diámetros para todos los diseños | 82 |
| Figura 7-2. Resultados conectividad algebraica | 83 |
| Figura 7-3. Resultados centralidad | 85 |
| Figura 7-4. Resultados brecha espectral | 87 |
| Figura 7-5. Resultados modularidad | 89 |
| Figura 7-6. Centroides Blacksburg..... | 91 |
| Figura 7-7. Centroides Mamatoco..... | 92 |
| Figura 7-8. Centroides Mesolandia | 93 |
| Figura 7-9. Centroides La Esperanza | 94 |
| Figura 7-10. Centroides Andalucía Alta | 95 |
| Figura 7-11. Centroides Candelaria | 96 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|--|----|
| Tabla 2-1. Bibliografía en sistemas de distribución de agua potable (Savić et al., 2018) | 10 |
| Tabla 3-1. Métricas implementadas en el análisis de RDAP (grafos sin peso y sin dirección) | 37 |
| Tabla 4-1. Características generales de RDAP - caracterización topológica | 46 |
| Tabla 4-2. Rangos de características generales de las redes | 47 |
| Tabla 4-3. Cálculo de BI y sistema de clasificación | 48 |
| Tabla 4-4. Cálculo de métricas de CNT para redes analizadas | 52 |
| Tabla 4-5. Coeficiente de correlación métricas CNT | 53 |
| Tabla 4-6. Métricas para la caracterización geométrica de RDAP | 55 |
| Tabla 6-1. Características generales casos de estudio | 74 |
| Tabla 6-2. Presión mínima, costo y resiliencia de casos de estudio | 76 |
| Tabla 6-3. Diámetros originales casos de estudio | 76 |
| Tabla 7-1. Resultados de clasificación topológica según Hwang y Lansey | 77 |
| Tabla 7-2. Resultados métricos CNT | 77 |
| Tabla 7-3. Resultados generales optimización | 78 |
| Tabla 7-4. Resultados resiliencia | 79 |
| Tabla 7-5. Resultados de diámetros para todos los diseños | 80 |
| Tabla 7-6. Resultados conectividad algebraica | 82 |
| Tabla 7-7. Resultados centralidad..... | 84 |
| Tabla 7-8. Resultados brecha espectral | 86 |
| Tabla 7-9. Resultados modularidad | 88 |
| Tabla 7-10. Resultados centroides..... | 89 |

ÍNDICE DE ECUACIONES

| | |
|--|----|
| Ecuación 1. Densidad de enlaces | 32 |
| Ecuación 2. Grado promedio de los nodos | 32 |
| Ecuación 3. Grado del nodo vecino | 32 |
| Ecuación 4. Índice Beta..... | 32 |
| Ecuación 5. Heterogeneidad..... | 32 |
| Ecuación 6. Coeficiente de agrupación del grafo..... | 33 |
| Ecuación 7. Transitividad del nodo | 33 |
| Ecuación 8. Coeficiente <i>Meshedness</i> | 33 |
| Ecuación 9. Longitud promedio de los caminos..... | 33 |
| Ecuación 10. Diámetro del grafo | 34 |
| Ecuación 11. Eficiencia de la red | 34 |
| Ecuación 12. Factor de ruta | 34 |
| Ecuación 13. Densidad de puentes | 34 |
| Ecuación 14. Densidad de puntos de articulación | 35 |
| Ecuación 15. Brecha espectral..... | 35 |
| Ecuación 16. Centralidad <i>Betweenness</i> | 35 |
| Ecuación 17. Dominancia del punto central..... | 36 |
| Ecuación 18. Closeness..... | 36 |
| Ecuación 19. Límite eliminación nodos aleatorios | 36 |
| Ecuación 20. Indicador de Modularidad..... | 37 |
| Ecuación 21. Grado entrópico ajustado (demanda)..... | 39 |
| Ecuación 22. Intermediación ajustada (<i>Tailored Edge Betweenness</i>)..... | 40 |
| Ecuación 23. Branch Index | 40 |
| Ecuación 24. Diámetro promedio de red (ponderado por la longitud) | 41 |
| Ecuación 25. Centroide de Volumen RDAP..... | 42 |
| Ecuación 26. Centroide de Potencia Específica RDAP | 42 |
| Ecuación 27. Centroide de Diámetro RDAP | 42 |
| Ecuación 28. Centroide de Potencia RDAP..... | 42 |
| Ecuación 29. Cálculo de distancias centroides de red | 42 |



| | |
|--|----|
| Ecuación 30. Peso (diámetro) | 63 |
| Ecuación 31. Peso (Volumen) | 63 |
| Ecuación 32. Peso (Caudal) | 63 |
| Ecuación 33. Peso (Pérdidas) | 63 |
| Ecuación 34. Índice de resiliencia | 73 |

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1. Introducción

De los diferentes temas de investigación en el área de recursos hídricos e hidroinformática, las investigaciones en la gerencia integral de redes de distribución de agua potable (RDAP) son de gran importancia para la comunidad por el alto impacto y la aplicabilidad de los resultados obtenidos. Las empresas prestadoras del servicio, por ejemplo, siempre buscan determinar nuevas herramientas o formas de analizar redes con el fin de realizar una adecuada planeación a futuro para la operación, mantenimiento y diseño de RDAP.

En la actualidad, el problema del diseño optimizado de RDAP ha sido abordado por diferentes investigadores de forma exhaustiva. Sin embargo, en el análisis de RDAP diseñadas óptimamente, se ha dejado a un lado la posible relación entre los parámetros geométricos de una red y los parámetros hidráulicos obtenidos del diseño óptimo. La presente investigación, mediante el desarrollo de un estado del arte, busca realizar un análisis geométrico robusto de las RDAP diseñadas óptimamente, con el fin de brindar una respuesta a las posibles relaciones existentes entre la geometría de la red y su diseño optimizado.

En investigaciones previas, diferentes autores han estudiado las relaciones existentes entre la teoría de redes complejas (*Complex Network Theory - CNT*) y los sistemas de distribución de agua potable. Recientemente, Saldarriaga y Robles (2018), implementaron diferentes métricas de teoría de grafos (geometría) para comparar redes reales y redes virtuales en términos de estructura, eficiencia y robustez. En cuanto a la estructura, los índices estudiados fueron: *Link Density*, *Average Node Degree*, *Average Clustering* y *Meshedness Coefficient*; eficiencia y accesibilidad: *Characteristic Path Length* y *Diameter*; robustez y vulnerabilidad: *Density of Bridges*, *Spectral Gap* y *Algebraic Connectivity*. Del mismo modo, Moreno, Rojas y Saldarriaga (2018), crearon 4 índices geométricos para estudiar la relación entre la densidad de población y la topología en RDAP. Los 4 índices creados fueron: *Volume Centroid*, *Specific Power Centroid*, *Diameter Centroid* y *Power Centroid*. Como estas, existen otras investigaciones que conectan la CNT con las RDAP y evalúan gran cantidad de índices topológicos, no obstante, no existe una documentación detallada que permita el entendimiento y la relación entre estos índices y los diseños optimizados de RDAP.

Con esta investigación, se busca abrir un camino y entender cómo es la geometría de las redes de distribución de agua potable diseñadas óptimamente. En primer lugar, se realiza una recopilación bibliográfica de los dos temas fundamentales de este estudio, optimización y geometría de RDAP enfocada en la teoría de grafos, ya que es fundamental para el análisis geométrico. Finalizada esta etapa de recopilación bibliográfica, se plantea cómo analizar la geometría de la RDAP diseñadas óptimamente. Esto se hace mediante la escogencia de los mejores índices recopilados del estudio de CNT, complementado de

otros índices que también analizan la geometría de las redes (por ejemplo, los centroides de la red). Así mismo, en esta etapa de la investigación se plantea la proposición de nuevos índices que junten la CNT con las características hidráulicas de la red. Finalmente, se realizan los cálculos con sus respectivos análisis, conclusiones y recomendaciones. Durante el desarrollo de la investigación, se espera encontrar cuáles son los índices geométricos que verdaderamente permiten entender y relacionar la topología de la red con su hidráulica.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Realizar un análisis geométrico robusto de redes de distribución de agua potable diseñadas óptimamente con el fin de abrir un camino y entender las posibles relaciones existentes entre la geometría de la red y su diseño optimizado.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Recopilar y analizar la información disponible, mediante búsqueda bibliográfica, sobre los trabajos desarrollados en el campo de optimización de RDAP.
- Recopilar y analizar la información disponible, mediante búsqueda bibliográfica, sobre las investigaciones desarrolladas en el campo de las redes complejas para el análisis de RDAP.
- Seleccionar de los diferentes índices encontrados en la literatura los más significativos para el análisis geométrico de las RDAP.
- Proponer una metodología para el análisis geométrico de RDAP que junten métricas de CNT con otras métricas de la geometría de las redes, así como sus características hidráulicas.
- Proponer nuevos índices que combinen la geometría y la hidráulica de la red para poder realizar comparaciones significativas entre los diseños optimizados y los no-optimizados.
- Comparar los resultados de los índices geométricos e hidráulicos obtenidos en el análisis de RDAP diseñadas óptimamente y las RDAP diseñadas sin optimización de costos.

2. OPTIMIZACIÓN EN REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE

La optimización en sistemas de distribución de agua potable es un tema de investigación que ha sido abordado de forma exhaustiva. Así mismo, las publicaciones relacionadas con estos temas han crecido rápidamente debido a los desarrollos computacionales de los últimos siglos. Esto puede verse reflejado en que en las últimas tres décadas hay más de 300 artículos de revista publicados sobre la optimización en el diseño y la operación de RDAP (Savić, Mala-Jetmarova, & Sultanova, 2018). En la Tabla 2-1 se pueden observar las diferentes publicaciones que analizan en detalle toda la literatura publicada.

Tabla 2-1. Bibliografía en sistemas de distribución de agua potable (Savić et al., 2018)

| Autor (año) | Título | Periodo abarcado |
|-------------------------------|--|----------------------------|
| Shamir (1974) | Optimal design and operation of water distribution systems | 1961-1972 |
| Shamir (1979) | Optimization in water distribution systems engineering | 1963-1977 |
| Walski (1985) | State-of-the-art pipe network optimization | 1931 – 1939 1968 - 1985 |
| Lansey & Mays (1989) | Optimization models for design of water distribution systems | 1939, 1961 - 1988 |
| Walters (1992) | A review of pipe network optimisation techniques | 1966-1991 |
| Goulter (1992) | Systems analysis in water-distribution network design. From theory to practice | 1969-1991 |
| Walters and Cembrovicz (1993) | Optimal design of water distribution networks | 1968-1994 |
| Dandy et al. (1993) | A review of pipe network optimisation techniques | 1936, 1963–1992 |
| Ostfeld and Shamir (1993) | Incorporating reliability in optimal design of water distribution networks – review and new concepts | 1972-1992 |
| Ormsbee and Lansey (1994) | Optimal control of water supply pumping system | 1968-1994 |
| Simpson et al. (1994) | Genetic algorithms compared to other techniques for pipe optimisation | 1973-1992 |
| Engelhardt et al. (2000) | Rehabilitation strategies for water distribution networks: a literature review with a UK perspective | 1972-1999 |
| Lansey (2006) | The evolution of optimizing water distribution system applications | 1939, 1961–2006 |
| Savić et al. (2009) | Quo vadis water distribution model calibration? | 1974-2008 |
| Mala-Jetmarova et al. (2017) | Lost in optimisation of water distribution systems? A literature review of system operation | 1969-2016 |
| Mala-Jetmarova et al. (2018) | Lost in Optimisation of Water Distribution Systems? A literature review of system design | 1895-2017 |

Como se puede observar, las últimas dos publicaciones abarcan los periodos de tiempo más extensos. Mala-Jetmarova, Sultanova, & Savic, (2017) realizan una recopilación

bibliográfica de la literatura disponible sobre la optimización enfocada en el problema de la operación del sistema, y luego, Mala-Jetmarova, Savic, & Sultanova, (2018) se enfocan en el problema del diseño del sistema.

En la siguiente sección se realiza un resumen en donde se presenta una descripción de los diferentes tipos de problemas abordados, las metodologías de optimización implementadas y la aplicación de la optimización en sistemas de distribución de agua potable teniendo en cuenta los desarrollos claves a lo largo de la historia.

2.1. Optimización y problemas abordados en RDAP

Diferentes problemas han sido abordados por los métodos de optimización en RDAP a lo largo del tiempo, siendo el diseño del sistema como un todo el problema fundamental en cuestión (Savić et al., 2018). El diseño del sistema es una tarea de gran complejidad ya que involucra la solución simultánea de un sistema de ecuaciones no-lineales junto con el establecimiento del tamaño, ubicación y estado operacional de los componentes de la red (tuberías, bombas, tanques y válvulas). Además, requiere que los sistemas diseñados sean asequibles, desde el punto de vista económico, y duraderos, teniendo en cuenta que deben satisfacer de forma continua diferentes criterios hidráulicos junto con los requisitos de los usuarios (Savić et al., 2018). Adicionalmente, los problemas relacionados con RDAP pertenecen a la clase de problemas de optimización duros (Yates, Templeman, & Boffey, 1984), por lo cual se convierte en un problema intratable de manera formal.

En términos generales, estos problemas pueden ser clasificados en dos grupos: 1) diseño de RDAP (determinación del tamaño de sus componentes) y 2) operación de RDAP. A continuación, se presenta una descripción de cada tipo de problema.

2.1.1. Diseño de Redes de Distribución de Agua Potable

Este tipo de problemas se enfoca en determinar las dimensiones de los diferentes componentes de una red de distribución de agua potable. En general, se habla de determinar los diámetros de las tuberías de la red, no obstante, los diferentes avances en el tema de investigación han incluido en el diseño de RDAP otros componentes como válvulas, tanques y bombas.

- Diámetro de las tuberías.

El diseño de una RDAP consiste en determinar los diámetros de cada una de las tuberías que la conforman dados un caudal de consumo en cada uno de los nudos fijados por la demanda de agua potable y una presión mínima en las horas de máximo consumo fijada por una norma local (Saldarriaga, 2016). Es decir, dada una topología de una red, el problema consiste en determinar un conjunto de diámetros en forma tal que se minimice una función de costo sujeta a restricciones hidráulicas, comerciales y de construcción (Saldarriaga, 2016). Las variables de decisión del problema son los diámetros de cada una

de las tuberías de la red. Estas variables son discretas, puesto que sus valores dependen de los diámetros comerciales producidos por la industria. El problema de optimización, en el caso más simple (únicamente un estado operacional), involucra un número posible de diseños discretos equivalente a d^p , donde d son los diámetros comerciales disponibles y p es el número de tuberías de la red.

- Otros componentes: tanques, válvulas, bombas.

Con los avances en la modelación de RDAP, estos componentes empezaron a considerarse importantes en el proceso del diseño optimizado. Por ejemplo, las válvulas suelen usarse para aislar porciones de la red durante emergencias, lo que hace que definir la cantidad y su ubicación sea importante, especialmente cuando se quiere medir la confiabilidad y la resiliencia de la red. No obstante, incluir tanques, válvulas y bombas como variables de decisión, hacen que se incremente el tamaño y la complejidad (por cuestiones operativas de cada componente) del problema. Un ejemplo claro que demuestra la complejidad a tratar puede observarse de los resultados obtenidos en el evento “Battle of the Network Models”, en donde se compararon las diferentes aproximaciones al diseño optimizado la red patrón *Anytown* (Walski et al., 1987). Los participantes utilizaron optimización para determinar los diámetros de las tuberías, pero escogieron la ubicación y el tamaño de los tanques manualmente. El problema ha sido abordado en diferentes investigaciones (A.R Simpson, Murphy, & Dandy, 1993), (Giustolisi, Berardi, & Laucelli, 2012).

- Optimización en el diseño de sistemas existentes.

La optimización en el diseño de sistemas existentes se centra en el fortalecimiento, la rehabilitación y la expansión de sistemas que ya están en operación (Mala-Jetmarova et al., 2018). El fortalecimiento de un sistema representa la mejora del mismo mediante la adición de tuberías paralelas a las existentes con el fin de satisfacer la demanda futura (Savić et al., 2018). En cuanto a la rehabilitación, se hace referencia al remplazo de las tuberías del sistema que, por deterioro a causa de diferentes factores, han reducido su diámetro o necesitan revestimiento. Por último, la expansión del sistema es la extensión de la red actual para cubrir una nueva zona por fuera de los límites.

Estos problemas suelen formularse de la misma forma que el diseño de una RDAP nueva, no obstante más del 80% de las investigaciones publicadas han utilizado como caso de estudio redes pequeñas, computacionalmente económicas (menos de 100 nodos) (Mala-Jetmarova et al., 2018). Estudios en redes más grandes se han realizado en las competiciones organizadas durante los congresos de “Water Distribution System Analysis – WDSA”.

- Diseño escalonado y diseño flexible.

El problema del diseño escalonado es definido por (Mala-Jetmarova et al., 2018) como la optimización de una RDAP a través del horizonte de planeación en el cual la construcción

del sistema es dividida en distintas fases o etapas. Este horizonte de planeación puede expandirse por los años llegando incluso al ciclo de vida esperado del sistema. Los mismos autores definen el diseño flexible de la igual que el diseño escalonado, pero considerando la incertidumbre asociada a las demandas, el deterioro de las tuberías, la expansión urbana, entre otras. Para ambos casos, el problema de optimización aumenta su complejidad por la introducción de pasos (delta tiempo) y la necesidad de continuidad entre las soluciones escalonadas (Savić et al., 2018).

2.1.2. Operación de RDAP

La optimización en la operación de RDAP ha sido investigada de forma activa por casi 50 años (Mala-Jetmarova et al., 2017). Esta incluye: 1) La operación de las bombas (planeación y operación en tiempo real), 2) el manejo de la calidad del agua del sistema y 3) la operación de válvulas.

- Operación de bombas

La operación de bombas es el tema más investigado en la optimización de la operación de RDAP. El objetivo es optimizar la forma en la que las bombas son operadas para minimizar la cantidad de energía consumida por ellas. El control explícito considera los tiempos de operación de las bombas, mientras que el control implícito se aproxima al problema teniendo en cuenta caudales, presiones, niveles de los tanques e incluso la velocidad de las bombas (Savić et al., 2018). Todos estos controles son variables de decisión en el problema de optimización y su formulación puede encontrarse en (Ormsbee, Lingireddy, & Chase, 2009). Adicionalmente, es necesario tener en cuenta los costos derivados de la demanda de energía y del mantenimiento de las bombas en el proceso de optimización. Todas estas consideraciones hacen que el problema de la optimización del sistema de bombeo de una RDAP sea un desafío complejo.

- Calidad del agua

Ulanicki y Orr (1991) fueron de los primeros en considerar las restricciones de calidad de agua en conjunto con la optimización en la operación de bombas en las RDAP. Otra formulación del problema fue introducida por Boccelli et al., (2002), quienes, se aproximaron al problema usando la minimización de la cantidad de masa de desinfectante suministrada por las estaciones de bombeo como sustituto de los costos. Una variante de esta aproximación involucra la minimización de la desviación en concentración del desinfectante en los nodos de consumo (Savić et al., 2018). Es interesante saber que existe una compensación entre la calidad del agua y los costos operacionales, en donde los costos de bombeo son significativamente reducidos si la calidad de agua está ausente del modelo de optimización, y, por el contrario, los mejores resultados de calidad de agua corresponden a los costos más altos de operación en el bombeo (Ostfeld & Salomons, 2006).

- Operación de Válvulas

Las válvulas como variables de decisión se usan en conjunto con la optimización de la operación de bombas y la calidad de agua del sistema. Las variables de decisión pueden ser: estados continuos de la válvula, estado binario de la válvula, posición de la válvula o ratio de apertura de la válvula, caudal a través de la válvula, coeficientes de pérdidas de la válvula y, la configuración de las válvulas reductoras de presión (PRV de sus siglas en inglés) (Savić et al., 2018). Diferentes formulaciones pueden encontrarse en (Mala-Jetmarova et al., 2017).

2.1.3. Otros usos de optimización en sistemas de distribución de agua potable

Es posible encontrar otras aplicaciones a las mencionadas anteriormente en problemas de optimización en RDAP. Estas áreas están principalmente relacionadas con la calibración, la sectorización y el manejo de la confiabilidad, robustez y resiliencia del sistema.

- Calibración de modelos de RDAP

La calibración de modelos de RDAP consiste en determinar las características físicas y operacionales del sistema mediante la determinación de diferentes parámetros que reducen el error entre lo medido y lo simulado. Las variables que usualmente se utilizan para medir este error son los caudales de las tuberías, las presiones en los nodos y la calidad de agua. Es importante entender que un modelo bien calibrado de una RDAP es un requerimiento para el análisis del comportamiento de la red, lo que hace que la calibración sea fundamental.

- Sectorización de la red

La sectorización del sistema o “partición de la red”, hace referencia a la división de la red en zonas más pequeñas mediante el aislamiento de sectores con válvulas. Esas zonas, también conocidas como sectores hidráulicos (District Metered Areas - DMA), fueron utilizadas por primera vez en el Reino Unido para permitir la identificación más eficiente de fugas y para implementar zonas de reducción de presión mediante la utilización de PRV. Así mismo, la sectorización de la red puede ser útil en caso de emergencias por contaminantes, ya que permite aislar las zonas contaminadas (Savić et al., 2018).

- Confiabilidad, robustez y resiliencia

Es claro que un modelo de optimización basado únicamente en el costo, sin una medida explícita, va a eliminar la redundancia del sistema (Angus R. Simpson, Dandy, & Murphy, 1994). La confiabilidad, robustez y resiliencia de la red son consideradas medidas de desempeño con respecto a las condiciones de incertidumbre inmediata y por venir. Mala-Jetmarova et al. (2017) realiza una compilación de alguna de las diferentes definiciones para cada una de las métricas: En primer lugar, (i) es posible definir la confiabilidad como la habilidad que tiene el sistema para proveer el servicio esperado y puede ser expresada como la probabilidad de que el sistema esté en servicio durante un periodo específico del

tiempo; (ii) la robustez representa la habilidad del sistema de mantener su funcionalidad bajo diferentes circunstancias, o bajo las fluctuaciones diarias presentes en la red que tienen el potencial de causar disminución del rendimiento; y (iii) la resiliencia es definida como la habilidad de una RDAP para adaptarse o recuperarse de alteraciones significativas de la red. Como no existe una función en común para cada una de estas métricas, existen diferentes aproximaciones en la optimización de RDAP.

2.2. Métodos de optimización

Si bien es cierto que los métodos de optimización se han beneficiado del desarrollo digital del computador, las primeras aproximaciones de optimización basada en cálculo datan antes de la era digital a los años 90 del siglo 19. Mala-Jetmarova et al. (2015) reportan una aproximación inicial por Tuttle, quien, en 1985, desarrolló un método para calcular la “economic velocity”, la cual minimiza el diámetro de una tubería basado en los costos anuales de una RDAP incluyendo el costo del capital inicial, el interés anual más la depreciación y el costo anual de la operación del sistema de bombeo. A continuación, se presentan los métodos de optimización que han sido aplicados para el diseño, la planeación y el manejo de RDAP.

2.2.1. Optimización Determinística

- Programación lineal (PL)

Las aproximaciones por optimización determinística (exacta) usan a su favor las propiedades analíticas del problema para generar una secuencia de soluciones candidatas que buscan converger en una solución óptima global (Savić et al., 2018). La programación lineal (PL) es una de las metodologías de optimización determinística más usadas, ya que garantiza encontrar el óptimo en un problema continuo con una función objetivo lineal sujeta a restricciones (Savić et al., 2018). No obstante, como los problemas de optimización de RDAP son no-lineales, ya que la relación entre el caudal y las pérdidas son casi cuadráticas, el uso de PL en RDAP requiere de linealización. Así mismo, por su naturaleza continua, la solución óptima tiene que ser redondeada al valor discreto del diámetro comercial disponible. El primer éxito del uso de PL en el diseño de una RDAP con circuitos fue concebido por Schaake & Lai (1969) y de ahí en adelante aparecieron otras aplicaciones de PL en el diseño y la operación. Aunque los ejemplos del uso de PL para el diseño de RDAP ha disminuido en el tiempo, el uso de esta metodología sigue prevaleciendo en la planeación de la operación del sistema de bombeo y en el control en tiempo real por su alta eficiencia (Savić et al., 2018).

- Programación dinámica (PD)

La PD es otra metodología determinística que se ajusta a los problemas con múltiples etapas de optimización al descomponer estas etapas en una secuencia de procesos de toma de decisión (*single-stage decisión-making*). Se ajusta muy bien para aplicaciones en

operación de bombas (Chase & Ormsbee, 1993), pero sufre de la maldición de la dimensión, por lo cual limita su aplicación en RDAP grandes.

- Programación no – lineal (PNL)

La PNL usada en RDAP se basa en el método del gradiente, la programación cuadrática sucesiva, o programación lineal sucesiva (Angus R. Simpson et al., 1994). Debido al límite de variables y restricciones que la PNL puede manejar, su implementación se limita a RDAP pequeñas. Al igual que con la PL, la PNL trabaja con variables continuas, pero a diferencia de la PL, la PNL no necesariamente converge a un óptimo global en RDAP (Savić et al., 2018).

2.2.2. Metaheurísticas

La aproximación a la optimización de RDAP vivió un cambio importante con la aparición de computadores más potentes y las metaheurísticas en los años 90. Una metaheurística es un algoritmo multipropósito diseñado para resolver de forma aproximada una gran variedad de problemas de optimización duros (encuentra un buen resultado, pero no necesariamente el óptimo global) sin la necesidad de ser adaptado para cada problema. Todas las metaheurísticas tienen en común que: (i) se inspiran en la naturaleza (por ejemplo, principios de la física, biología, entre otros); (ii) son de naturaleza estocástica; (iii) no requieren de linealización, ni del cálculo de derivadas de la función objetivo; (iv) dependiendo del problema, tienen parámetros de calentamiento para conseguir un mejor rendimiento (Nicklow et al., 2010). La mayoría de metaheurísticas son poblacionales, lo que las hace fácilmente adaptables a optimizaciones multiobjetivo para obtener soluciones cercanas a la frontera de Pareto en una sola corrida. La ventaja principal de estos algoritmos de optimización es que son capaces de encontrar soluciones a problemas de alta complejidad que no se encuentran con algoritmos determinísticos (Savić et al., 2018). Mela-Jetmarova et al. (2018) lista una gran variedad de metaheurísticas implementadas en la optimización de RDAP.

2.3. Resumen optimización en RDAP

En general, es posible organizar la investigación del estado actual de la optimización en RDAP con el diagrama que se presenta en Figura 2-1.

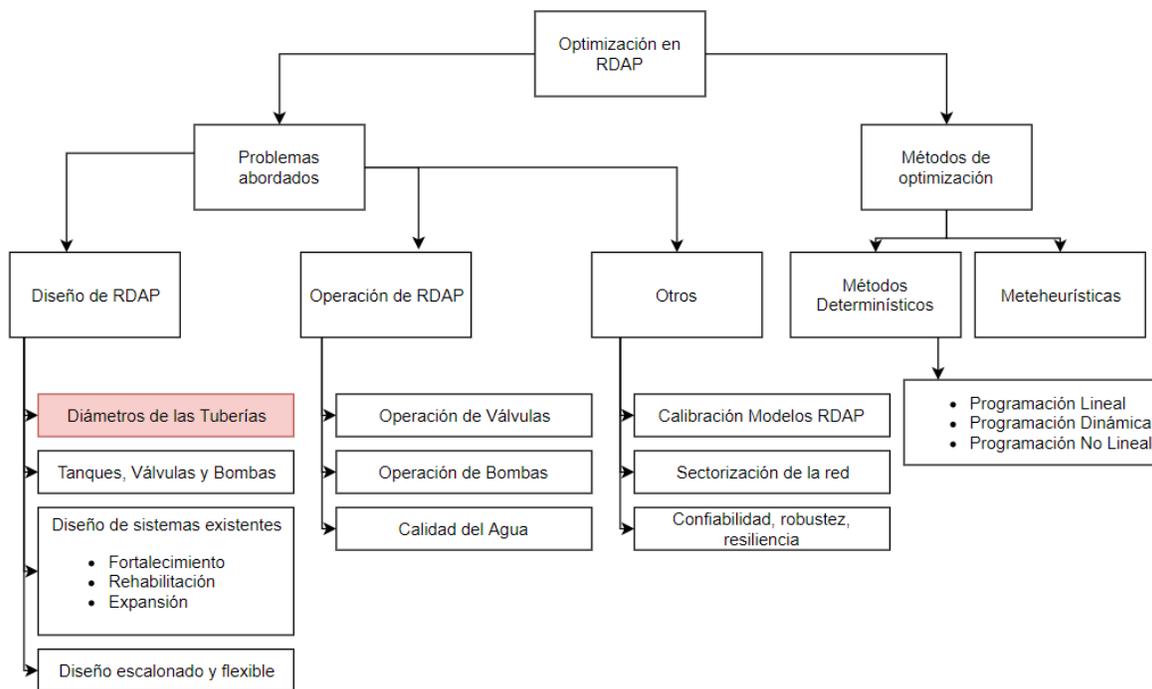


Figura 2-1. Diagrama de investigación en optimización en RDAP

El diagrama expone las ramas de los estudios en optimización en RDAP. De los descritos, el problema que más se ha trabajado es el de la determinación del tamaño de los componentes de las RDAP, en especial del diámetro de las tuberías. Debido a esto, es posible decir que este problema es en el que más se ha avanzado en optimización de RDAP, y del cual, ya se puede considerar que varios de los algoritmos de optimización propuestos permiten la correcta determinación de costos bajos (mínimos) en el diseño de la red. No obstante, aún no se ha profundizado en las posibles relaciones existentes entre geometría de la red y su diseño optimizado.

Estudiar la geometría de los diseños optimizados puede ser clave para abrir un camino y entender cómo formular modelos detallados que describan los costos y el comportamiento del sistema, lo cual, según Sávic et al. (2018), es uno de los temas a abordar en investigaciones futuras. Además, la identificación del mejor esquema de optimización para cada RDAP puede ser importante debido a que una sola aproximación no basta para todas las redes. Según (Hwang & Lansey, 2017) la efectividad y eficiencia de los diferentes algoritmos de optimización para diseñar una RDAP se ve afectada por la topología de la red.

3. GEOMETRÍA DE REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE

La geometría de las RDAP se ha estudiado desde dos enfoques complementarios que permiten plantear una base para lo que debería ser un análisis robusto de la geometría de la red. En primer lugar, se ha estudiado la geometría de la red analizando su topología mediante la evaluación de diferentes métricas estructurales y estadísticas del mundo de las redes complejas (Complex Network Theory). Acá, se estudian las redes mediante su representación matemática a través de un grafo $G = G(V, E)$, en donde V es un conjunto de nodos con n elementos (tamaño del grafo) y E es el conjunto de links con m elementos (orden del grafo) (Giustolisi & Savic, 2010; Yazdani & Jeffrey, 2012a). En segundo lugar, el estudio de las propiedades geométricas de los componentes de la red mediante la evaluación de diferentes índices como los propuestos por (Moreno, Rojas, & Saldarriaga, 2018) que tienen en cuenta características de las tuberías y el comportamiento hidráulico de la red.

3.1. Complex Network Theory

La teoría de redes complejas (CNT) - *Complex Networks Theory*, nace hace más de dos siglos con Euler (1741 teoría de grafos) y en las últimas dos décadas se ha convertido en una herramienta útil y potente para estudiar, describir y entender el mundo (Barabási, 2012). CNT permite el estudio y la interpretación de una gran cantidad de sistemas, por ejemplo: físicos, sociales biológicos, de infraestructura, etc., ya que la mayoría de estos funcionan como redes. Es cierto que cada red exhibe sus propias propiedades topológicas y estructurales, no obstante, redes muy diferentes comparten características similares (Albert & Barabási, 2002; Newman, 2010).

La investigación en el campo de redes complejas y sus propiedades estructurales ha crecido rápidamente, llevando al desarrollo de nuevas aproximaciones, métricas y teorías para explorar y entender las características de la red (ej. Boccaletti, Latora, Moreno, Chavez, & Hwang, 2006; Newman, 2010). Los temas más investigados, dentro del análisis de CNT y sus métricas, se relacionan con la robustez, vulnerabilidad, resiliencia y eficiencia de sistemas reales (Giustolisi, Simone, & Ridolfi, 2017).

Las redes complejas son representadas como un conjunto de vértices V (nodos, intersecciones, actores, etc.) y la conexión entre estos como un conjunto de aristas E (links, tuberías, relaciones, etc.). Para cada red:

- i) Es posible evaluar características básicas para clasificar la estructura y conectividad de la red (Boccaletti et al., 2006; Newman, 2010). Como: matriz de adyacencia, grado (degree), diámetro, camino y camino más corto (path and shortest path), coeficiente de agrupación (clustering coefficient), etc.

Una métrica clave de entender es la distribución del grado de los nodos, ya que describe la distribución de probabilidad del número de aristas conectadas con cada vértice de la red, y diferentes características de la red están asociadas con la forma de esta distribución (Giustolisi et al., 2017). Estudios relacionados con la clasificación y generación de redes definieron tres tipos de redes basados en la distribución del grado: 1) aleatorias (Erdős & Rényi, 1960; 1959), 2) small world “mundo pequeño” (Watts & Strogatz, 1998) y 3) scale-free “libres de escala” (Barabási & Albert, 1999). En las redes aleatorias, la distribución del grado es aleatoria y similar alrededor de un valor promedio, siguiendo un modelo de Poisson. Las redes de mundo pequeño se basan en el concepto de seis grados de separación (Travers & Milgram, 1969) y muestran un comportamiento intermedio entre redes regulares y redes aleatorias (modelo de Poisson). Por último, en las redes libres de escala, el grado de distribución sigue un modelo de Pareto con muchos nodos con baja conectividad y otros (hubs) con muchas conexiones. Esta clasificación es útil para analizar las redes con respecto a su comportamiento como consecuencia de fallas espontáneas o amenazas intencionales.

- ii) Algunos componentes (enlaces y nodos) son más centrales que otros (Cadini, Zio, & Petrescu, 2009; Everett & Borgatti, 1998; Freeman, 1977).

Por lo cual, existen diferentes métricas basadas en el concepto de grado del elemento para medir centralidad y determinar cuál o cuáles son los componentes más importantes (los más centrales). Algunas de estas métricas son: (1) grado (Nieminen, 1974), (2) proximidad *closeness* (Freeman, 1978) (3) *betweenness* (Freeman, 1977), Vector propio (Bonacich, 1972), etc.

- iii) Es un reto definir criterios para la detección de comunidades o la división en módulos para entender mejor y analizar las diferentes porciones de una red.

(Newman, 2006) propuso una aproximación mediante la optimización de la modularidad de la red sobre el número posible de divisiones de la red. (Girvan & Newman, 2002) también propusieron un algoritmo para detectar comunidades usando una métrica de centralidad (*edge betweenness*) la cual progresivamente removía aristas con los mayores valores de *betweenness*.

Cada día se proponen nuevos métodos de redes complejas basados en características de conectividad, métricas de centralidad y detección de comunidades.

Varios estudios de CNT se han centrado en entender el comportamiento de redes de infraestructura como carreteras, redes de energía y las RDAP, por ejemplo: (Barthelemy, 2003; Barthélemy, 2011; Barthélemy & Flammini, 2008; Buhl et al., 2006; Cardillo, Scellato, Latora, & Porta, 2006; Carvalho et al., 2009; Crucitti, Latora, & Marchiori, 2005; Deuerlein, 2008; Giustolisi et al., 2017; Masucci, Smith, Crooks, & Batty, 2009; Rosas-Casals, Valverde, & Solé, 2007; Yazdani & Jeffrey, 2011). En cuanto a la susceptibilidad de la red al daño: (Berardi, Ugarelli, Røstum, & Giustolisi, 2014; Berche, Von Ferber, Holovatch, &

Holovatch, 2009; Latora & Marchiori, 2005; Soldi, Candelieri, & Archetti, 2015; Yazdani & Jeffrey, 2010, 2012b).

CNT, en efecto, estudia sistemas complejos compuestos por múltiples componentes interconectados (nodos y enlaces) estructurados en configuraciones no triviales en donde el comportamiento de la red está afectado por su estructura dependiendo de la complejidad organizacional y del nivel de interacción entre los componentes (Yazdani & Jeffrey, 2011).

3.2. CNT y su aplicación en RDAP

Las RDAP son redes de infraestructura con características especiales porque son redes de ciudad (Barthélemy, 2011), en las cuales la topología está restringida a factores ambientales como las calles y los edificios, los cuales conducen la planeación y construcción de la red (Giustolisi et al., 2017). Debido a lo anterior, existen serias limitaciones en la conectividad de la red y en su diseño, haciendo que las RDAP se estudien de forma distinta a otras redes complejas. En la última década, el estudio de RDAP usando CNT ha crecido rápidamente y ha atraído a muchos investigadores, aun cuando sus primeros estudios datan a 1972.

Kesevan y Chandrashekar (1972) utilizaron teoría de grafos para obtener modelos para el análisis de redes de tuberías no-lineales. Jacobs y Goulter (1988, 1989) mostraron que las redes que son menos vulnerables a fallas son las redes regulares con el mismo número de links incidentes a cada nodo. Ostfeld y Shamir (1996) utilizaron teoría de redes para estudiar la selección de sistema de redundancia “backups” en una RDAP susceptible a fallas. Kumar et al. (1999) propusieron una metodología para encontrar el trazado óptimo de un sistema de detección en una RDAP municipal basados en el concepto de *shortest path* (ruta más corta). Gupta y Prasad (2002) propusieron un método numérico basado en teoría lineal de grafos para el análisis de flujo uniforme y presiones en una red de tuberías incluyendo sus componentes hidráulicos (bombas, válvulas, uniones). Deuerlein (2008) propuso un nuevo concepto de descomposición del grafo de una red de acuerdo con las propiedades de conectividad de esta y teniendo en cuenta mediciones de vulnerabilidad de la red, así como varias fases de simplificación de la red las cuales pueden mejorar el entendimiento de los componentes de las redes y su interacción.

Entre 2010 y 2012, Yazdani y Jeffrey representaron una RDAP como un grafo plano y disperso con características de redes complejas y estudiaron la relación entre importantes atributos topológicos de la red con la resiliencia del sistema, introduciendo dos métricas, *Meshed-ness* y conectividad algebraica - *algebraic connectivity*, para cuantificar la redundancia y robustez, respectivamente, en modelos de diseños optimizados. En el 2011 (Yazdani & Jeffrey, 2012a) exploraron una variedad de estrategias para entender la formación, estructura, eficiencia y vulnerabilidad de RDAP. Las métricas estructurales fueron usadas para cuantificar propiedades como la redundancia y la conectividad óptima, usadas como restricciones en el diseño de RDAP. Así mismo, (2012a) propusieron la

representación link-nodo de una RDAP y una gran variedad de métricas para estudiar los elementos fundamentales de los sistemas. Ellos cuantificaron propiedades como la redundancia y la tolerancia a fallas con el propósito de establecer relaciones entre métricas estructurales y el rendimiento de RDAP. En el (2012c), estudiaron la conectividad de los sistemas de distribución de agua potable, sus relaciones con la robustez y susceptibilidad al daño, modelando redes con dirección y peso.

Hawick (2012) aplicó análisis teórico de grafos a RDAP reales con el fin de estudiar su robustez y propiedades de fragmentación a través de simulación de fallas en los componentes de la red; uso la métrica de centralidad - *betweenness* para clasificar los componentes y luego fue retirando los componentes más importantes. Gutiérrez-Pérez et al. (2013) introdujeron una metodología basada en medidas espectrales de teoría de grafos para establecer la importancia relativa de diferentes sectores en RDAP usando dos algoritmos de clasificación (PageRank y HITS), con el propósito de lograr un análisis eficiente de vulnerabilidad. Este método está basado en medidas de grafos como la clasificación de la importancia relativa del grado de los vértices. Sheng et al. (2013) exploraron la formación de comunidades en RDAP basados en CNT usando un modelo grafo-algebraico para detectar las comunidades potenciales debido a fallas en las tuberías. Shuang et al. (2014) propusieron evaluar la vulnerabilidad de los nodos de RDAP bajo fallas en cascada. Nazempour et al. (2016) desarrollaron una nueva aproximación a la modelación de la ubicación óptima de sensores para detectar la contaminación en RDAP combinando la optimización clásica con CNT. Giustolisi et al. (2017) crearon una métrica llamada *neighborhood nodal degree* “grado vecino del nodo” mostrando que la distribución de esta métrica si era apta para clasificar redes de infraestructura. Modelaron varias RDAP usando el *neighborhood nodal degree* obteniendo una distribución de Poisson, y demostrando que las redes presentan una buena resistencia estructural contra fallas aleatorias y amenazas intencionales, así como una buena conectividad estructural.

En el 2017, Hwang y Lansey desarrollaron un esquema para clasificar RDAP basado en el funcionamiento del sistema y en su topología. Examinaron varias métricas de CNT para determinar los más adecuados para describir RDAP. Meng et al., (2018) estudiaron la relación entre la resiliencia de un sistema y métricas topológicas de teoría de grafos y encontraron que la resiliencia se veía afectada por algunos atributos topológicos. Por último, Giustolisi et al. (2019) realizaron el ajuste de una métrica de centralidad de teoría de grafos para poder determinar cuáles eran las tuberías más importantes de una red únicamente con el análisis de su topología. La métrica ajustada la llamaron *tailored Edge betweenness*.

Los conceptos de teoría de grafos también se han implementado en sistemas de distribución de agua potable con fines de monitoreo, operación y control. Se ha investigado en calibración de modelos, medición de consumo de agua potable, detección de contaminación temprana, control de presión y de fallas (Laucelli, Simone, Berardi, & Giustolisi, 2017). Muchos algoritmos y métricas se han usado para definir la división óptima de RDAP con respecto a su topología y las características de sus componentes, como por

ejemplo el diámetro y la longitud de las tuberías, las elevaciones de los nodos, fugas, etc. Torres et al. (2017), por ejemplo, investigaron los patrones estructurales y las conexiones basados en grafos utilizando redes en malladas (*lattice-like*). Perelman y Ostfeld (2011) propusieron un esquema de fragmentación para análisis topológico/conectividad con el objetivo de desarrollar y demostrar un algoritmo basado en la conectividad para el análisis de RDAP.

Por último, la segmentación óptima y división de RDAP para el análisis, la planeación y el manejo de RDAP. El índice de modularidad es el índice más aceptado y usado para medir que tan propensa es una red a dividirse en módulos (Newman & Girvan, 2004). Scibetta et al. (2013) y Diao et al. (2013) aplicaron el índice de modularidad para la segmentación de una RDAP usando la formulación original de Newman. Barthelemy (2011) explicó que la formulación original estaba hecha para redes inmateriales (intangibles). Giustolisi y Ridolfi (2014b) adaptaron el índice original de modularidad para obtener un índice orientado a RDAP, teniendo en cuenta las características de estas. También propusieron un índice de modularidad de infraestructuras (2014a) modificando el índice orientado a RDAP con el fin de sobreponer el límite de resolución del índice de modularidad original (Fortunato & Barthélemy, 2007) que causaba la no-identificación de módulos pequeños dependiendo del tamaño de la red. Finalmente, Giustolisi et al. (2015) reportaron un marco comprehensivo de índices de modularidad orientados a RDAP. Simone et al. (2016) extendieron los conceptos de segmentación de redes a diseño por muestreo de presiones, introduciendo el índice de modularidad orientado a muestras y el concepto de sectores por presión, extendiendo el concepto de sectores por caudal relacionado con la forma clásica de segmentación hidráulica.

3.3. Teoría de grafos – Topología de redes

La teoría de grafos es la base fundamental de la CNT, ya que una red, independiente de su complejidad, es un grafo con un conjunto de nodos conectados por un conjunto de enlaces. La teoría de grafos nace con Euler en 1735 intentando dar solución al problema de los puentes de Königsberg (*The Bridges of Königsberg*). El problema intenta solucionar la pregunta: ¿puede alguien cruzar los 7 puentes de Königsberg sin cruzar por más de un puente a la vez?

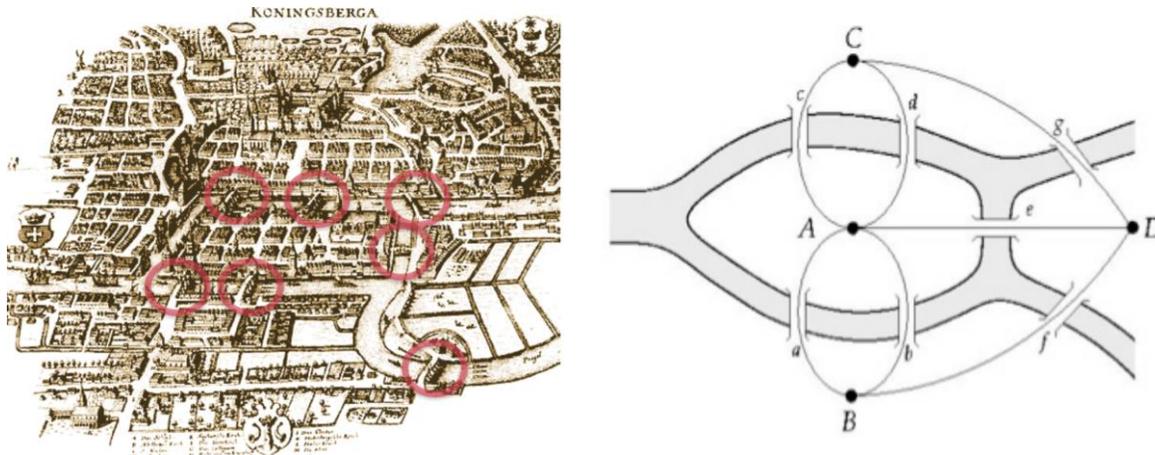


Figura 3-1. Problema "The Bridges of Konisberg" (Barabási, Towlson, & Cornelius, 2018)

Euler soluciona esta pregunta diciendo que no es posible y establece que (1735 – Teorema de Euler):

- a) Si un grafo tiene más de dos nodos con grado impar, no existe un camino.
- b) Si un grafo está conectado y no tiene nodos con grado impar, tiene al menos un camino.

Con este teorema nace el estudio de los grafos y se plantea la representación geométrica de los sistemas mediante la caracterización de su topología.

Un grafo se puede representar como $G = G(V, E)$, en donde V es un conjunto de nodos con n elementos (tamaño del grafo) y E es el conjunto de links con m elementos (orden del grafo). En el caso más simple, los grafos son representaciones planas sin peso y sin dirección, no obstante, es posible realizar la representación matemática de una red teniendo en cuenta la dirección de los enlaces (aristas dirigidas) y la información en los nodos (pesos).

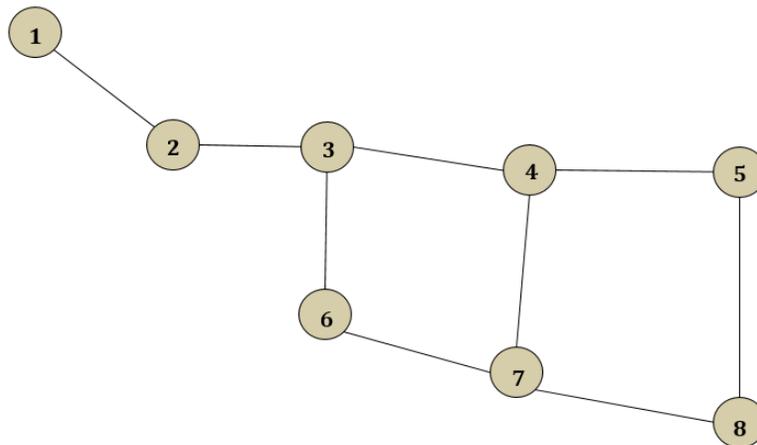


Figura 3-2. Grafo (no dirigido - sin peso)

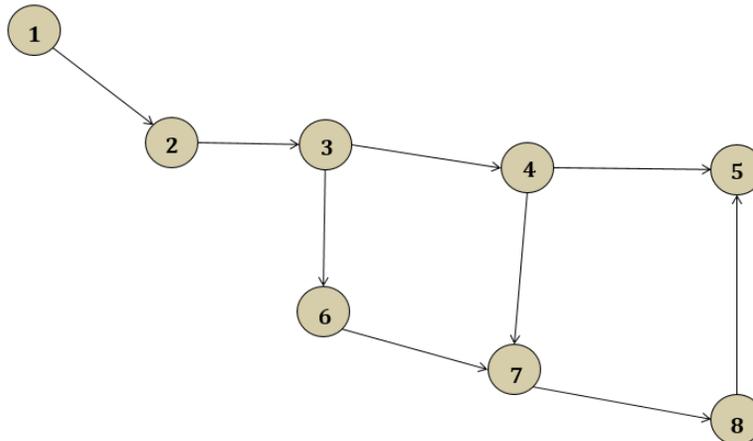


Figura 3-3. Grafo dirigido

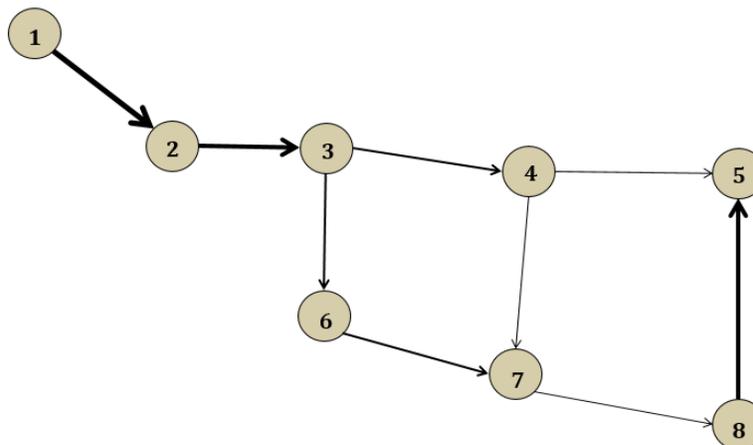
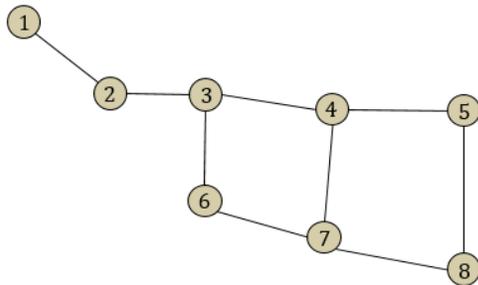


Figura 3-4. Grafo dirigido y con peso

A continuación, se presenta una serie de características generales de los grafos.

- Grado, grado promedio y distribuciones de grados

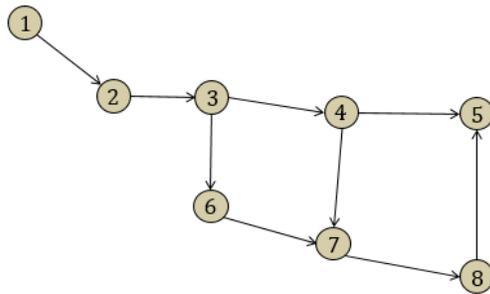
El grado del nodo es el número de links conectados al nodo. Usualmente se denota con la letra k . En redes con dirección (dirigidas) se puede definir el grado de entrada y el grado de salida, el grado total sería la suma del grado entrante y el saliente (Barabási et al., 2018).



$$k_6 = 2$$

$$k_4 = 3$$

Figura 3-5. Grado para grafos no dirigidos



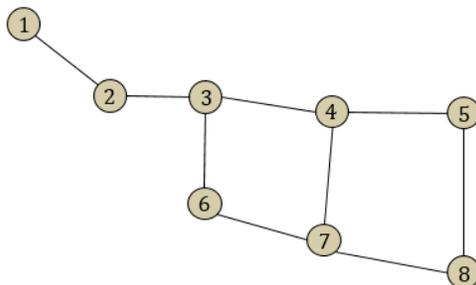
$$k_7^{in} = 2$$

$$k_7^{out} = 1$$

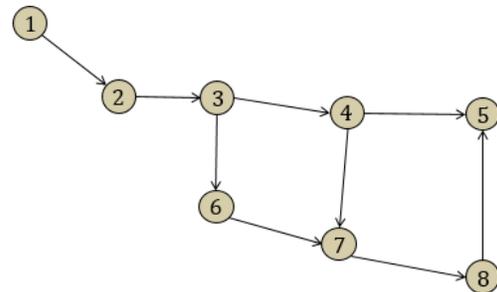
$$k_7 = 3$$

Figura 3-6. Grado para grafos dirigidos

El grado promedio del grafo $\langle k \rangle$ es simplemente la suma de cada uno de los grados de los nodos dividido en el número total de nodos.



$$\langle k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i = \frac{2m}{n} = \frac{9}{4} = 2.25$$



$$\langle k^{in} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^{in}; \langle k^{out} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^{out}; \langle k^{in} \rangle = \langle k^{out} \rangle$$

$$\langle k \rangle = \frac{m}{n} = \frac{9}{8}$$

Figura 3-7. Grado promedio del grafo

La distribución del grado $P(k)$ es la probabilidad de que un nodo tenga el grado k .

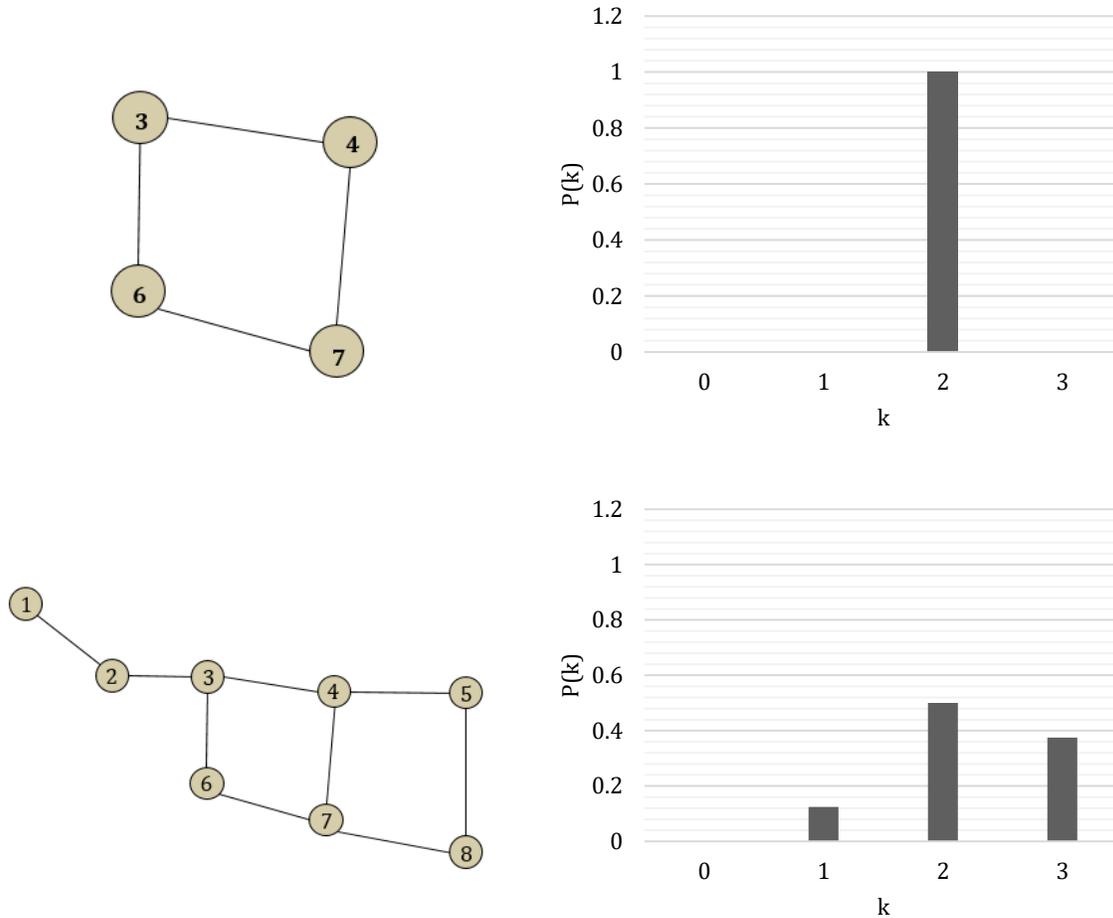


Figura 3-8. Distribución del grado $P(k)$

- Vecindarios

De cada nodo dentro de un grafo es posible hablar de vecindarios, haciendo referencia al conjunto de nodos que se conectan a él. Si el grafo es dirigido, existen vecindarios de entrada y de salida.

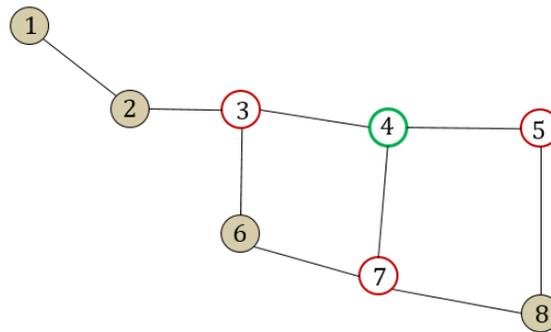


Figura 3-9. Vecindario (nodo 4)

- Matriz de adyacencia – representación del grafo

La representación del grafo se realiza mediante la matriz de adyacencia [A]. Esta matriz, de tamaño $n \times n$ y está compuesta por unos (1 si hay conexión entre nodos) y 0 (si no existe conexión entre los nodos) cuando es un grafo sin peso. En caso de que se tenga en cuenta el peso, los valores 1 y 0 son remplazados por el peso respectivo ($A_{ij} = w_{ij}$) (Barabási et al., 2018).

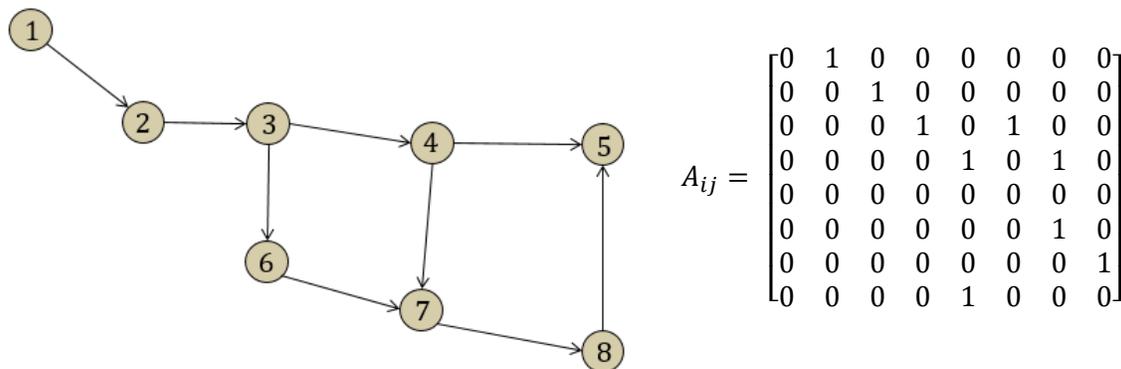
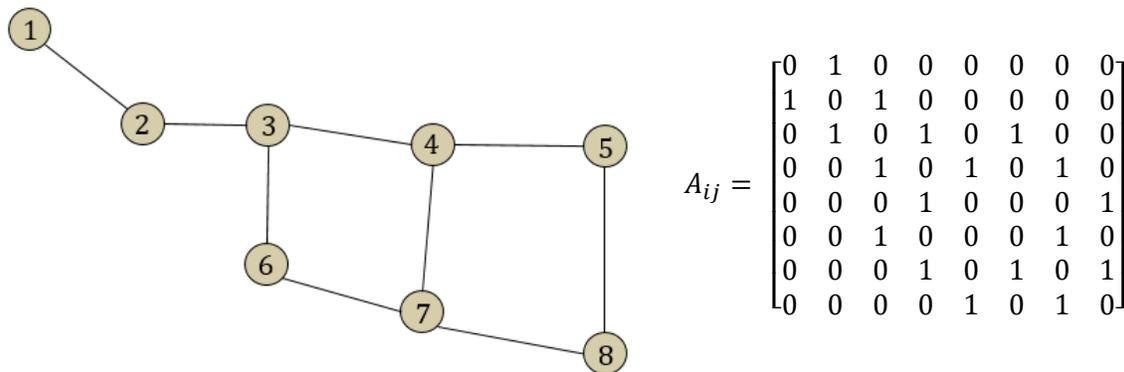


Figura 3-10. Matriz de adyacencia

- Caminos y ciclos

Si un grafo está completamente conectado (grafo conexo), existen caminos entre todos los nodos de la red. Un camino entre un nodo i y un nodo j es una sucesión de nodos que comienza en i y termina en j en donde cada par de nodos consecutivos está conectado por un enlace. Se dice que es un camino simple si todos los nodos son distintos entre sí y un ciclo si el nodo inicial es el mismo que el final. Los caminos tienen una longitud y un peso (grafos con peso), la primera hace referencia al número de aristas del camino y el peso, es la suma de los pesos de las aristas del camino (en caso de que haya) (Barabási et al., 2018).

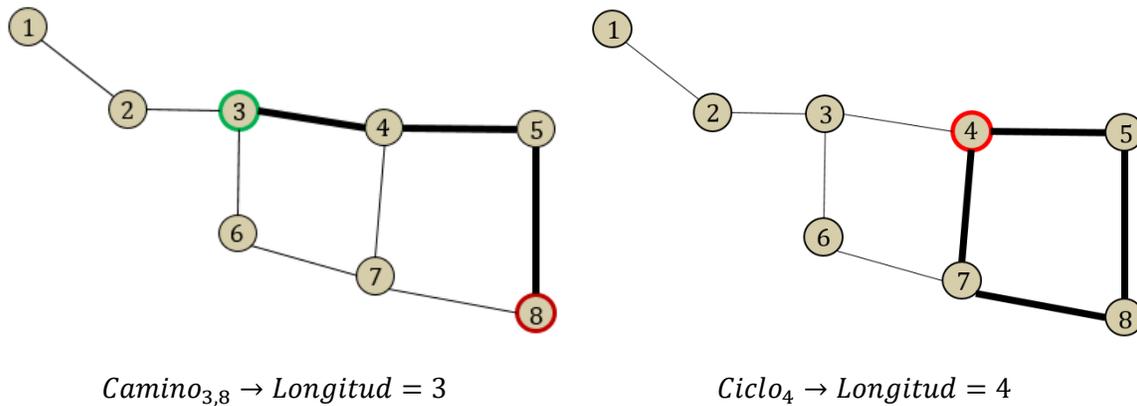


Figura 3-11. Caminos y ciclos en grafos

La distancia d (camino más corto, camino geodésico) entre dos nodos se define como el número de links totales en el camino más corto que los conecta. Si dos nodos están desconectados, la distancia sería infinita. Para grafos dirigidos, cada camino sigue la secuencia de los arcos, por lo cual, usualmente la diferencia entre dos nodos i y j es diferente a la distancia entre j e i . El diámetro $d_{m\acute{a}x}$ es la distancia máxima entre cualquier par de nodos en un grafo (Barabási et al., 2018).

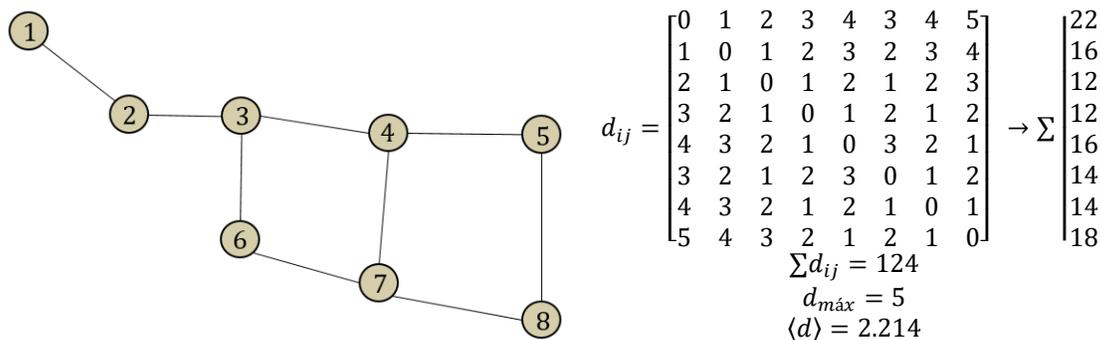


Figura 3-12. Distancias, diámetro y longitud promedio de los caminos de un grafo

Para un grafo conexo, la *longitud promedio de los caminos* $\langle d \rangle$ (average path length) equivale a:

$$\langle d \rangle \equiv \frac{1}{2 L_{m\acute{a}x}} \sum_{i,j \neq i} d_{ij} ; L_{m\acute{a}x} = \frac{N(N-1)}{2}$$

donde d_{ij} es la distancia del nodo i al nodo j (Barabási et al., 2018).

- Conectividad

En un grafo no dirigido, se dice que es conexo si todo par de nodos están conectados por un camino. Un grafo no-conexo está hecho por dos o más componentes conexos. Se considera como un puente a un enlace que al quitarse desconecta el grafo ($Puente = N_2 \rightarrow N_3$).

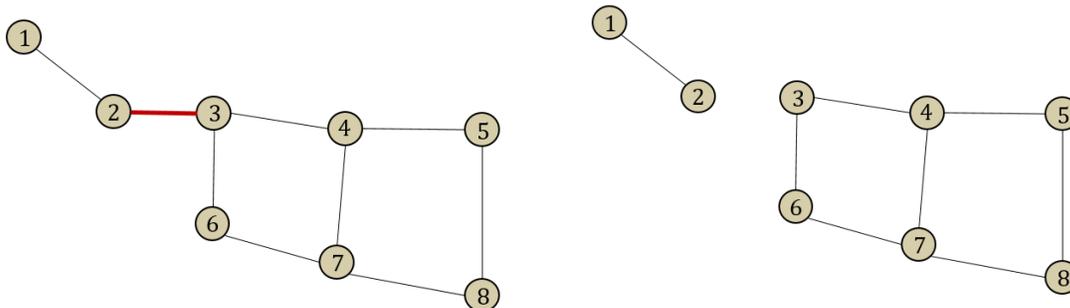


Figura 3-13. Conectividad de un grafo

Para grafos dirigidos, se dice que es un grafo fuertemente conexo si existe un camino entre cada nodo de ida y de vuelta, es decir, si existe un camino AB y BA . Un grafo con conexión débil es aquel que es conexo ignorando las direcciones de los enlaces.

- Otras medidas comunes de los grafos

A continuación, se presentan algunas medidas comunes de los grafos. Un estudio completo de las diferentes métricas de los grafos puede encontrarse en (Costa, Rodrigues, Travieso, & Boas, 2007) y (Boccaletti et al., 2006).

Coefficiente de Clustering (agrupación) o Transitividad (Barabási et al., 2018). Es la probabilidad de que dos nodos vecinos a uno dado sean vecinos entre sí. En otras palabras, calcula la fracción de los nodos vecinos conectados.

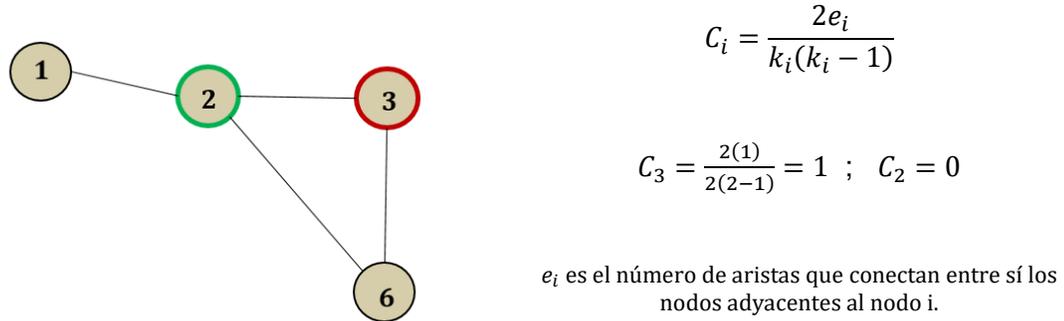


Figura 3-14. Coeficiente de agrupación

Medidas de centralidad.

Betweenness, Carga o Intermediación (Barabási et al., 2018). La carga del nodo k es la porción de caminos más cortos que van de un nodo i a un nodo j pasando por el nodo k . Es una métrica que da una idea de la conectividad relativa y de la porción de veces que el nodo (o enlace) puede actuar como puente. Es clasificada como una medida de centralidad.

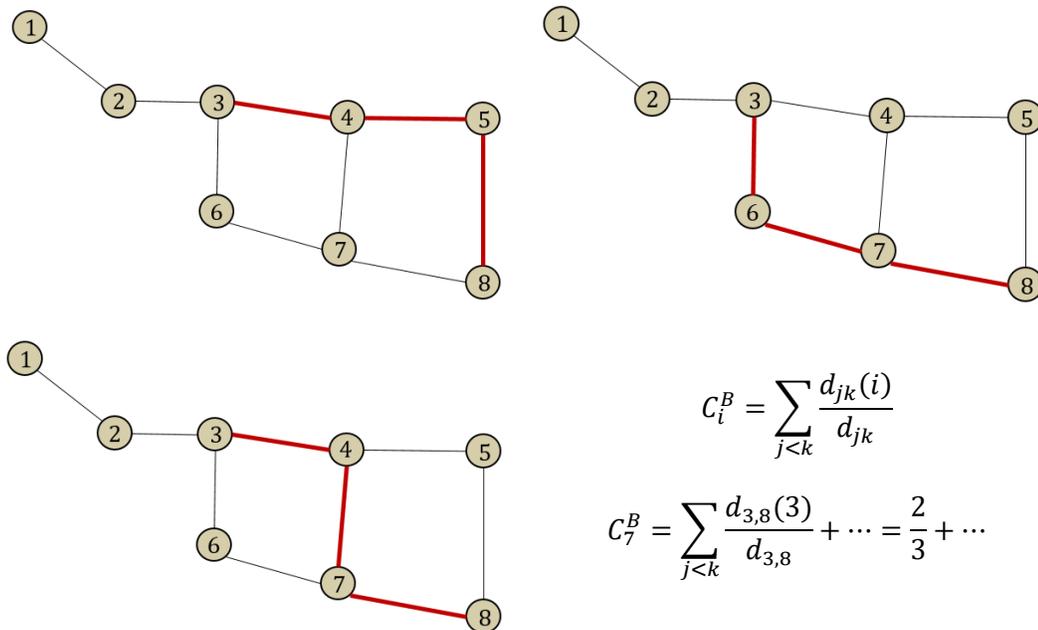


Figura 3-15. Intermediación (Betweenness)

En la figura se puede observar el proceso del cálculo de la intermediación del nodo 7 teniendo en cuenta únicamente los caminos más cortos entre los nodos 3 y 8. Se debe realizar el cálculo teniendo todos los pares de nodos. Es posible normalizar la intermediación del nodo i por el número total de pares de nodos excluyendo al nodo i .

$$C_i^B \text{ Norm} = \frac{C_i^B}{(N-1)(N-2)/2}$$

- **Closeness (cercanía)** (Barabási et al., 2018). Es el promedio de las distancias más cortas desde un nodo hacia todos los demás. Mide la centralidad como la importancia que tiene un vértice en esparcir la información a los otros nodos a través de las distancias más cortas.

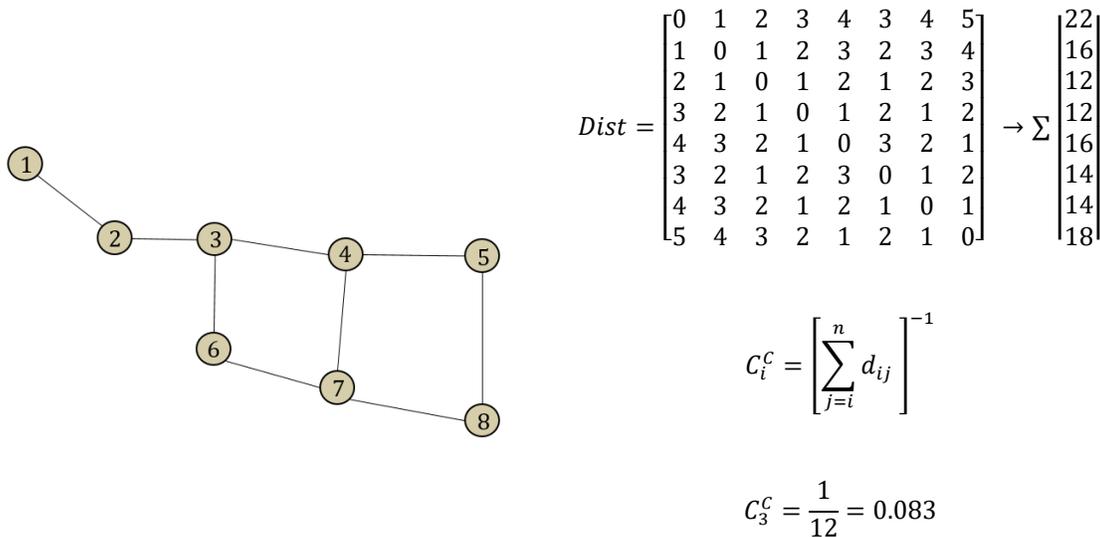


Figura 3-16. Cercanía (Closeness)

Esta centralidad también puede normalizarse dividiendo por $(n - 1)$.

3.3.1. Métricas topológicas (teoría de grafos) implementadas en RDAP

En esta sección se presentan las diferentes métricas de CNT o teoría de grafos implementadas en el estudio de RDAP. Las métricas se obtuvieron de recopilar y analizar toda la información disponible, mediante búsqueda bibliográfica, sobre índices de redes utilizados en el análisis de RDAP. Para el caso de análisis, los vértices hacen referencia a los nodos (n) y los enlaces a las tuberías (m) de la RDAP.

3.3.1.1 Métricas para el estudio de RDAP (grafos no dirigidos y sin peso)

- Densidad de enlaces (Link Density) $\rightarrow q$ (Yazdani, Otoo, & Jeffrey, 2011)

La densidad de enlaces es el indicador más básico del (*linkedness* o *sparseness*) de la estructura de una red. Se define como la razón entre el número de enlaces m en la red y el número máximo posible de enlaces de esta misma. Las densidades altas indican RDAP de mayor conectividad. Es una medida global de la red.

$$q = \frac{2m}{n(n-1)}$$

Ecuación 1. Densidad de enlaces

- Grado promedio del nodo (Average Node Degree) $\rightarrow \langle k \rangle$ (Newman, 2010; Yazdani et al., 2011)

El grado promedio del nodo, junto con su histograma, es una medida básica de la conectividad de la red. Refleja qué tan similar es la red a una red en forma de grilla (lattice-like), importante hacia la distribución por igual del caudal y la presión bajo demanda variable. Se define como el número promedio de enlaces conectados a los nodos.

$$\langle k \rangle = \frac{2m}{n}$$

Ecuación 2. Grado promedio de los nodos

- Grado del nodo vecino (Neighborhood Nodal Degree) $\rightarrow k_n$ (Giustolisi et al., 2017)

Es una extensión al grado estándar del nodo. Corresponde a la suma de los grados de los nodos adyacentes al nodo en cuestión y sirve para clasificar RDAP.

$$k_n(i) = \sum_{j \in N(i)} A_{ij} k(j)$$

Ecuación 3. Grado del nodo vecino

donde $k_n(i)$ es el grado vecino (integra los nodos adyacentes) del nodo i , A_{ij} son los elementos de la matriz adyacente, $k(j)$ es el grado del nodo estándar y $N(i)$ es el vecindario topológico del nodo i (el set de nodos adyacentes).

- Índice Beta (Beta index) $\rightarrow \beta$ (Beckmann & Kansky, 2006)

El índice beta es una métrica simple de la estructura de la red. Es la razón entre el número de enlaces y nodos.

$$\beta = \frac{m}{n}$$

Ecuación 4. Índice Beta

- Heterogeneidad (Heterogeneity) (Gao, Barzel, & Barabási, 2016)

La heterogeneidad es una métrica que mide la diversidad de la red. Se mide como la varianza de los grados de los nodos.

$$\frac{1}{\bar{k}} \times \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2$$

Ecuación 5. Heterogeneidad

donde \bar{k} es equivalente a $\langle k \rangle$, el grado promedio de los nodos de la red y k_i es el grado del nodo i .

- Coeficiente de agrupación (Clustering coefficient) $\rightarrow C_c$ (Wasserman & Faust, 1994; Yazdani et al., 2011)

También conocida como transitividad, es la probabilidad de que dos nodos vecinos a un nodo cualesquiera sean vecinos entre sí. Es una medida de redundancia que cuantifica la densidad de ciclos triangulares y el grado en el que los nodos tienden a estar conectados. Para redes con estructura de grilla (como muchas RDAP), en las cuales los ciclos tienen formas geométricas diferentes a las triangulares, el valor del coeficiente de agrupación tiende a ser bajo. Se mide como la razón entre el número de triángulos de la red y el número máximo de triángulos posibles.

$$C_c = \frac{3N_{\Delta}}{N_3}$$

Ecuación 6. Coeficiente de agrupación del grafo

donde N_{Δ} es el número de triángulos y N_3 es el número de tripletes de nodos conectados. Otra forma de medir la transitividad del nodo es mediante la ecuación:

$$C_i = \frac{e_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)}$$

Ecuación 7. Transitividad del nodo

donde e_i es el número de aristas que conectan entre sí los nodos adyacentes al nodo i . El coeficiente de agrupación total de la red es la sumatoria de los coeficientes individuales de cada nodo dividido en el número total de nodos.

- Coeficiente de “enmallado” (Meshedness coefficient) $\rightarrow R_m$ (Buhl et al., 2006)

Cuantifica el estado general de los bucles (circuitos) en la red. Provee una estimación de la redundancia topológica en un grafo plano de una RDAP al encontrar el número de circuitos independientes presentes en la red ($m - n + 1$) como un porcentaje del número máximo de circuitos posibles en la red ($2n - 5$).

$$R_m = \frac{m - n + 1}{2n - 5}$$

Ecuación 8. Coeficiente Meshedness

* $m - n$ en el numerador si hay más de una fuente

- Longitud promedio de los caminos (Average Path Length) $\rightarrow l$ (Yazdani et al., 2011)

Es la distancia (camino más corto, camino geodésico) promedio d entre todos los nodos de la red. Estima el número promedio mínimo de enlaces que tienen que recorrerse para ir de un nodo a otro.

$$l = \frac{1}{n(n-1)} \times \sum_{i,j=1}^n d_{i,j}$$

Ecuación 9. Longitud promedio de los caminos

donde $d_{i,j}$ equivale a la longitud del camino más corto los nodos i y j .

- Diámetro (diameter) $\rightarrow d_T$ (Yazdani et al., 2011)

El diámetro de la red es la máxima distancia geodésica de los caminos más cortos entre cualquier par de nodos de la red.

$$d_T = \max(d_{i,j})$$

Ecuación 10. Diámetro del grafo

- Eficiencia de la red (Network Efficiency) $\rightarrow E$ (Boccaletti et al., 2006; Torres et al., 2017)

La eficiencia de la red se puede medir como la distancia física armónica promedio entre los nodos de la red. Varía entre 0 para redes con baja eficiencia y 100% para redes de eficiencia alta. Puede tomarse como una medida indicativa (sustituta) para el tiempo promedio del viaje del agua en la red.

$$E = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j \in N, i \neq j} \frac{1}{d_{ij}}$$

Ecuación 11. Eficiencia de la red

- Factor de ruta/camino (Route Factor) $\rightarrow g$ (Yazdani & Jeffrey, 2011)

Es una medida de eficiencia basada en la conectividad entre el nodo raíz (un embalse) y el resto de los nodos de la red.

$$g_R = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\epsilon_{s,i}}{\delta_{s,i}}$$

Ecuación 12. Factor de ruta

donde $\epsilon_{s,i}$ es la distancia (Euclidiana) combinada de los nodos que conectan al nodo i con la fuente s , y $\delta_{s,i}$ es la distancia Euclidiana directa.

- Densidad de puentes (Density of bridges) $\rightarrow D_{br}$ (Paez & Fillion, 2017; Yazdani et al., 2011)

Es una medida de robustez de la red. Mide el número de enlaces que al removerse de la red desconectan la desconectan sobre el número total de enlaces. En términos de RDAP, calcula el porcentaje de las tuberías cuya falla puede potencialmente interrumpir el suministro de agua al aislar una parte de la red de la fuente de suministro.

$$D_{br} = \frac{N_{br}}{m}$$

Ecuación 13. Densidad de puentes

donde N_{br} es el número de puentes en la red. Un puente es un enlace cuya eliminación desconecta la red.

- Densidad de puntos de articulación (Density of Articulation Points) $\rightarrow D_{ap}$ (Yazdani et al., 2011)

Al igual que la densidad de los puentes, es una medida de robustez de la red. Calcula el porcentaje de los nodos cuya falla puede potencialmente interrumpir el suministro de agua al aislar una parte de la red de la fuente de suministro. Un punto de articulación es un nodo que, al removerlo, junto con sus enlaces incidentes, desconecta la red. Es la razón entre el número de puntos de articulación N_{ap} sobre el número total de nodos.

$$D_{ap} = \frac{N_{ap}}{n}$$

Ecuación 14. Densidad de puntos de articulación

- Brecha espectral (Spectral Gap) $\rightarrow \lambda\Delta$ (Estrada, 2006; Yazdani et al., 2011)

Esta métrica provee información de la robustez de la red. Es usada con el fin de detectar redes con “buenas” propiedades de expansión (es decir, redes que poseen un trazado óptimo de conectividad). Si el valor de la brecha espectral es grande, se habla de una red con buenas propiedades de expansión. Si, por el contrario, el valor de la brecha espectral es pequeño, probablemente indicará la presencia de puentes o puntos de articulación que al removerse causarán serias interrupciones en el sistema de suministro. La brecha espectral se calcula como la resta entre los dos valores propios más grandes de la matriz de adyacencia.

$$\lambda\Delta = \lambda_1(A) - \lambda_2(A)$$

Ecuación 15. Brecha espectral

- Intermediación (Betweenness Centrality) $\rightarrow C_b$ (Freeman, 1977)

La intermediación, o también llamada carga del nodo, es una medida de centralidad del nodo. Se calcula como una relación entre el número de caminos más cortos entre dos nodos que atraviesan cierto nodo sobre el número total de caminos más cortos entre estos dos puntos. En otras palabras, la carga del nodo k es la porción de caminos más cortos que van de un nodo i a un nodo j pasando por el nodo k . Esta métrica da una idea de la conectividad relativa y de la porción de veces que el nodo (o enlace) puede actuar como puente.

$$C_b(k) = \sum_{i \neq j \neq k} \frac{g_{ij}(k)}{g_{ij}}$$

Ecuación 16. Centralidad *Betweenness*

donde C_b es la intermediación del nodo k y $g_{ij}(k)$ es el número de caminos más cortos entre los nodos i y j que pasan por el nodo k , g_{ij} equivale al número total de caminos más cortos entre i y j .

- Dominancia del punto central (Central-point Dominance) $\rightarrow C_B$ (Freeman, 1977; Yazdani et al., 2011)

Mide la concentración de la topología de la red alrededor de punto más central. Puede considerarse como un cuantificador de la vulnerabilidad de la red ante fallas cerca al punto más central de la red. El cálculo de la dominancia del punto central depende del *betweenness* o la intermediación de los demás nodos de la red. El valor de la dominancia del punto central varía entre 0 (para redes regulares con el mismo número de conexiones en cada nodo) y 1 (para redes con topología de estrella).

$$C_B = \frac{1}{n-1} \sum_i (C_{b_{m\acute{a}x}} - C_{b_i})$$

Ecuación 17. Dominancia del punto central

donde $B_{m\acute{a}x}$ es la intermediación normalizada máxima de la red y B_i es la intermediación normalizada del nodo i . La intermediación se normaliza por el factor $\frac{n^2-3n+2}{2}$.

- Cercanía (Closeness) $\rightarrow C^C$ (Freeman, 1977)

Es el promedio de las distancias más cortas desde un nodo hacia todos los demás. Mide la centralidad como la importancia que tiene un vértice en esparcir la información a los otros nodos a través de las distancias más cortas.

$$C_i^C = \frac{1}{\sum_j d_{i,j}}$$

Ecuación 18. Closeness

donde C_i^C es la cercanía del nodo i y $d_{i,j}$ son las distancias de los caminos más cortos entre el resto de nodos de la red.

- Conectividad Algebraica (Algebraic Connectivity) $\rightarrow \lambda_2$ (Yazdani et al., 2011)

Refleja la conectividad del grafo en general. Así mismo, puede implementarse como métrica para cuantificar la robustez y la tolerancia a fallas de la red en términos de su conectividad. Se calcula como el segundo valor propio más pequeño de la matriz laplaciana del grafo. La matriz laplaciana se obtiene de restar la matriz del grado de los nodos con la matriz de adyacencia.

- Límite de eliminación de nodos aleatorios (Threshold for random removal of nodes) $\rightarrow f_c$ (Cohen, Erez, Ben-Avraham, & Havlin, 2000)

Esta métrica provee un valor teórico de la fracción crítica de nodos que deben ser retirados de la red para que esta pierda su propiedad de conectividad a gran escala (se da mediante la destrucción completa del grupo más grande en la red).

$$f_c = 1 - \frac{1}{\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1}$$

Ecuación 19. Límite eliminación nodos aleatorios

- Indicador de Modularidad (Modularity Indicator) $\rightarrow Q$ (Newman, 2004)

El indicador de modularidad cuantifica la mejor división de redes en comunidades. Se calcula como la diferencia máxima entre la fracción de enlaces que caen dentro de comunidades $\sum_i e_{ii}$ y el valor esperado de esta misma cantidad si los enlaces caen al azar sin tener en cuenta la estructura de comunidad $\sum_{ijk} e_{ij}e_{ki}$.

$$\max\left(\sum_i e_{ii} - \sum_{ijk} e_{ij}e_{ki}\right)$$

Ecuación 20. Indicador de Modularidad

En la Tabla 3-1 se presenta un resumen de las métricas presentadas anteriormente.

Tabla 3-1. Métricas implementadas en el análisis de RDAP (grafos sin peso y sin dirección)

| Métrica (Metric) | Ecuación | Cuantifica | Referencia |
|--|--|---|--|
| Densidad de enlaces (Link Density) | $q = \frac{2m}{n(n-1)}$ | Estructura Conectividad Redundancia | Yazdani et al., 2011 |
| Grado promedio del nodo (Average Node Degree) | $k = \frac{2m}{n}$ | Estructura Robustez Conectividad | Yazdani et al., 2011– Newman 2010 |
| Grado del nodo vecino (Neighborhood Nodal Degree) | $k_n(i) = \sum_{j \in N(i)} A_{ij}k(j)$ | Estructura Conectividad | Giustolisi et al., 2017 |
| Índice Beta (Beta Index) | $\beta = \frac{m}{n}$ | Estructura | Kansky, 1963 |
| Heterogeneidad (Heterogeneity) | $\frac{1}{\bar{k}} \times \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2$ | Diversidad | Gao et al., 2016 |
| Coficiente de agrupación (Clustering coefficient) | $C_c = \frac{3N_{\Delta}}{N_3}$ | Redundancia (loops) | Yazdani and Jeffrey, 2011 – Wasserman and Faust, 1994 |
| Coficiente de enmallado (Meshedness Coefficient) | $R_m = \frac{m-n+1}{2n-5}$ * $m - n$ si hay mas de una fuente | Redundancia Robustez (loops) | Buhl et al., 2006 |
| Longitud promedio de los caminos (Average Path Length) | $l = \frac{1}{n(n-1)} \times \sum_{i,j=1}^n d_{i,j}$ | Robustez Eficiencia | Yazdani and Jeffrey, 2011 |
| Diametro (Diameter) | $d_T = \max(d_{i,j})$ | Eficiencia Robustez | Yazdani et al., 2011 |

| Métrica (Metric) | Ecuación | Cuantifica | Referencia |
|--|---|--------------------------|--|
| Eficiencia de la red (Network Efficiency) | $E = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j \in N, i \neq j} \frac{1}{d_{ij}}$ | Eficiencia | Boccaletti et al., 2006; Torres et al., 2017) |
| Factor de ruta/camino (Route Factor) | $g = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\epsilon_{s,i}}{\delta_{s,i}}$ | Eficiencia | Yazdani et al., 2011; Black W., 2003 |
| Densidad de los puentes (Density of Bridges) | $D_{br} = \frac{N_{br}}{m}$ | Robustez | Yazdani and Jeffrey, 2011; Paez and Fillion, 2017 |
| Densidad de puntos de articulación (Density of Articulation Points) | $D_{ap} = \frac{N_{ap}}{n}$ | Robustez | Yazdani et al., 2011 |
| Brecha espectral (Spectral Gap) | $\lambda\Delta = \lambda_1(A) - \lambda_2(A)$ | Robustez | Yazdani and Jeffrey, 2011 - Estrada, 2006 |
| Dominancia del punto central (Central Point Dominance) | $C_B = \frac{1}{n-1} \sum_i (B_{max} - B_i)$ B es la intermediación normalizada $B_i = \frac{2 C_b(i)}{n^2 - 3n + 2}$ | Robustez | Yazdani et al., 2011; Freeman, 1977 |
| Intermediación (Betweenness Centrality) | $C_b(k) = \sum_{i \neq j \neq k} \frac{g_{ij}(k)}{g_{ij}}$ | Centralidad del Nodo | Freeman, 1977 |
| Cercanía (Closeness) | $C_i^c = \frac{1}{\sum_j d_{i,j}}$ | Centralidad del Nodo | Freeman, 1977 |
| Conectividad algebraica (Algebraic Connectivity) | λ_2 | Conectividad Robustez | Yazdani and Jeffrey, 2011 |
| Límite de eliminación de nodos aleatorios Threshold for random removal of nodes | $f_c = 1 - \frac{1}{\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1}$ | Conectividad | Cohen et al., 2000 |
| Indicador de modularidad (Modularity indicator) | $\max(\sum_i e_{ii} - \sum_{ijk} e_{ij} e_{ki})$ | Modularidad | Newman, 2004 |

3.3.1.2 Métricas ajustadas para el estudio de RDAP

Como se mencionó anteriormente, es posible que la representación de una red a través de un grafo considere la dirección y el peso de sus enlaces. Muchos investigadores han concluido que esto puede mejorar el análisis de la red, no obstante, son pocos los que han incorporado esto en sus análisis. A continuación, se mostrarán dos métricas encontradas en la literatura que incorporan el peso o la dirección para el análisis de las RDAP.

- Grado entrópico ajustado por demanda (Demand- Adjusted Entropic Degree) $\rightarrow f_i$ (Yazdani & Jeffrey, 2012c)

El grado entrópico ajustado por demanda es una adaptación del grado entrópico g_i , una medida cuantitativa de la importancia del nodo (Bompard et al., 2009) presentada por Yazdani y Jeffrey (2012). Con esta medida es posible clasificar los nodos de la red de acuerdo con su centralidad y el impacto que generaría en el rendimiento de la red si llegase a fallar.

$$f_i = \frac{g_i}{2} \left(1 + \frac{d_i}{M_d} \right)$$

$M_d =$ demanda máxima

$d_i =$ demanda nominal

$$g_i = (1 - \sum_j p_{ij} \log(p_{ij})) \sum_j w_{ij}$$

Ecuación 21. Grado entrópico ajustado (demanda)

$$p_{ij} = w_{ij} / \sum_j w_{ij}$$

$$w_{ij} = \frac{\pi L_{ij} D_{ij}^2}{4}$$

donde L_{ij} y D_{ij} hacen referencia a

la longitud y el diámetro de la tubería, respectivamente.

Como se puede observar, el grado entrópico ajustado por demanda tienen cuenta características de la red (demandas) y utiliza como peso el volumen de cada tubería. Esto permite una mejor clasificación de la importancia de los nodos de la red.

- Intermediación ajustada (Tailored edge betweenness) $\rightarrow B_e$ (Giustolisi, Ridolfi, & Simone, 2019)

La intermediación ajustada propuesta por Giustolisi et al., es un ajuste de la métrica de centralidad por intermediación (betweenness). Este ajuste tiene en cuenta la centralidad de los enlaces (en vez de los nodos), el tipo de nodo (clasificación de nodos) y la implementación de peso y dirección en el grafo.

$$B_e(k) = \sum_{i \neq j \neq k} \frac{h_{ij}(k)}{h_{ij}}$$

Ecuación 22. Intermediación ajustada (*Tailored Edge Betweenness*)

donde $B_e(k)$ es la intermediación ajustada del enlace k , $h_{ij}(k)$ es el número de caminos más cortos entre i y j que atraviesan el enlace k y h_{ij} es el número de caminos más cortos entre i y j .

3.3.2. Branch Index y sistema de clasificación

Según su topología, una RDAP se puede clasificar como una red ramificada (branch) o como una red enmallada (grid) y debido a que ninguno de los indicadores propuestos por la teoría de grafos logra caracterizar la red en las dos características mencionadas anteriormente, Hwang & Lansey (2017) plantearon el “Branch Index (BI)”.

$$BI = \frac{e_b}{e_r + e_b}$$

Ecuación 23. Branch Index

Donde e_r y e_b equivalen al número de enlaces de la red reducida y el número de enlaces ramificados, respectivamente. La red reducida se obtiene mediante la implementación del “node-reduction algorithm” creado por Hwang & Lansey. En términos generales, el algoritmo elimina los nodos y tuberías no esenciales para la clasificación topológica de la red.

Si se relaciona el BI con la red reducida, en especial con el coeficiente de enmallado de la red reducida y el diámetro promedio de la red (ponderado por la longitud de las tuberías), es posible realizar una clasificación topológica de las RDAP. A continuación, se muestra el diagrama de clasificación propuesto por Hwang & Lansey (2017) para la clasificación topológica y funcional de RDAP.

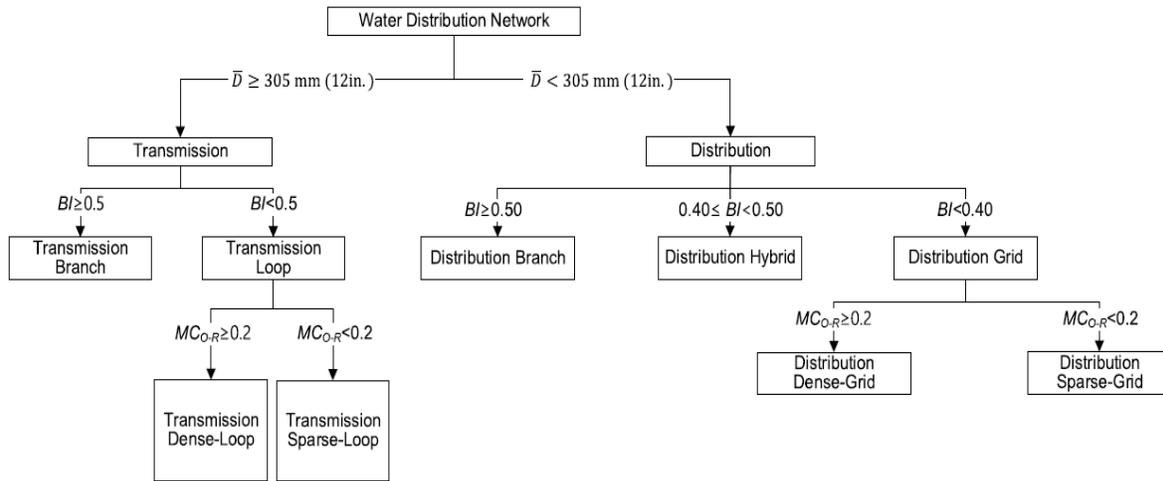


Figura 3-17. Diagrama de clasificación de RDAP (Hwang & Lansey, 2017)

El cálculo del diámetro promedio se realiza de la siguiente forma:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{k=1}^m D_k L_k}{\sum_{k=1}^m L_k}$$

Ecuación 24. Diámetro promedio de red (ponderado por la longitud)

donde D_k = diámetro del tubo k ; L_k = longitud del tubo k ; and m = número de tubos en la RDAP. Si \bar{D} es igual o mayor a 305 mm (12 in), se puede decir que es un sistema de transmisión (red matriz) mientras que si \bar{D} es menor a 305 mm (12 in), se habla de un sistema de distribución. El MC_{O-R} hace referencia al coeficiente de enmallado de la red reducida.

3.4. Propiedades geométricas de componentes de la red

Como complemento al estudio de la topología de la red, se han estudiado las propiedades geométricas mediante la evaluación de índices que tienen en cuenta características propias de la RDAP (como diámetro, longitud de las tuberías, ubicación espacial de los nodos, entre otros). Así mismo, es posible evaluar algunos atributos geométricos que miden centroides en la red como los descritos por Moreno et al. (2018). Estas propiedades geométricas se separan de la teoría de grafos ya que, son propiedades propias de las RDAP.

- Características básicas

Las características básicas son aquellas que se pueden calcular sin realizar simulaciones hidráulicas de la red. Estas características están asociadas a los componentes que son variables de decisión y restricciones en el problema de optimización de RDAP. Sirven para clasificar las redes en términos de masa transportada, tamaño e importancia. En general, están asociadas con las características de las tuberías y los nodos. Como, por ejemplo: la

distribución de diámetros de las tuberías; longitud promedio de las tuberías; demandas en los nodos, entre otras.

- Centroides

Moreno et al. (2018) estudiaron la relación entre la densidad poblacional y la topología en RDAP. Como parte de su estudio, presentaron diferentes indicadores para evaluar atributos geométricos de la red. Estos indicadores fueron calculados utilizando las coordenadas X y Y de los nodos y los valores obtenidos fueron llamados centroides. Estos centroides fueron calculados para el volumen, la potencia, la potencia específica y el diámetro. Se debe mencionar que para realizar el cálculo de estos índices se debe realizar una simulación hidráulica.

$$C_V = \frac{\sum_{i=1}^{n_t} V_i * Dist_i}{V_T}$$

Ecuación 25. Centroide de Volumen RDAP

$$C_{P_s} = \frac{\sum_{i=1}^{n_t} P_{si} * Dist_i}{P_{ST}}$$

$$P_{si} = q_i(h_{i,ini} - h_{i,fin})$$

Ecuación 26. Centroide de Potencia Específica RDAP

$$C_d = \frac{\sum_{i=1}^{n_t} d_i * Dist_i}{\sum_{i=1}^{n_t} d_i}$$

Ecuación 27. Centroide de Diámetro RDAP

$$C_P = \frac{\sum_{i=1}^{n_n} Q_D * h_i * Dist_i}{\sum_{i=1}^{n_n} Q_D * h_i}$$

Ecuación 28. Centroide de Potencia RDAP

donde V_i es el volumen de la tubería i ; V_T es el volumen total; P_{si} es la potencia específica de la tubería i ; q_i es el caudal en la tubería i ; $h_{i,ini}$, $h_{i,fin}$ son las alturas piezométricas en el nodo inicial y el nodo final de la tubería i ; P_{ST} es la potencia específica total; d_i es el diámetro de la tubería i ; Q_D es el caudal demandado en el nodo i ; h_i es la altura piezométrica del nodo i , n_t es el número de tuberías y n_n es el número de nodos de demanda. En la ecuación de centroide de potencia, la distancia $Dist_i$ se calcula con las coordenadas X y Y de los nodos, para el resto de las ecuaciones:

$$Dist_{(x_i)} = \frac{|C_{x_{ini}} - C_{x_{fin}}|}{2} + \min(C_{x_{ini}}, C_{x_{fin}})$$

Ecuación 29. Cálculo de distancias centroides de red

$$Dist_{(y_i)} = \frac{|C_{y_{ini}} - C_{y_{fin}}|}{2} + \min(C_{y_{ini}}, C_{y_{fin}})$$

donde $C_{x_{ini}}$, $C_{x_{fin}}$, $C_{y_{ini}}$ y $C_{y_{fin}}$ son las coordenadas X y Y de los nodos iniciales y finales de la tubería i .

4. ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE RDAP

Teniendo en cuenta la recopilación bibliográfica hecha sobre la optimización y el estudio de la geometría de RDAP, es posible concluir:

- La optimización de RDAP abarca una gran variedad de problemas, todos descritos previamente. De estos, en el que más se ha avanzado es en la optimización de los componentes de la red, en especial del diámetro de sus tuberías. Así mismo, podría considerarse como el problema más simple de tratar para comenzar a abrir un camino y entender la geometría de los diseños optimizados de RDAP. Por estas razones, la realización del análisis geométrico de RDAP diseñadas óptimamente se debe enfocar principalmente en la geometría de los diseños optimizados en costos de sus tuberías.
- La gran mayoría de estudios en RDAP que implementan teoría de redes complejas ha supuesto grafos sin peso, por lo cual, no han incluido características geométricas de los componentes de la red en el análisis realizado. (Yazdani & Jeffrey, 2012c), (Hwang & Lansey, 2017) y (Giustolisi et al., 2019) han realizado esfuerzos para considerar características de RDAP en el cálculo de métricas topológicas, más sin embargo se han concentrado en métricas locales.
- Las métricas del mundo de la teoría de grafos son de alta eficiencia computacional. Por lo cual, la adaptación de estas para el análisis de RDAP puede traer consigo grandes beneficios en el análisis de redes muy extensas.
- Otros componentes que permiten analizar la topología de la red, como los centroides de la red, pueden ser un complemento importante para el análisis geométrico de las RDAP.
- Con el fin de poder comparar los diseños de RDAP optimizados en costos vs. los diseños no optimizados, es necesario proponer nuevos índices que midan características hidráulicas del sistema, así como el diámetro de sus tuberías optimizadas.

Con estas conclusiones, se plantea una metodología para realizar el análisis geométrico de RDAP diseñadas óptimamente, la cual consiste en los siguientes pasos:

1. Selección de índices para el análisis de RDAP (identificación de índices más adecuados para la caracterización geométrica de RDAP)
 - a. Evaluación de índices en RDAP
 - b. Caracterización de RDAP
2. Ajuste de índices seleccionados para análisis geométrico de RDAP
 - a. Índices de teoría de grafos ajustados a características hidráulicas y geométricas de la red.
 - b. Evaluación de índices
3. Análisis geométrico de RDAP diseñadas óptimamente

- a. Evaluación de índices en diseños no optimizados
- b. Optimización de redes
- c. Evaluación de índices en diseños optimizados

En este capítulo se muestra el paso a paso seguido para determinar lo expuesto en los pasos anteriormente descritos debido a que no existe una metodología establecida para realizar un análisis geométrico de las redes de distribución de agua potable. En el capítulo siguiente (capítulo 5) se establece la metodología de optimización y posteriormente se analizan una serie de redes (casos de estudio).

4.1. Selección de índices para el análisis de RDAP

Teniendo en cuenta que existe gran cantidad de índices de CNT, es necesario realizar una selección de cuáles de estos son más adecuados para el análisis de RDAP. Para esto, se escogen diferentes RDAP y se evalúan los índices de CNT para grafos simples (sin peso y sin dirección) con el fin de observar el comportamiento general de los índices (establecer relaciones). Es importante mencionar que únicamente se trabajó con índices globales, las métricas de CNT para la cuantificación de cada elemento (métricas locales), no son tenidas en cuenta para la caracterización general de la red. Así mismo, se tuvo en cuenta que, basado en la revisión de la literatura mencionada en la sección 3.3., existen 6 características fundamentales para el análisis topológico de RDAP, estas características son: conectividad, eficiencia, centralidad, diversidad, robustez y modularidad.

4.1.1. Herramientas computacionales

Se desarrolló una herramienta en con el lenguaje de programación R para calcular los indicadores de teoría de grafos. Este lenguaje de programación cuenta con un paquete denominado Igraph (Csardi G., 2016) el cual permite calcular la mayoría de los indicadores de teoría de grafos a partir de la información de la conectividad de la red. Así mismo, también cuenta con una librería denominada epanet2toolkit que permite la conexión del lenguaje R con el software hidráulico de EPANET2 (Rossman, 1994), lo que permite que la información de la red se pueda obtener a través de la lectura del archivo .inp (*input file* - archivo de texto) de cada red y que desde R se puedan realizar simulaciones hidráulicas.

4.1.2. Evaluación de índices en RDAP

Para el cálculo inicial de los índices se escogieron 42 RDAP (41 sistemas reales y 1 teórico – Net3) de diferentes características. En Tabla 4-1 es posible se presentan las características generales de las redes estudiadas.

Tabla 4-1. Características generales de RDAP - caracterización topológica

| Red | Tuberías | Nodos | Bombas | Tanques | Embalses | Válvulas | Demanda (LPS) |
|---------------------------|----------|-------|--------|---------|----------|----------|---------------|
| KY1 | 984 | 856 | 1 | 2 | 1 | 0 | 87.27 |
| KY2 | 1124 | 811 | 1 | 3 | 1 | 0 | 91.55 |
| KY3 | 366 | 269 | 5 | 3 | 3 | 0 | 87.93 |
| KY4 | 1156 | 959 | 2 | 4 | 1 | 0 | 65.65 |
| KY5 | 496 | 420 | 9 | 3 | 4 | 0 | 99.37 |
| KY6 | 644 | 543 | 2 | 3 | 2 | 1 | 71.80 |
| KY7 | 603 | 481 | 1 | 3 | 1 | 0 | 67.00 |
| KY8 | 1614 | 1325 | 4 | 5 | 2 | 0 | 107.97 |
| KY9 | 1270 | 1242 | 17 | 15 | 4 | 56 | 58.74 |
| KY10 | 1043 | 920 | 13 | 15 | 2 | 5 | 94.72 |
| KY11 | 846 | 802 | 21 | 28 | 1 | 15 | 76.54 |
| KY12 | 2426 | 2347 | 15 | 7 | 1 | 22 | 60.04 |
| KY13 | 940 | 778 | 4 | 5 | 2 | 0 | 103.33 |
| KY14 | 548 | 377 | 5 | 3 | 4 | 0 | 45.66 |
| KY15 | 662 | 659 | 13 | 8 | 2 | 28 | 64.72 |
| Net3 | 117 | 92 | 2 | 3 | 2 | 0 | 192.56 |
| Richmond | 949 | 865 | 7 | 6 | 1 | 1 | 15.12 |
| Sector 13 (BOG) | 7616 | 6692 | 0 | 0 | 3 | 8 | 426.36 |
| Sector 25 (BOG) | 531 | 609 | 0 | 0 | 1 | 109 | 19.85 |
| Sector 35 (BOG) | 1291 | 1191 | 0 | 0 | 1 | 0 | 53.27 |
| Zona 2 Sector 10 (BOG) | 4193 | 4673 | 0 | 0 | 2 | 958 | 265.40 |
| Zona 2 Sector 14-33 (BOG) | 2003 | 2231 | 0 | 0 | 5 | 360 | 126.42 |
| Zona 2 Sector 16 (BOG) | 3748 | 4116 | 0 | 0 | 1 | 724 | 178.27 |
| Zona 2 Sector 18 (BOG) | 2022 | 2272 | 0 | 0 | 1 | 454 | 128.40 |
| Sector 8-1 (BOG) | 754 | 642 | 0 | 0 | 2 | 0 | 18.36 |
| Sector 8-2 (BOG) | 688 | 593 | 0 | 0 | 1 | 0 | 38.21 |
| Sector 8-3 (BOG) | 976 | 845 | 0 | 0 | 1 | 0 | 52.90 |
| Sector 8-4 (BOG) | 432 | 378 | 0 | 0 | 1 | 0 | 28.80 |
| Sector Estadio (BGA) | 6977 | 6196 | 0 | 0 | 1 | 12 | 266.52 |
| Subsectores v3 (BGA) | 3051 | 2671 | 0 | 2 | 2 | 19 | 64.90 |
| Morro Alto (BGA) | 5621 | 4819 | 0 | 0 | 2 | 0 | 383.00 |
| Cabecera (BGA) | 982 | 906 | 0 | 0 | 3 | 2 | 79.75 |
| Cañaveral (BGA) | 3854 | 3411 | 0 | 1 | 2 | 0 | 322.52 |
| Trinidad Tejar (BGA) | 2479 | 2176 | 0 | 0 | 2 | 0 | 117.54 |
| Barrancabermeja | 6814 | 6469 | 5 | 1 | 1 | 801 | 589.79 |
| T9 - Belén (MAN) | 322 | 290 | 0 | 0 | 1 | 1 | 11.74 |
| Bolívar (VC) | 333 | 285 | 0 | 0 | 1 | 0 | 20.14 |
| Bugalagrande (VC) | 654 | 582 | 0 | 0 | 1 | 1 | 29.29 |
| Candelaria (VC) | 567 | 463 | 0 | 0 | 2 | 0 | 50.38 |
| Ginebra (VC) | 545 | 474 | 0 | 0 | 3 | 0 | 20.96 |
| Medellin | 736 | 865 | 0 | 0 | 3 | 0 | 7759.50 |
| Bogotá | 4478 | 4369 | 0 | 15 | 4 | 30 | 14956.45 |

Como se observa, las redes analizadas varían en todas sus características. De las 41 RDAP reales escogidas, 25 de ellas son redes colombianas y 16 redes son internacionales. En la Tabla 4-2 se muestran los diferentes rangos para nodos, tuberías, tanques, embalses, válvulas y demanda base.

Tabla 4-2. Rangos de características generales de las redes

| Elemento | Min | Max |
|---------------------|-----|-------|
| Nodos | 92 | 6692 |
| Tuberías | 117 | 7616 |
| Bombas | 0 | 21 |
| Tanques | 0 | 28 |
| Embalses | 0 | 5 |
| Válvulas | 0.0 | 958.0 |
| Demanda total (LPS) | 12 | 14956 |

Así mismo, en la Figura 4-1. Relación entre nodos y tuberías de las redes analizadas se presenta la variación del tamaño de las redes analizadas en términos de nodos y tuberías (links). Además, esta imagen segrega las redes entre las colombianas y las internacionales.

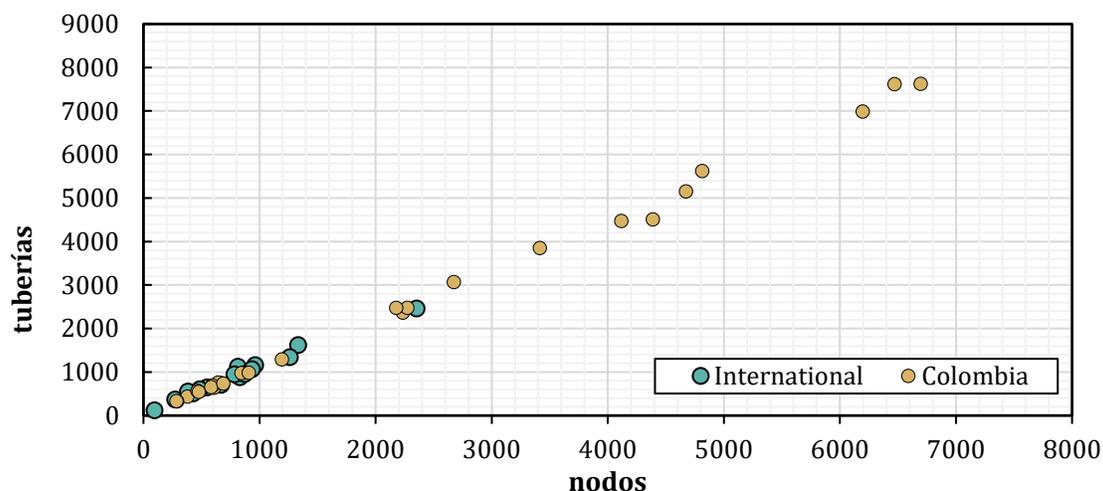


Figura 4-1. Relación entre nodos y tuberías de las redes analizadas

4.1.2.1 Branch Index y sistema de clasificación

Una vez escogidas las redes, es posible realizar el cálculo de las métricas de teoría de grafos. En primer lugar, se procede a clasificar estas redes con base en el esquema de clasificación de Hwang y Lansey (2017), mencionado previamente. La Tabla 4-3. Cálculo de BI y sistema de clasificación presenta el diámetro promedio ponderado por la longitud \bar{D} (tuberías), el *Branch Index* y la clasificación general de la red.

Tabla 4-3. Cálculo de BI y sistema de clasificación

| Red | D (mm) | BI | Clasificación |
|---------------------------|--------|------|-------------------------------|
| KY1 | 203.18 | 0.39 | Distribution Sparse-Grid(DSG) |
| KY2 | 145.10 | 0.19 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| KY3 | 242.01 | 0.15 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| KY4 | 178.36 | 0.31 | Distribution Sparse-Grid(DSG) |
| KY5 | 219.39 | 0.36 | Distribution Sparse-Grid(DSG) |
| KY6 | 200.73 | 0.36 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| KY7 | 195.81 | 0.32 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| KY8 | 213.27 | 0.32 | Distribution Sparse-Grid(DSG) |
| KY9 | 120.53 | 0.61 | Distribution Branch (DB) |
| KY10 | 143.19 | 0.49 | Distribution Hybrid (DH) |
| KY11 | 146.92 | 0.66 | Distribution Branch (DB) |
| KY12 | 116.85 | 0.69 | Distribution Branch (DB) |
| KY13 | 216.21 | 0.39 | Distribution Sparse-Grid(DSG) |
| KY14 | 269.25 | 0.15 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| KY15 | 136.50 | 0.71 | Distribution Branch (DB) |
| Net3 | 454.05 | 0.25 | Transmission Dense-Loop(TDL) |
| Richmond | 113.20 | 0.44 | Distribution Hybrid (DH) |
| Sector 13 (BOG) | 144.34 | 0.28 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Sector 25 (BOG) | 123.16 | 0.62 | Distribution Branch (DB) |
| Sector 35 (BOG) | 123.27 | 0.50 | Distribution Hybrid (DH) |
| Zona 2 Sector 10 (BOG) | 138.94 | 0.37 | Distribution Sparse-Grid(DSG) |
| Zona 2 Sector 14-33 (BOG) | 159.07 | 0.57 | Distribution Branch (DB) |
| Zona 2 Sector 16 (BOG) | 185.05 | 0.38 | Distribution Sparse-Grid(DSG) |
| Zona 2 Sector 18 (BOG) | 178.76 | 0.37 | Distribution Sparse-Grid(DSG) |
| Sector 8-1 (BOG) | 212.05 | 0.27 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Sector 8-2 (BOG) | 121.97 | 0.20 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Sector 8-3 (BOG) | 129.22 | 0.19 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Sector 8-4 (BOG) | 119.65 | 0.29 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Barrancabermeja | 87.60 | 0.37 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Sector Estadio (BGA) | 82.17 | 0.25 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Subsectores v3 (BGA) | 90.74 | 0.19 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Morro Alto (BGA) | 104.52 | 0.24 | Distribution Hybrid (DH) |
| Cabecera (BGA) | 104.88 | 0.45 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Cañaverál (BGA) | 93.35 | 0.35 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Trinidad Tejar (BGA) | 111.90 | 0.31 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| T9 - Belén (MAN) | 85.28 | 0.43 | Distribution Hybrid (DH) |
| Bolívar (VC) | 65.57 | 0.30 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Bugalagrande (VC) | 95.54 | 0.43 | Distribution Hybrid (DH) |
| Candelaria (VC) | 94.00 | 0.24 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Ginebra (VC) | 80.99 | 0.45 | Distribution Hybrid (DH) |
| Medellín | 611.97 | 0.58 | Transmission Branch (TB) |

| Red | D (mm) | BI | Clasificación |
|--------|--------|------|--------------------------|
| Bogotá | 965.15 | 0.70 | Transmission Branch (TB) |

Como se puede observar, dentro de las redes analizadas hay variedad de topologías (redes enmalladas, redes ramificadas y en circuitos) y en términos de función de la red, también se pueden encontrar redes de transmisión (redes matrices) y redes de distribución. La Figura 4-2 clasifica las redes de acuerdo con su topología y muestra la relación entre \bar{D} y el Branch Index.

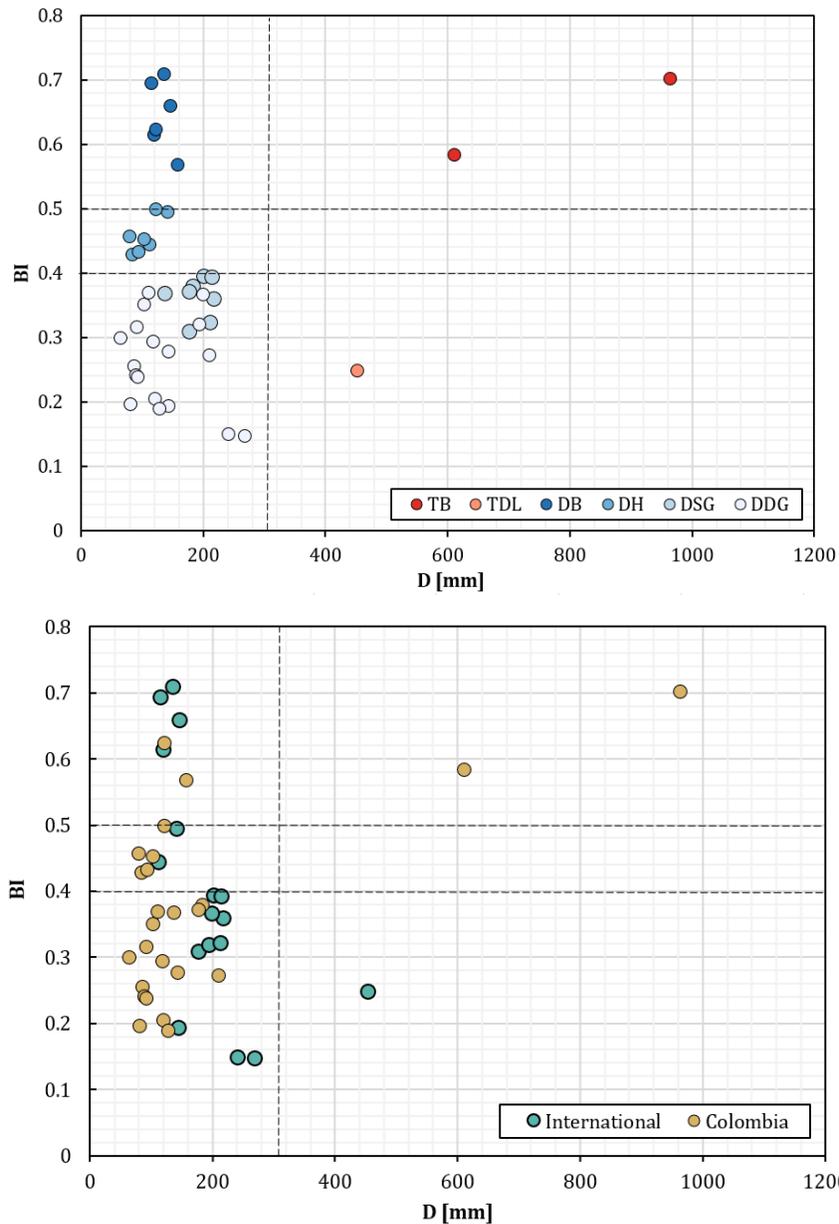


Figura 4-2. Relación entre el diámetro promedio y el BI

Las gráficas y los resultados del *BI* permiten identificar cuáles son los sistemas con mayor ramificación y densidad (grillas). Según los valores obtenidos, las redes KY15 junto con la red matriz de Bogotá son las redes más ramificadas, y las redes KY 3 y KY 14 las menos ramificadas (haciendo referencia a que su topología es en forma de grilla). Para comprobar esto, se analiza visualmente cada una de estas redes. La Figura 4-3 muestra la estructura de las redes KY 15, Bogotá, KY 3 y KY 14.

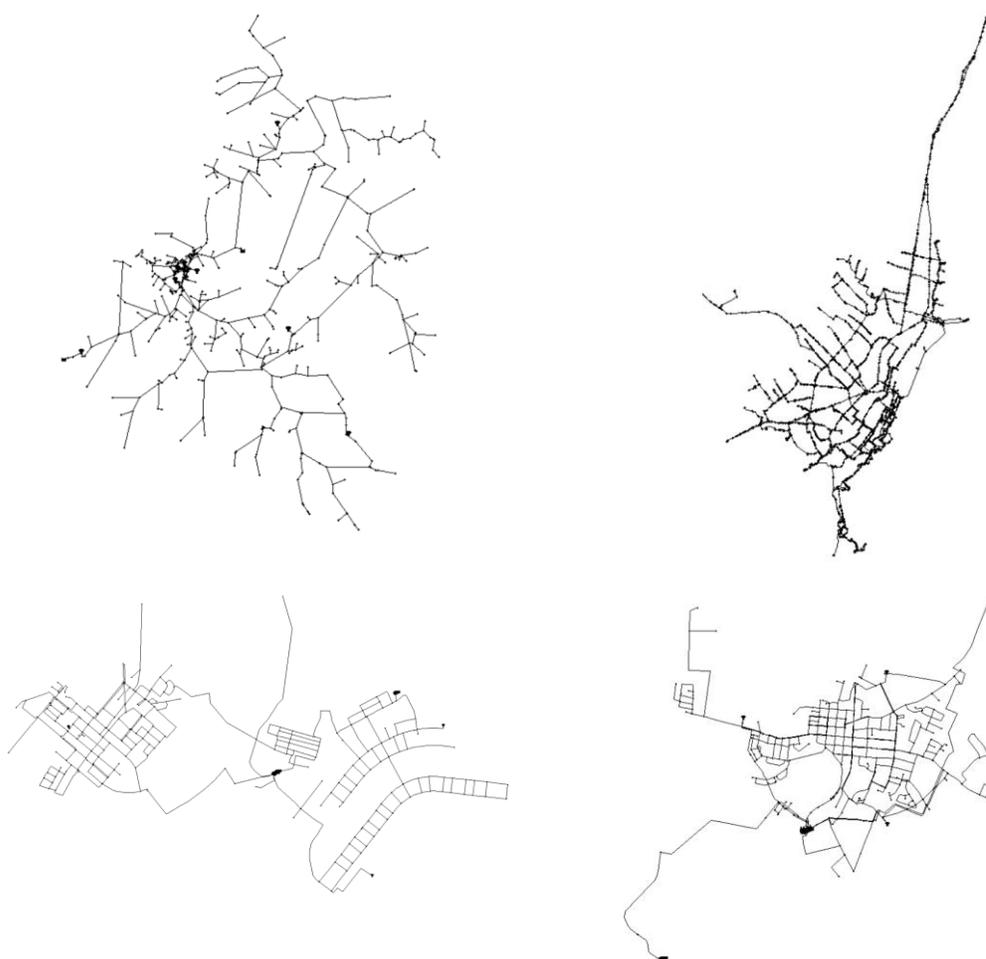


Figura 4-3. Topología de redes KY15, Bogotá, KY3 y KY14

En general, la implementación del esquema de clasificación propuesto por Hwang y Lansey muestran buenos resultados, acordes con la realidad de las RDAP, por lo cual, este (junto con sus métricas \bar{D} y *BI*) deben ser tenidos en cuenta para en análisis geométrico de las RDAP.

4.1.2.2 Cálculo de métricas de CNT

El cálculo de las métricas de CNT se realiza teniendo en cuenta que existen seis características fundamentales para el análisis topológico de las RDAP. Estas características son: (i) conectividad, (ii) eficiencia, (iii) centralidad, (iv) diversidad, (v) robustez y (vi) modularidad (Meng, Fu, Farmani, Sweetapple, & Butler, 2018). Con base en esto, se toman las siguientes métricas de CNT para el cálculo de las características fundamentales:

| Característica | Métrica | Definición |
|----------------|---|--|
| Conectividad | Grado promedio de nodos (Average node degree) | $k = \frac{2m}{n}$ |
| | Densidad de enlaces (Link density) | $q = \frac{2m}{n(n-1)}$ |
| | Coefficiente de enmallado (Meshedness coefficient) | $R_m = \frac{m-n+1}{2n-5}$ |
| | Conectividad algebraica (Algebraic connectivity) | λ_2 |
| | Coefficiente de agrupación (Clustering coefficient) | $C_c = \frac{3N_\Delta}{N_3}$ |
| Eficiencia | Longitud promedio de los caminos (Average path length) | $l = \frac{1}{n(n-1)} \times \sum_{i,j=1}^n d_{i,j}$ |
| | Diámetro (red) (Diameter (Net)) | $d_T = \max(d_{i,j})$ |
| | Eficiencia de red (Net Efficiency) | $E = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j \in N, i \neq j} \frac{1}{d_{ij}}$ |
| Centralidad | Dominancia del punto central (Central point dominance) | $C_B = \frac{1}{n-1} \sum_i (B_{max} - B_i)$ B es la intermediación normalizada $B_i = \frac{2 C_b(i)}{n^2 - 3n + 2}$ |
| Diversidad | Heterogeneidad (Heterogeneity) | $\frac{1}{\bar{k}} \times \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2$ |
| Robustez | Brecha espectral (Spectral gap) | $\lambda\Delta = \lambda_1(A) - \lambda_2(A)$ |
| Modularidad | Indicador de modularidad (Modularity indicator) | $\max(\sum_i e_{ii} - \sum_{ijk} e_{ij}e_{ki})$ |

Cada una de estas métricas se calcula para las redes estudiadas. Los resultados se presentan en la Tabla 2-1.

Tabla 4-4. Cálculo de métricas de CNT para redes analizadas

| Red | k | l | d_T | q | C_c | R_m | C_b | $\lambda\Delta$ | λ_2 | Het | E | Mod |
|---------------------------|------|--------|-------|--------|--------|-------|-------|-----------------|-------------|-------|------|------|
| KY1 | 2.29 | 24.84 | 69 | 0.0027 | 0.0092 | 0.07 | 0.25 | 0.26 | 0.000436 | 0.40 | 0.06 | 0.86 |
| KY2 | 2.74 | 17.36 | 42 | 0.0034 | 0.0420 | 0.19 | 0.16 | 0.07 | 0.001727 | 0.37 | 0.08 | 0.83 |
| KY3 | 2.70 | 15.29 | 42 | 0.0098 | 0.0447 | 0.18 | 0.39 | 0.14 | 0.001065 | 0.33 | 0.11 | 0.82 |
| KY4 | 2.36 | 23.53 | 61 | 0.0024 | 0.0488 | 0.10 | 0.34 | 0.02 | 0.000379 | 0.40 | 0.06 | 0.88 |
| KY5 | 2.36 | 15.44 | 41 | 0.0055 | 0.0235 | 0.09 | 0.27 | 0.18 | 0.001646 | 0.42 | 0.09 | 0.83 |
| KY6 | 2.34 | 17.16 | 41 | 0.0043 | 0.0213 | 0.09 | 0.23 | 0.04 | 0.001635 | 0.42 | 0.08 | 0.85 |
| KY7 | 2.48 | 15.46 | 44 | 0.0051 | 0.0241 | 0.12 | 0.26 | 0.15 | 0.001824 | 0.40 | 0.09 | 0.82 |
| KY8 | 2.42 | 25.88 | 69 | 0.0018 | 0.0328 | 0.11 | 0.24 | 0.10 | 0.000482 | 0.41 | 0.05 | 0.88 |
| KY9 | 2.11 | 40.62 | 96 | 0.0017 | 0.0271 | 0.03 | 0.48 | 0.04 | 0.000086 | 0.43 | 0.04 | 0.91 |
| KY10 | 2.27 | 29.44 | 89 | 0.0024 | 0.0154 | 0.07 | 0.28 | 0.04 | 0.000197 | 0.42 | 0.05 | 0.88 |
| KY11 | 2.12 | 42.52 | 112 | 0.0026 | 0.0336 | 0.03 | 0.57 | 0.05 | 0.000139 | 0.44 | 0.04 | 0.91 |
| KY12 | 2.08 | 84.96 | 216 | 0.0009 | 0.0176 | 0.02 | 0.54 | 0.13 | 0.000016 | 0.34 | 0.02 | 0.93 |
| KY13 | 2.38 | 19.84 | 53 | 0.0030 | 0.0569 | 0.10 | 0.32 | 0.09 | 0.000753 | 0.45 | 0.07 | 0.84 |
| KY14 | 2.83 | 12.88 | 37 | 0.0074 | 0.0401 | 0.22 | 0.23 | 0.14 | 0.002915 | 0.36 | 0.11 | 0.78 |
| KY15 | 2.10 | 26.01 | 76 | 0.0031 | 0.0030 | 0.03 | 0.39 | 0.07 | 0.000484 | 0.39 | 0.06 | 0.86 |
| Net3 | 2.45 | 10.26 | 30 | 0.0256 | 0.0429 | 0.12 | 0.27 | 0.14 | 0.003481 | 0.36 | 0.16 | 0.73 |
| Richmond | 2.19 | 51.44 | 135 | 0.0025 | 0.0402 | 0.05 | 0.56 | 0.07 | 0.000061 | 0.36 | 0.04 | 0.91 |
| Sector 13 (BOG) | 2.27 | 64.46 | 175 | 0.0003 | 0.0005 | 0.07 | 0.34 | 0.11 | 0.000016 | 0.29 | 0.02 | 0.94 |
| Sector 25 (BOG) | 2.10 | 32.90 | 86 | 0.0034 | 0.0037 | 0.03 | 0.52 | 0.02 | 0.000225 | 0.29 | 0.05 | 0.88 |
| Sector 35 (BOG) | 2.17 | 42.99 | 100 | 0.0018 | 0.0000 | 0.04 | 0.30 | 0.35 | 0.000123 | 0.33 | 0.04 | 0.91 |
| Zona 2 Sector 10 (BOG) | 2.20 | 54.08 | 146 | 0.0005 | 0.0004 | 0.05 | 0.32 | 0.14 | 0.000066 | 0.26 | 0.03 | 0.93 |
| Zona 2 Sector 14-33 (BOG) | 2.11 | 57.55 | 143 | 0.0009 | 0.0020 | 0.03 | 0.50 | 0.03 | 0.000037 | 0.29 | 0.03 | 0.92 |
| Zona 2 Sector 16 (BOG) | 2.17 | 55.17 | 154 | 0.0005 | 0.0020 | 0.04 | 0.36 | 0.03 | 0.000065 | 0.26 | 0.03 | 0.93 |
| Zona 2 Sector 18 (BOG) | 2.18 | 40.36 | 96 | 0.0010 | 0.0000 | 0.04 | 0.33 | 0.03 | 0.000137 | 0.25 | 0.03 | 0.90 |
| Sector 8-1 (BOG) | 2.34 | 27.54 | 70 | 0.0036 | 0.0026 | 0.09 | 0.37 | 0.01 | 0.000000 | 0.30 | 0.05 | 0.90 |
| Sector 8-2 (BOG) | 2.31 | 18.99 | 44 | 0.0039 | 0.0000 | 0.08 | 0.24 | 0.06 | 0.001154 | 0.29 | 0.07 | 0.85 |
| Sector 8-3 (BOG) | 2.31 | 23.32 | 58 | 0.0027 | 0.0021 | 0.08 | 0.23 | 0.13 | 0.000594 | 0.27 | 0.06 | 0.87 |
| Sector 8-4 (BOG) | 2.28 | 19.23 | 46 | 0.0060 | 0.0000 | 0.07 | 0.36 | 0.22 | 0.000618 | 0.32 | 0.08 | 0.80 |
| Barrancabermeja | 2.35 | 59.68 | 165 | 0.0004 | 0.0242 | 0.09 | 0.65 | 0.06 | 0.000014 | 0.39 | 0.02 | 0.94 |
| Sector Estadio (BGA) | 2.25 | 62.60 | 179 | 0.0004 | 0.0027 | 0.06 | 0.35 | 0.04 | 0.000045 | 0.28 | 0.02 | 0.93 |
| Subsectores v3 (BGA) | 2.29 | 53.55 | 130 | 0.0009 | 0.0067 | 0.07 | 0.39 | 0.16 | 0.000041 | 0.27 | 0.03 | 0.94 |
| Morro Alto (BGA) | 2.33 | 46.39 | 144 | 0.0005 | 0.0000 | 0.08 | 0.20 | 0.07 | 0.000090 | 0.31 | 0.03 | 0.92 |
| Cabecera (BGA) | 2.17 | 61.62 | 177 | 0.0024 | 0.0000 | 0.04 | 0.39 | 0.02 | 0.000045 | 0.30 | 0.04 | 0.89 |
| Cañaveral (BGA) | 2.26 | 55.33 | 150 | 0.0007 | 0.0005 | 0.06 | 0.48 | 0.04 | 0.000035 | 0.30 | 0.03 | 0.94 |
| Trinidad Tejar (BGA) | 2.28 | 56.12 | 155 | 0.0010 | 0.0008 | 0.07 | 0.34 | 0.06 | 0.000044 | 0.31 | 0.03 | 0.93 |
| T9 - Belén (MAN) | 2.19 | 21.03 | 61 | 0.0076 | 0.0195 | 0.06 | 0.38 | 0.05 | 0.000612 | 0.34 | 0.08 | 0.86 |
| Bolívar (VC) | 2.33 | 16.17 | 52 | 0.0082 | 0.0000 | 0.08 | 0.22 | 0.06 | 0.001563 | 0.37 | 0.10 | 0.79 |
| Bugalagrande (VC) | 2.25 | 24.69 | 69 | 0.0039 | 0.0000 | 0.06 | 0.37 | 0.10 | 0.000418 | 0.36 | 0.06 | 0.85 |
| Candelaria (VC) | 2.44 | 17.18 | 49 | 0.0053 | 0.0030 | 0.11 | 0.21 | 0.09 | 0.001452 | 0.37 | 0.09 | 0.82 |
| Ginebra (VC) | 2.29 | 20.28 | 57 | 0.0048 | 0.0066 | 0.07 | 0.27 | 0.18 | 0.000945 | 0.40 | 0.08 | 0.82 |
| Medellín | 2.14 | 33.04 | 113 | 0.0031 | 0.0032 | 0.04 | 0.24 | 0.06 | 0.000335 | 0.25 | 0.05 | 0.87 |
| Bogotá | 2.05 | 116.61 | 340 | 0.0005 | 0.0006 | 0.01 | 0.25 | 0.07 | 0.000028 | 0.20 | 0.01 | 0.95 |

Una vez calculadas las métricas en las RDAP, se realiza un análisis de correlación para determinar la independencia de cada una de estas. Este análisis se lleva a cabo calculando el coeficiente de correlación lineal de Pearson, el cual varía en -1 y +1. Entre más cercano sea este valor a sus extremos, indica una alta correlación negativa o positiva, respectivamente. Generalmente, valores de Pearson mayores a ± 0.8 , indican correlaciones fuertes y valores menores a ± 0.5 , indican correlaciones débiles. La Tabla 4-5 presenta los valores de coeficiente de correlación para las métricas calculadas.

Tabla 4-5. Coeficiente de correlación métricas CNT

| Métrica | k | l | d_T | q | C_c | R_m | C_b | $\lambda\Delta$ | λ_2 | Het | E | Mod |
|-----------------|-------------|--------------|--------------|--------------|-------|-------|-------|-----------------|--------------|-------|--------------|-------|
| k | 1.00 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| l | -0.57 | 1.00 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| d_T | -0.55 | 0.99 | 1.00 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| q | 0.41 | -0.55 | -0.53 | 1.00 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| C_c | 0.53 | -0.35 | -0.36 | 0.38 | 1.00 | - | - | - | - | - | - | - |
| R_m | 1.00 | -0.58 | -0.56 | 0.43 | 0.56 | 1.00 | - | - | - | - | - | - |
| C_b | -0.45 | 0.41 | 0.35 | -0.24 | 0.08 | -0.45 | 1.00 | - | - | - | - | - |
| $\lambda\Delta$ | 0.19 | -0.19 | -0.22 | 0.19 | 0.00 | 0.18 | -0.27 | 1.00 | - | - | - | - |
| λ_2 | 0.70 | -0.65 | -0.62 | 0.73 | 0.44 | 0.71 | -0.51 | 0.23 | 1.00 | - | - | - |
| Het | 0.30 | -0.55 | -0.55 | 0.23 | 0.62 | 0.32 | 0.02 | 0.13 | 0.35 | 1.00 | - | - |
| E | 0.67 | -0.86 | -0.83 | 0.93 | 0.39 | 0.48 | -0.47 | 0.23 | 0.87 | 0.48 | 1.00 | - |
| Mod | -0.59 | 0.82 | 0.78 | -0.82 | -0.36 | -0.60 | 0.49 | -0.27 | -0.88 | -0.42 | -0.97 | 1.00 |

Es posible observar que existe alta correlación entre diferentes variables. Para el caso del grado promedio de nodos, se muestra una correlación exacta con el coeficiente de enmallado, por lo cual el cálculo de ambos para definir la conectividad de la red es redundante. Así mismo, para el caso de la eficiencia, se muestra una alta relación con respecto a la longitud promedio de los caminos y el diámetro de la red. De las figuras 4-4 a la 4-6 se muestran las relaciones entre las métricas calculadas.

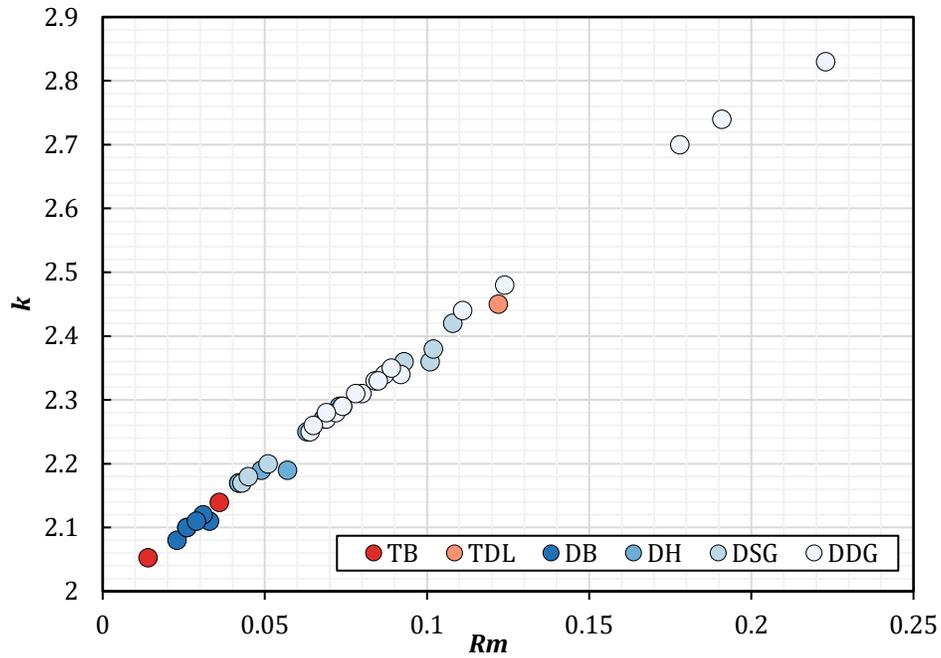


Figura 4-4. Relación entre k y R_m

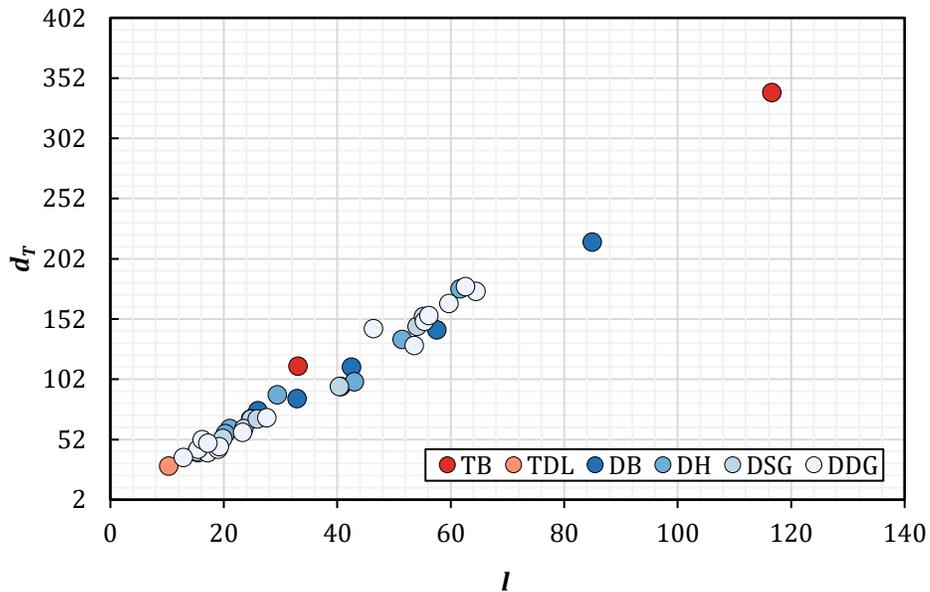


Figura 4-5. Relación entre diámetro de la red y longitud promedio de los caminos

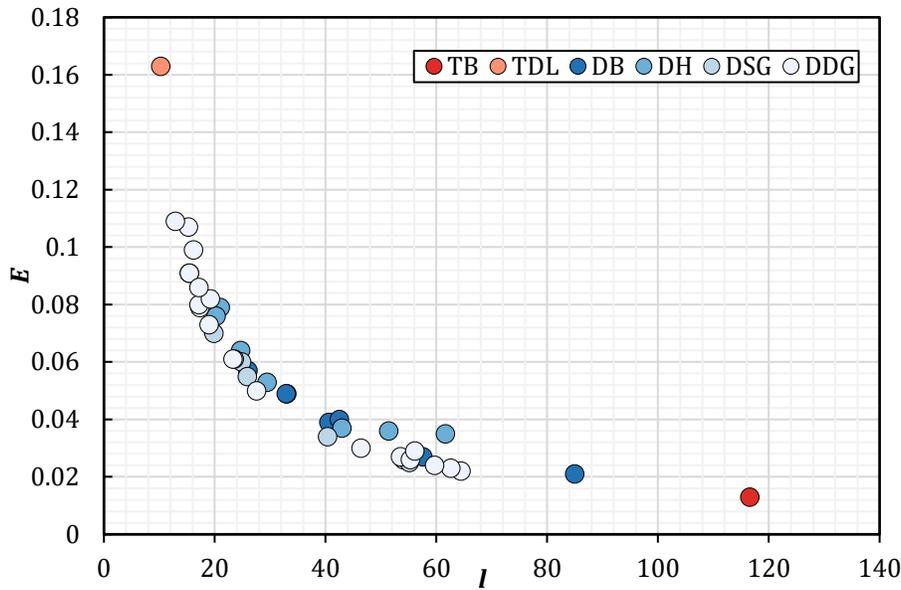


Figura 4-6. Relación entre la eficiencia de la red y longitud promedio de los caminos

Analizando las relaciones entre las métricas calculadas y los valores obtenidos, es posible determinar cuáles son las más adecuadas para la caracterización geométrica de las RDAP.

En términos de la conectividad, se determina que el grado promedio de los nodos k tiene una alta correlación con el coeficiente de enmallado, por lo cual, su cálculo es redundante. Además, los valores obtenidos de k para RDAP no varían mucho ya que estas redes son espacialmente restringidas (usualmente los valores varían entre 2 y 3). Con respecto al coeficiente de agrupación, es extraño encontrar estructuras triangulares dentro de las RDAP, es por esto por lo que la mayoría de RDAP tienen valores de C_c iguales o muy cercanos a 0. La eficiencia de la red muestra una alta correlación con la longitud promedio de los caminos y el diámetro de la red. Esto era de esperarse ya que la formulación matemática de las tres métricas es muy similar. Se analizará la eficiencia de las redes con la métrica de *Net efficiency* ya que es la única que da valores entre 0 y 1, lo que la hace de más fácil interpretación. Las características de centralidad, diversidad, robustez y modularidad se pueden calcular con las métricas establecidas inicialmente.

4.1.3. Caracterización geométrica de RDAP

La caracterización geométrica de las RDAP con base en métricas de CNT quedaría de la siguiente forma:

Tabla 4-6. Métricas para la caracterización geométrica de RDAP

| Característica | Métrica | |
|----------------|--------------------------|-------|
| Conectividad | Densidad de enlaces | q |
| | Coficiente de enmallado* | R_m |

| Característica | Métrica |
|----------------|-------------------------------------|
| | Conectividad algebraica λ_2 |
| Eficiencia | Net Efficiency E |
| Centralidad | Central point dominance C_b |
| Diversidad | Heterogeneity HET |
| Robustez | Spectral gap $\lambda\Delta$ |
| Modularidad | Modularity indicator MOD |

*El coeficiente de enmallado caracteriza mejor las RDAP si se hace con la red reducida mediante el node-reduction algorithm (Hwang y Lansey, 2017).

Adicionalmente, el esquema de clasificación de RDAP propuesto por Hwang y Lansey, junto con el cálculo de sus variables (BI , R_m y \bar{D}) también será utilizado para determinar el tipo de red según su función y su topología.

Con base en esto, es posible caracterizar las RDAP analizadas previamente. En las figuras 4-8 a 4-13 se presenta la clasificación de las RDAP, la cual se realiza mediante la ponderación del resultado mayor para cada métrica.

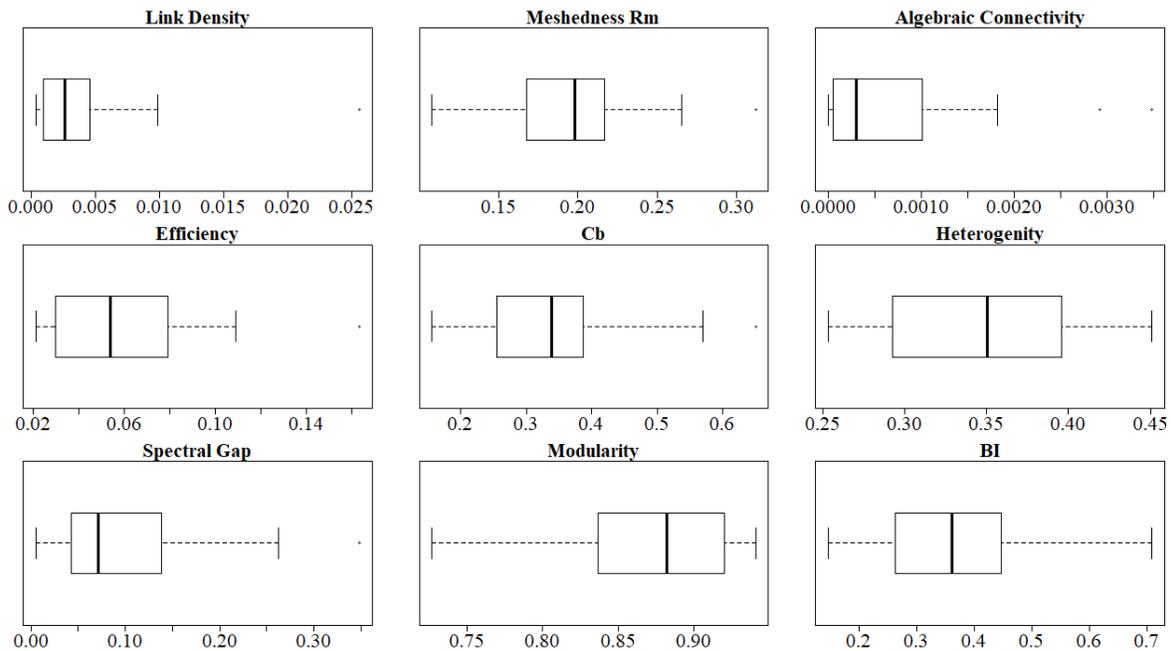


Figura 4-7. Resultados de cada una de las métricas para la caracterización

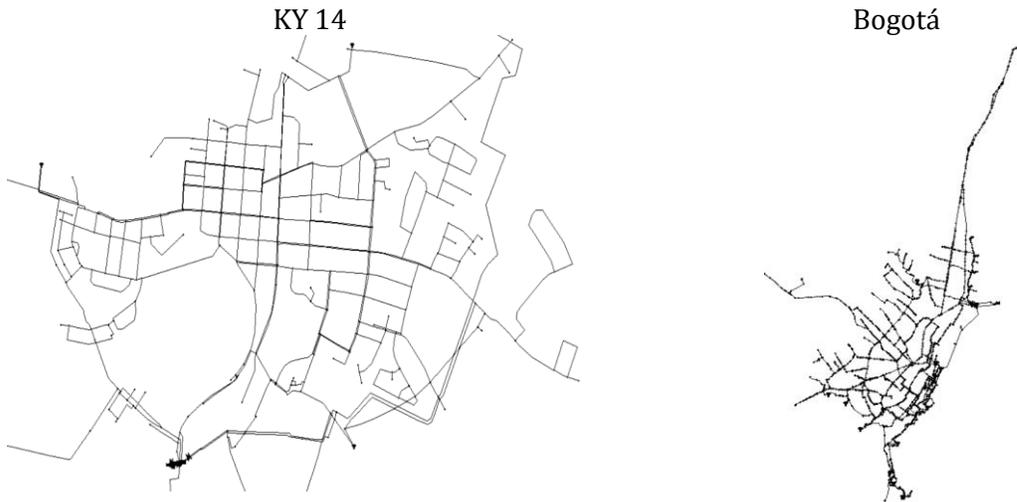
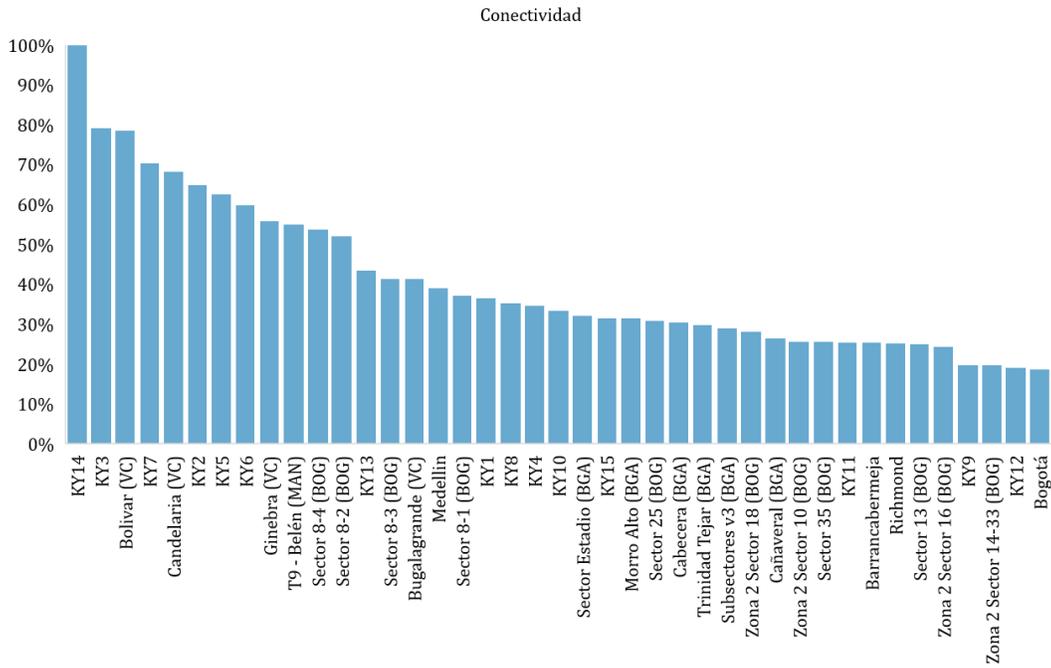


Figura 4-8. Clasificación de las RDAP (Conectividad)

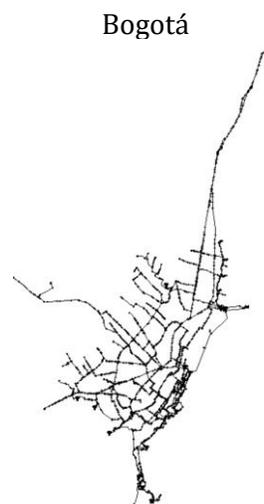
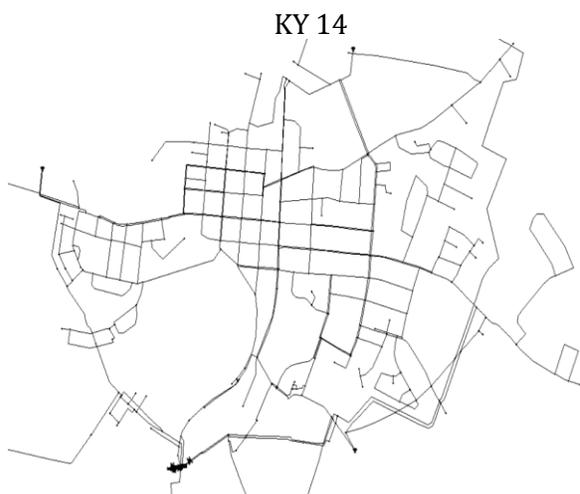
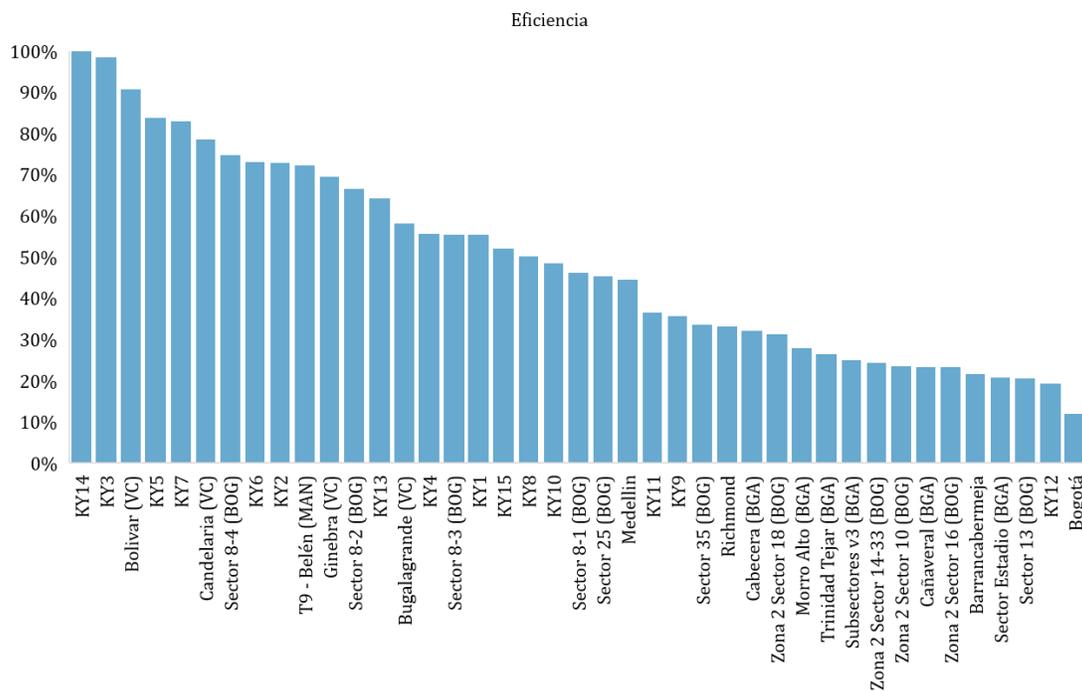


Figura 4-9. Clasificación de RDAP (Eficiencia)

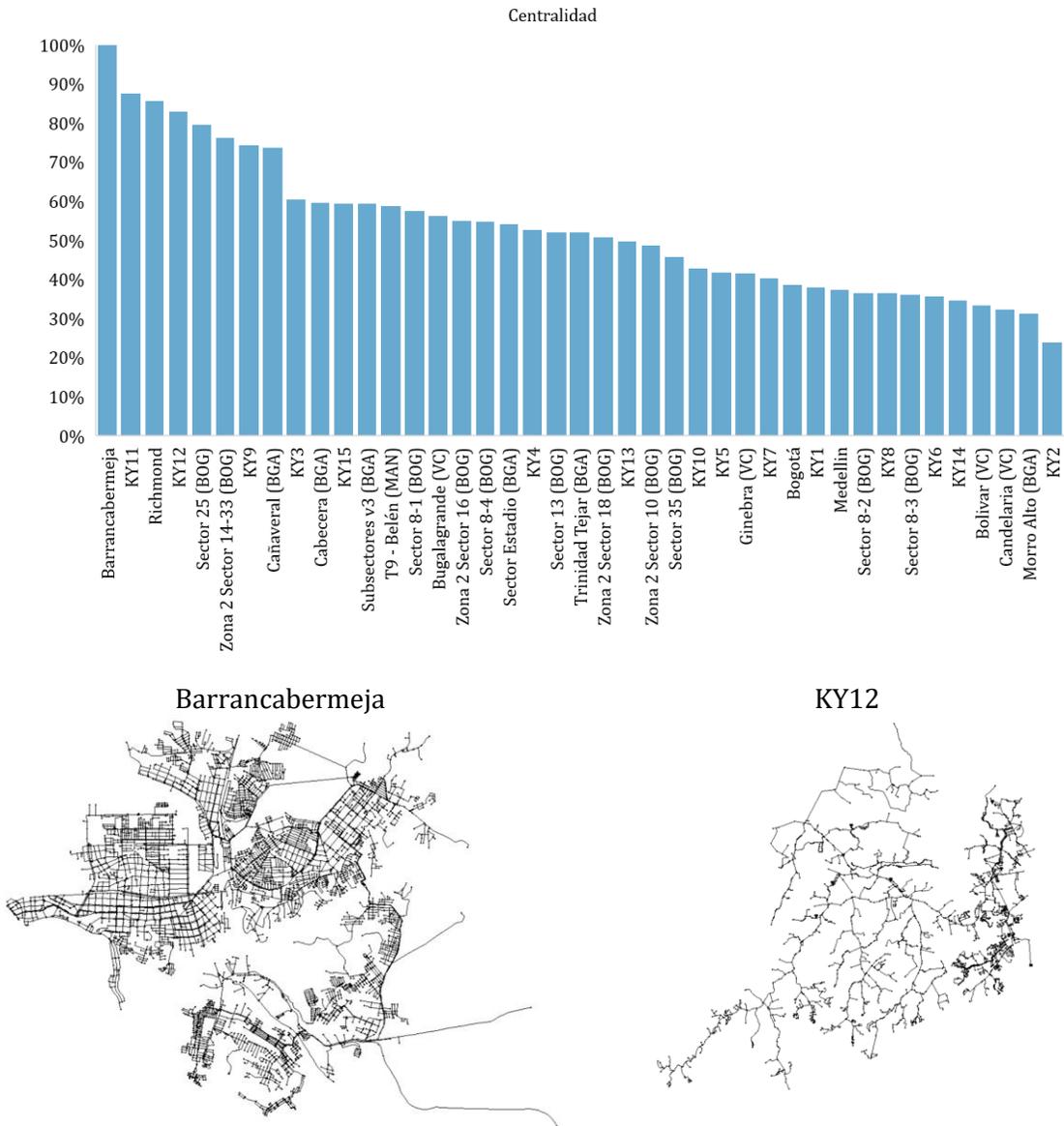


Figura 4-10. Clasificación de RDAP (Centralidad)

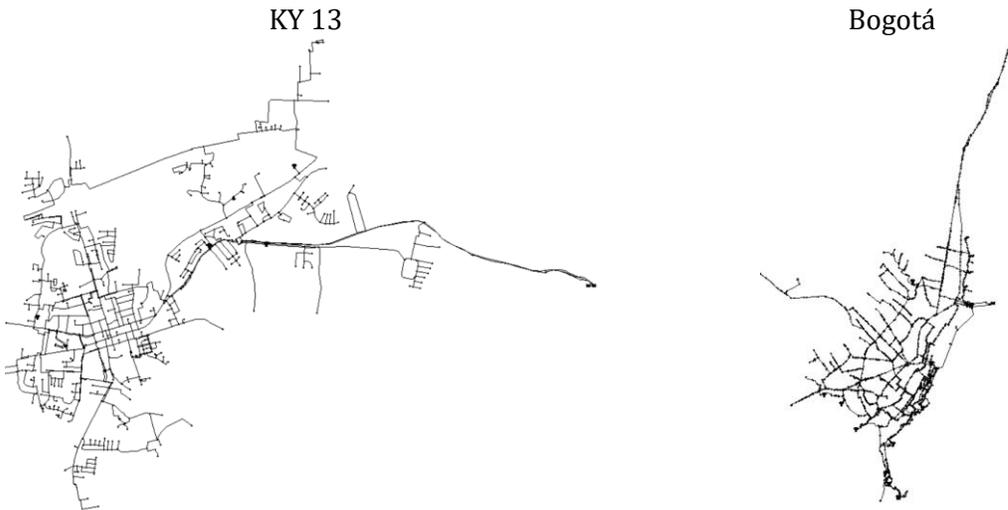
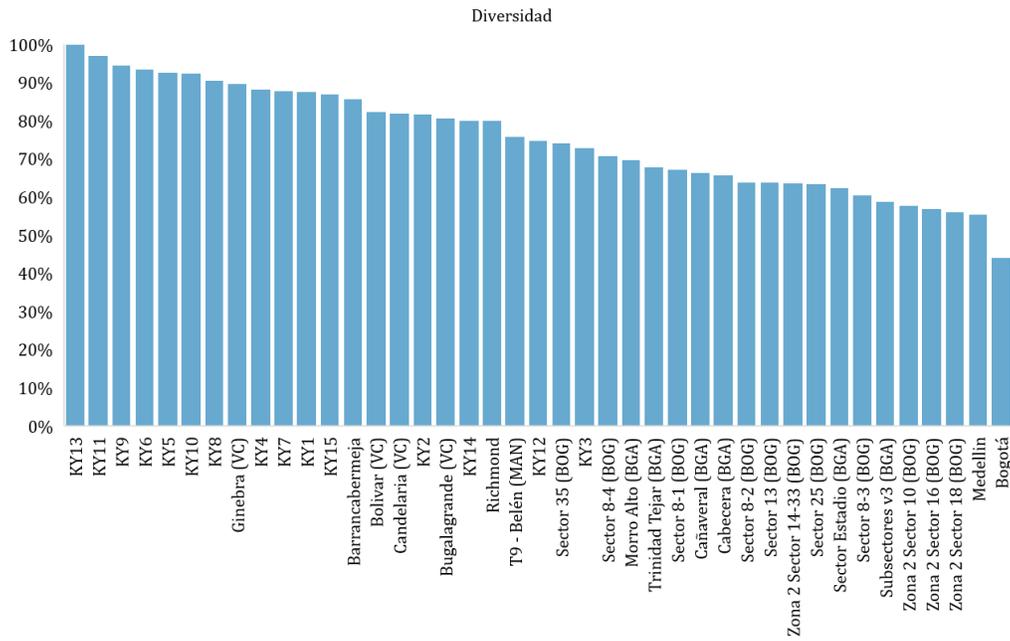
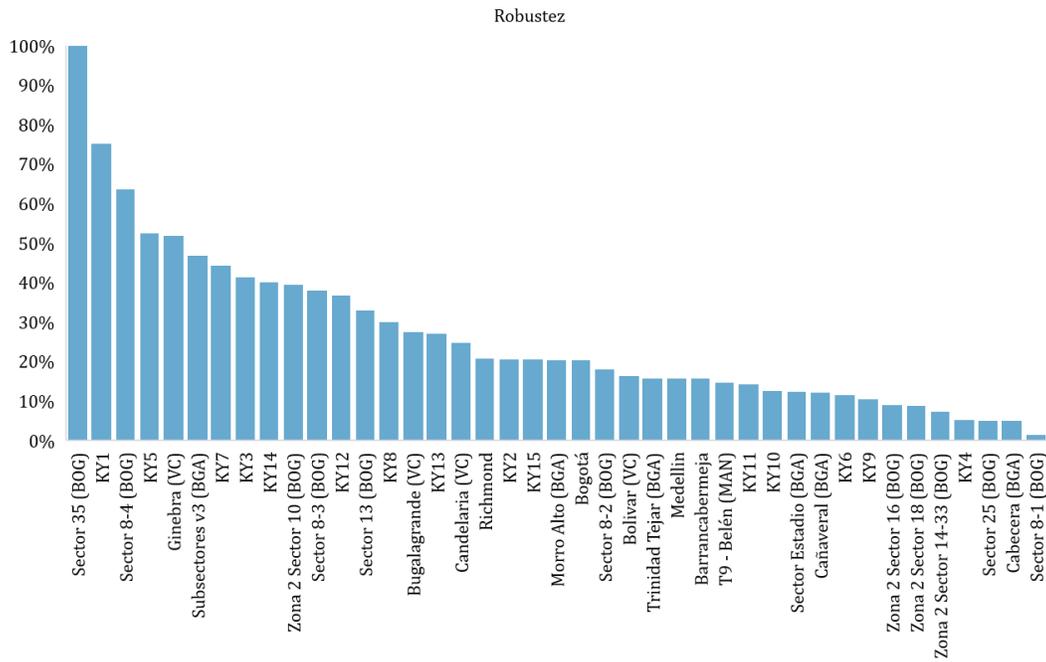


Figura 4-11. Clasificación RDAP (Diversidad)



Sector 35 (BOG)



Sector 8-1 (BOG)

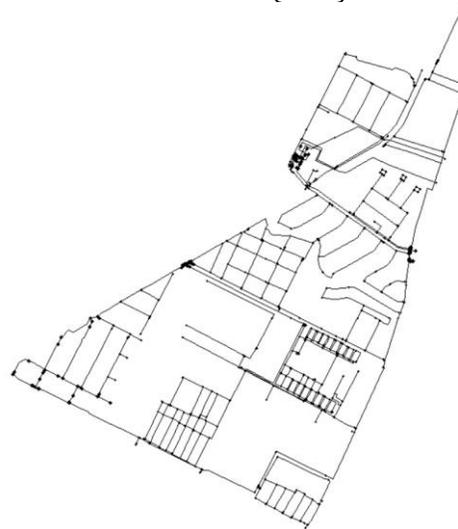


Figura 4-12. Clasificación de RDAP (Robustez)

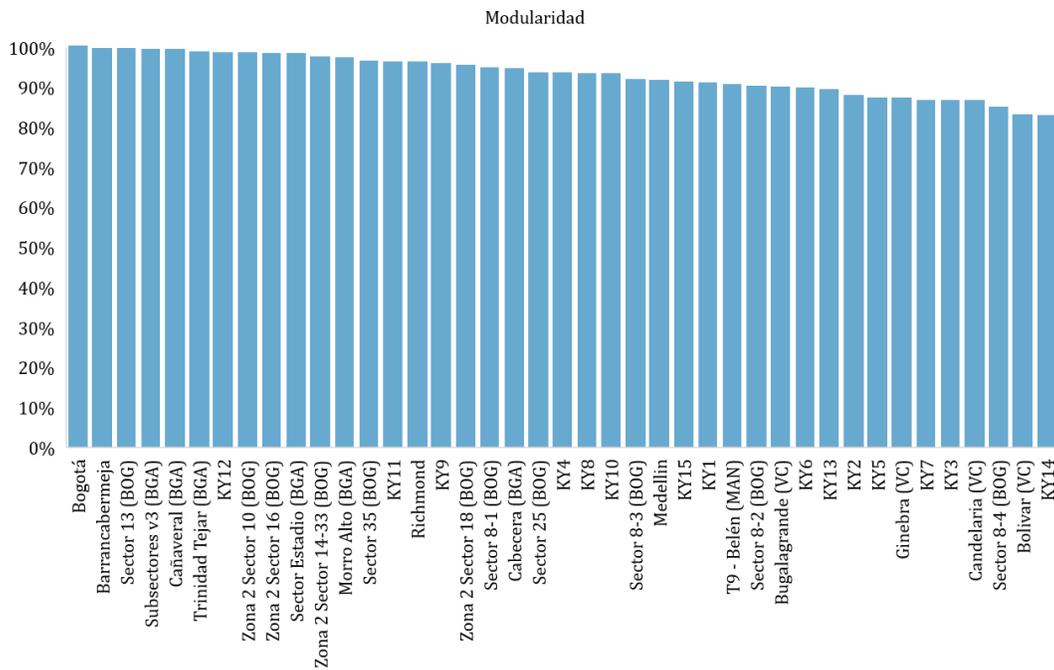


Figura 4-13. Clasificación RDAP (Modularidad)

4.2. Ajuste de índices de CNT seleccionados

Una vez seleccionados los índices de CNT para la caracterización de las RDAP, es necesario ajustarlos con elementos de las RDAP. Es importante recalcar que los índices previamente seleccionados se calculan con base a grafos planos y sin dirección, por lo cual únicamente están analizando el árbol (trazado) de las RDAP. La caracterización previa permite distinguir entre diferentes características de los trazados de las RDAP y sus resultados no deben confundirse con la caracterización hidráulica de la red. El único índice que se ha ajustado hasta el momento es el R_m ya que se está calculando después de que se realiza el node-reduction algorithm (eliminación de nodos no esenciales de la red).

Dicho lo anterior, se realiza un ajuste (adaptación) de las métricas mencionadas mediante la implementación de grafos con peso, en donde entra en consideración las características hidráulicas y geométricas (como, por ejemplo, el diámetro de las tuberías) específicas de las RDAP.

4.2.1. Índices de CNT con peso

Un grafo se puede representar como $G = G(V, E)$, en donde V es un conjunto de nodos con n elementos (tamaño del grafo) y E es el conjunto de links con m elementos (orden del grafo). En el caso más simple, los grafos son representaciones planas sin peso y sin dirección (como la caracterización hecha previamente) no obstante, es posible realizar la

representación matemática de una red teniendo en cuenta la dirección de los enlaces (aristas dirigidas) y la información en los nodos y tuberías (pesos).

Para la presente investigación, se propone el ajuste de las métricas mediante la implementación de pesos que tengan en cuenta características hidráulicas y geométricas de la red. Los pesos implementados son:

$$w_{diámetro} \rightarrow w_d = d_{i,j} = \frac{d_{i,j}}{\max d_{i,j}} \quad \text{Ecuación 30. Peso (diámetro)}$$

$$w_{vol} \rightarrow w_{vol} = V_{i,j} = \frac{V_{i,j}}{\max V_{i,j}} \quad \text{Ecuación 31. Peso (Volumen)}$$

$$V_{i,j} = \frac{\pi L_{i,j} d_{i,j}^2}{4}$$

$$w_{caudal} \rightarrow w_Q = Q_{i,j} = \frac{Q_{i,j}}{\max Q_{i,j}} \quad \text{Ecuación 32. Peso (Caudal)}$$

$$w_{pérdidas} \rightarrow w_h = h_{i,j} = \frac{h_{i,j}}{\text{Pérdida total de la red}} \quad \text{Ecuación 33. Peso (Pérdidas)}$$

$$h_{i,j} = r_{i,j} Q_{i,j}^2$$

$$r_{i,j} = \frac{8fL_{i,j}}{\pi^2 g d_{i,j}^5}$$

Donde $d_{i,j}$; equivale al diámetro de la tubería entre los nodos i y j ; $L_{i,j}$ es la longitud de la tubería entre los nodos i y j ; $Q_{i,j}$ es el caudal de la tubería entre los nodos i y j ; $V_{i,j}$ es el volumen de la tubería entre los nodos i y j y f es el factor de fricción (Darcy-Weisbach).

Los pesos de diámetro y volumen hacen referencia a características geométricas de las tuberías de la red y los pesos de caudal y pérdidas tienen en cuenta las características hidráulicas de la misma. Una vez establecido estos, se vuelve a realizar el cálculo de las métricas de CNT escogidas para la caracterización de las RDAP. En las figuras 4-14 a 4-18 se muestra el resultado de las métricas que varían por la inclusión de pesos para el análisis de RDAP.

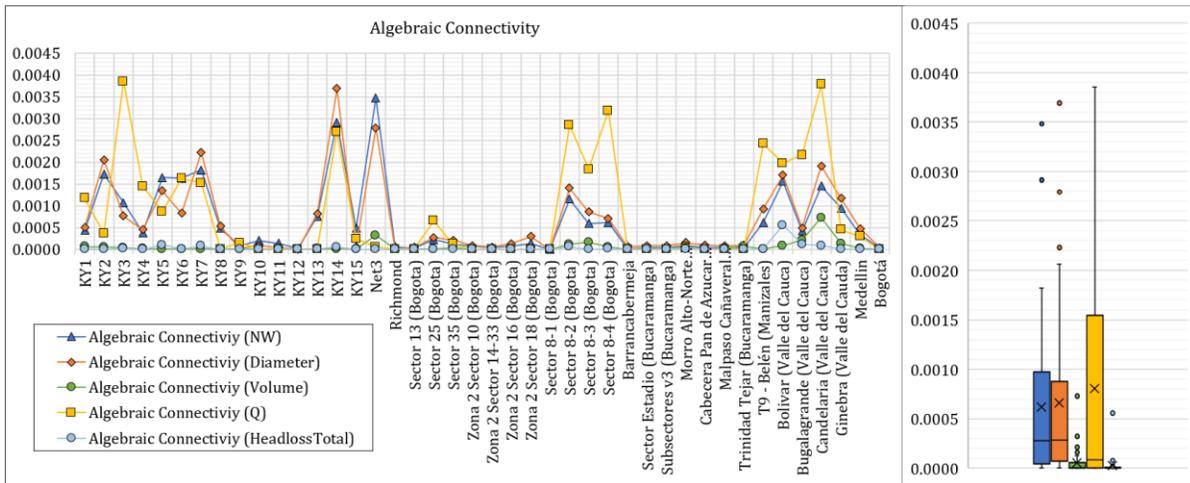


Figura 4-14. Conectividad algebraica con pesos

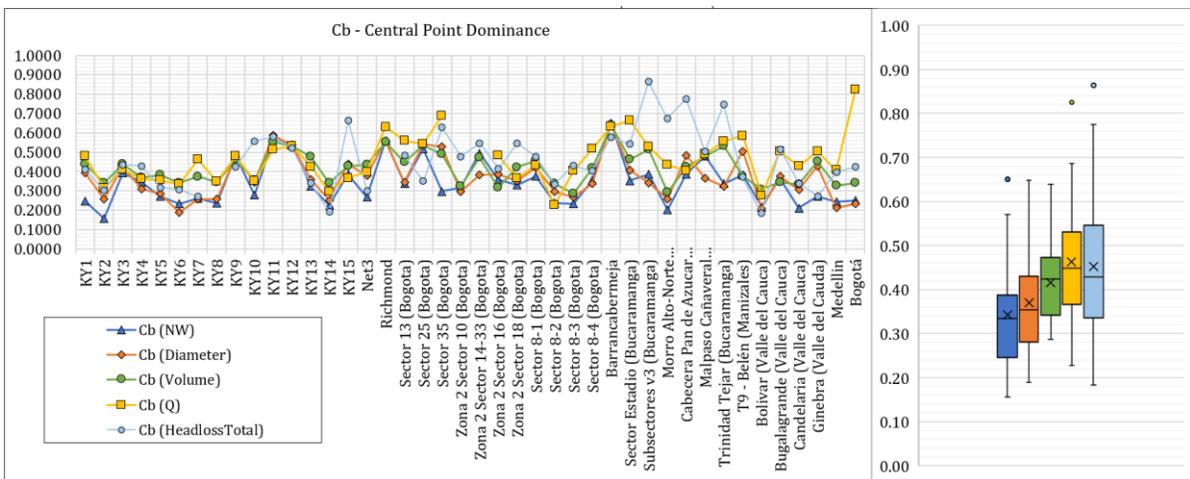


Figura 4-15. Dominancia del punto central con pesos

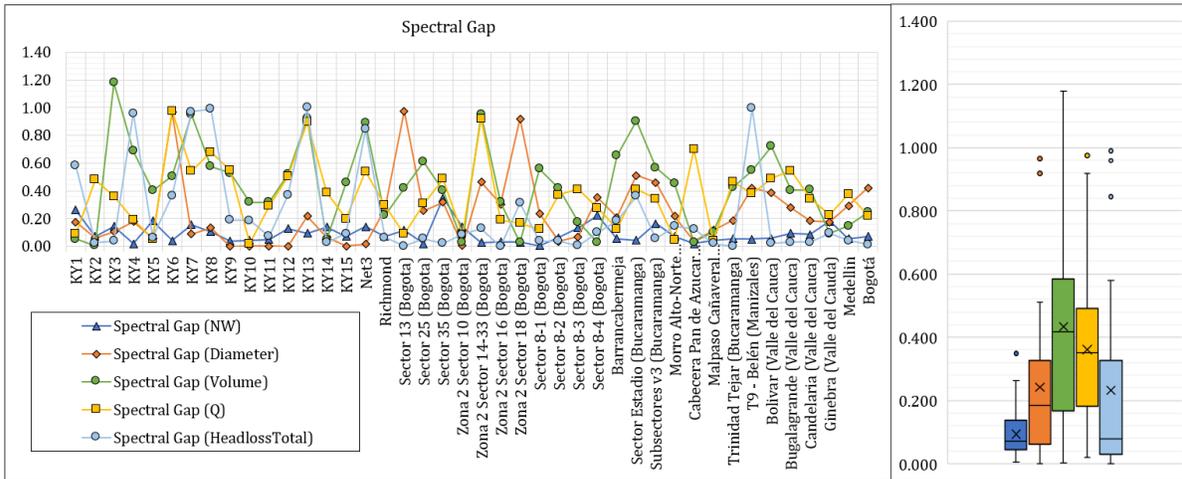


Figura 4-16. Brecha espectral con pesos

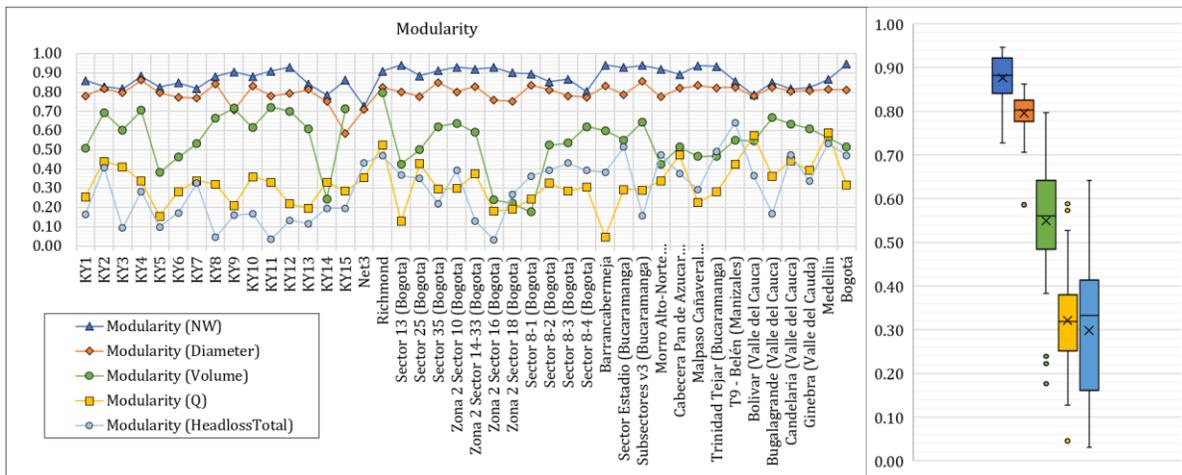


Figura 4-17. Modularidad con pesos

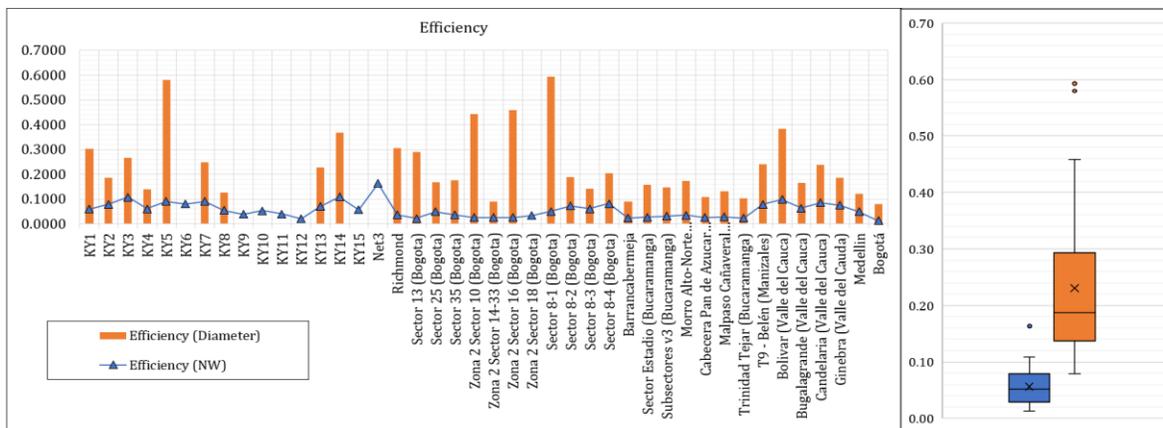


Figura 4-18. Eficiencia con pesos

Únicamente 5 métricas de las 8 previamente escogidas varían al momento de implementar pesos (conectividad algebraica, dominancia del punto central, brecha espectral, modularidad de la red y eficiencia). Las otras métricas (densidad de enlaces, heterogeneidad y coeficiente de enmallado) no cambian debido a que su cálculo se basa únicamente en la cantidad de enlaces y nodos. Las figuras muestran las variaciones para cada una de las redes analizadas y permiten observar como las métricas espectrales son muy sensibles a los pesos implementados, en especial a los pesos de volumen (característica geométrica) y pérdidas (característica hidráulica). La gráfica de eficiencia únicamente se muestra con el peso del diámetro debido a que los valores obtenidos para los demás pesos varían mucho con respecto a los originales (para algunas redes se obtienen valores de eficiencia de 5 órdenes de magnitud mayor a la original).

Al analizar las variaciones encontradas, se determina que para simplificar el análisis y poder obtener conclusiones sobre las RDAP, únicamente se trabajará con los pesos de cada tipo que menos variación generan con respecto a las métricas originales. Estos pesos son: diámetro w_d (geométrico) y caudal w_Q (hidráulico). Adicionalmente, se determina que la eficiencia de la red se calculará sin peso debido a que se obtienen valores de diferente orden de magnitud.

Con la implementación de los pesos se espera poder comparar las geometrías obtenidas al momento de optimizar las redes de distribución de agua potable.

5. METODOLOGÍA DE OPTIMIZACIÓN

La optimización de las RDAP fue descrita previamente en la sección 2. Como conclusiones de la recopilación bibliográfica se estableció que para abrir un camino y entender la geometría de los diseños optimizados de RDAP se debe comenzar por la aproximación tradicional al diseño optimizado, la cual puede describirse de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } C = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$$

$$P_j \geq P_{\text{mín}}$$

$$Q_j \geq Qd_j$$

$$D_k \in (Dc_{\text{mín}}, Dc_{\text{máx}})$$

donde C = costo total de la red; x_i = variable asociada al costo; f_i = función de costo asociada a cada variable x_i ; P_j = presión de servicio en cada nodo de la red; $P_{\text{mín}}$ = presión mínima de diseño; Q_j = caudal entregado en cada nodo de la red; Qd_j = caudal demandado en cada nodo de la red.

En otras palabras, el diseño optimizado de una RDAP consiste en determinar los diámetros de cada una de las tuberías que la conforman dados un caudal de consumo en cada uno de los nudos fijados por la demanda de agua potable y una presión mínima en las horas de máximo consumo fijada por una norma local (Saldarriaga, 2016). Es decir, dada una topología de una red, el problema consiste en determinar un conjunto de diámetros en forma tal que se minimice una función de costo sujeta a restricciones hidráulicas, comerciales y de construcción (Saldarriaga, 2016). Las variables de decisión del problema son los diámetros de cada una de las tuberías de la red. Estas variables son discretas, puesto que sus valores dependen de los diámetros comerciales producidos por la industria. El problema de optimización, en el caso más simple (únicamente un estado operacional), involucra un número posible de diseños discretos equivalente a d^p , donde d son los diámetros comerciales disponibles y p es el número de tuberías de la red.

A continuación, se describe los dos algoritmos de optimización implementados en la presente investigación. Ambos de estos algoritmos se encuentran en el programa REDES

El diseño optimizado de las RDAP implementadas como casos de estudio se realizó con el programa REDES, el cual fue desarrollado por el Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados (CIACUA) de la Universidad de los Andes. Se utilizó la metodología OPUS y Algoritmos Genéticos para el diseño optimizado de dichas redes. Ambas metodologías se encuentran programadas en el código fuente del programa REDES. Para estas metodologías el programa permite ajustar el valor de la presión mínima de diseño, la función

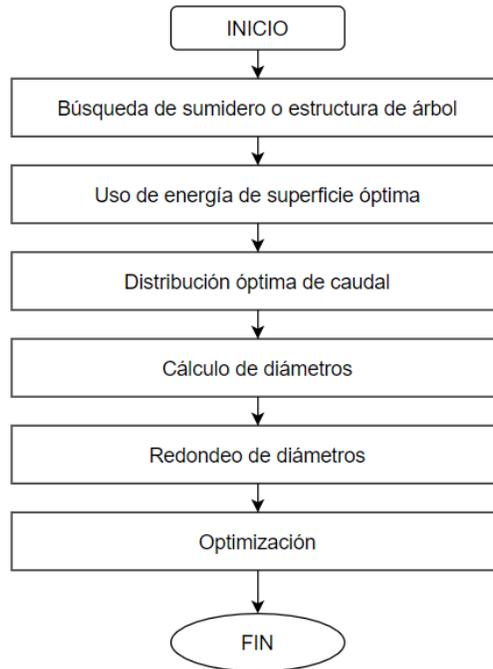


de costos a minimizar, la lista de diámetros comerciales y la rugosidad del material de las tuberías, tal como se muestra en la ventana encontrada a continuación:

Figura 5-1. Parámetros generales - optimización REDES

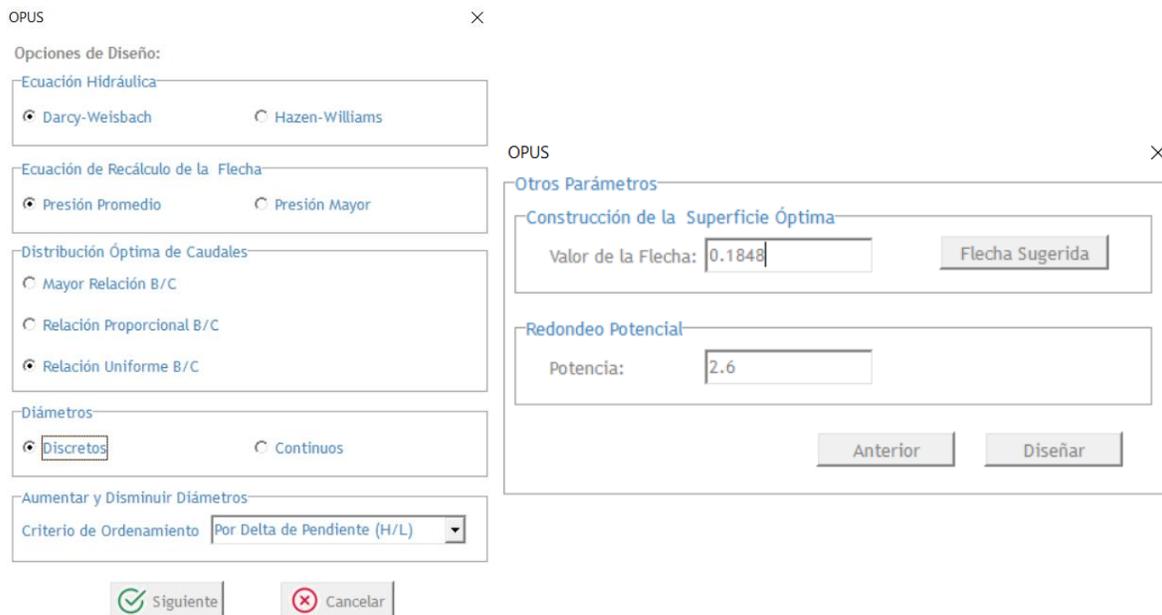
5.1. Metodología OPUS

La metodología Superficie de Uso Óptimo de Potencia (OPUS) fue desarrollada por el Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados (CIACUA) de la Universidad de los Andes con base en el trabajo de Wu (1975). OPUS es una metodología determinística, basada en principios hidráulicos. Su objetivo es minimizar los costos de la red mediante el establecimiento de formas eficientes de disipación de energía y distribución del flujo a lo largo del sistema. Esta metodología fue introducida por primera vez por Saldarriaga et al. (2010) y ha demostrado un gran desempeño de optimización en cuanto a la evaluación de la función objetivo y el bajo costo computacional que requiere su implementación. De manera general, OPUS consiste en seis pasos:



5.1.1.1 Configuración metodología OPUS

A continuación, se muestran las ventanas en las cuales se configuran las opciones y parámetros particulares del diseño mediante la metodología OPUS:



The image shows two overlapping windows from the OPUS software. The left window, titled 'OPUS', displays 'Opciones de Diseño' (Design Options) with several sections:

- Ecuación Hidráulica:** Radio buttons for 'Darcy-Weisbach' (selected) and 'Hazen-Williams'.
- Ecuación de Recálculo de la Flecha:** Radio buttons for 'Presión Promedio' (selected) and 'Presión Mayor'.
- Distribución Óptima de Caudales:** Radio buttons for 'Mayor Relación B/C', 'Relación Proporcional B/C', and 'Relación Uniforme B/C' (selected).
- Diámetros:** Radio buttons for 'Discretos' (selected) and 'Continuos'.
- Aumentar y Disminuir Diámetros:** A dropdown menu for 'Criterio de Ordenamiento' set to 'Por Delta de Pendiente (H/L)'.

At the bottom of this window are 'Siguiente' (Next) and 'Cancelar' (Cancel) buttons. The right window, also titled 'OPUS', shows 'Otros Parámetros' (Other Parameters):

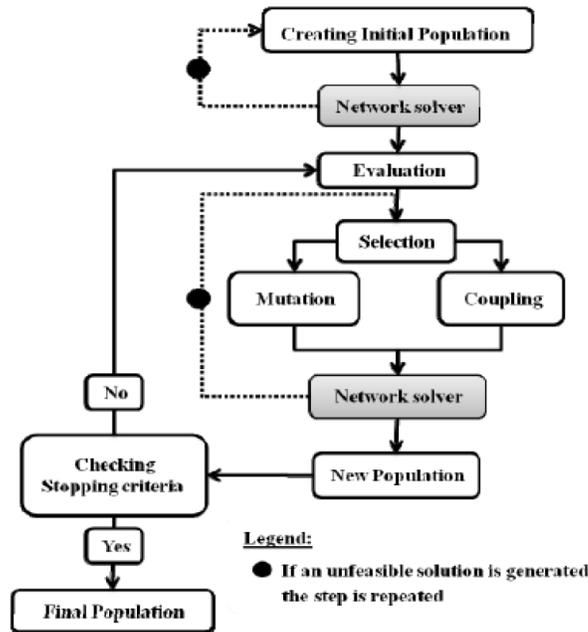
- Construcción de la Superficie Óptima:** A text input for 'Valor de la Flecha' containing '0.1848' and a 'Flecha Sugerida' button.
- Redondeo Potencial:** A text input for 'Potencia' containing '2.6'.

At the bottom of this window are 'Anterior' (Previous) and 'Diseñar' (Design) buttons.

En la sección *Ecuación Hidráulica* se selecciona la ecuación con la cual son evaluadas las pérdidas por fricción durante cada iteración del diseño. La ecuación hidráulica escogida corresponde a la ecuación de Darcy-Weisbach. En el apartado *Diámetros* se indica si se va a implementar una lista de diámetros discretos (lista comercial) o si se diseña con diámetros continuos. Para todos los diseños optimizados realizados en esta investigación se implementaron diámetros discretos (en la sección de ecuación de costo se muestran los diámetros implementados). Se seleccionó solo un método de aproximación de diámetros para todos los diseños con el fin de tener parámetros uniformes que permitieran el análisis de los resultados de la optimización de los diseños. En la ventana mostrada en la siguiente figura se establece el valor de la flecha de energía y el exponente de la función de redondeo potencial. Los valores que se presentan la segunda fueron los mismos para cada uno de los diseños. El resto de los parámetros de la metodología OPUS del programa REDES se deja con los valores que vienen por defecto.

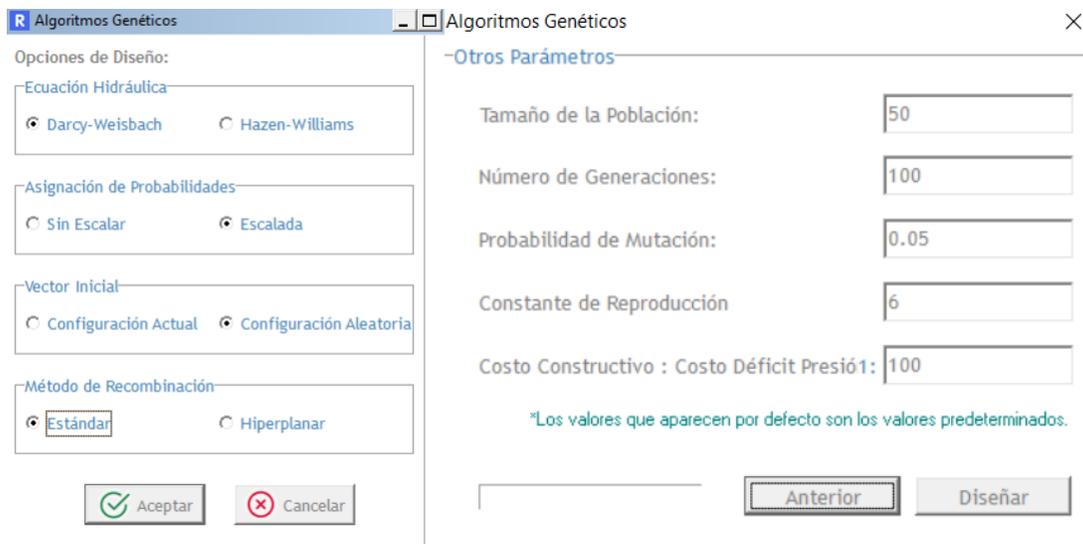
5.2. Algoritmos genéticos

Los Algoritmos Genéticos (GA) son un método de búsqueda aleatoria que simula el proceso de la selección natural de la teoría de la evolución de las especies. De acuerdo con Saldarriaga (2016), los GA son métodos de optimización combinatoria usados ampliamente en los últimos años para el diseño óptimo de RDAP. Debido a su carácter estocástico esta metodología no garantiza el encuentro la solución óptima global ni tampoco un resultado óptimo local. Aun así, se consideran eficientes en la búsqueda dentro de espacios de solución tan complejos como el del diseño optimizado de RDAPs (Simpson et al., 1994). A continuación, se muestra un diagrama que explica una metodología que contempla GA en un proceso de diseño optimizado multiobjetivo:



5.2.1.1 Configuración Algoritmos Genéticos

El Algoritmo Genético implementado en REDES utiliza la reproducción generacional con recombinación estándar y la selección rueda de ruleta como método de reproducción. Para el diseño de las redes se dejaron los valores que venían definidos por defecto en el programa REDES. Únicamente se realizaron cambios en los tamaños poblacionales y el número de generaciones, esto con el fin de encontrar mejores diseños.



5.3. Ecuación de costo

La ecuación de costo seleccionada para el diseño optimizado es la ecuación de Peinado (2016) ya que es la que mejor se ajusta a los costos reales para las tuberías de PVC, implementadas en los diseños optimizados. Esta ecuación se ajustó a dólares americanos (USD) y a valor presente, teniendo en cuenta la tasa promedio de inflación entre los años 2016 y 2019. La ecuación es la siguiente:

$$C = \sum_{i=1}^{NT} 0.005973 * L_i * D_i^{1.5927}$$

Así mismo, se trabajó con la lista de diámetros comerciales correspondientes a esa ecuación, estos se presentan la Figura 5-2.

| RDE 26 PVC Tipo 1, Grado 1 | | | | | | | |
|--|------------|---------------------|-------------------------|-------|-------------------------|-------|-------------------------------|
| Presión de trabajo a 23°C: 160 psi - 1.10 MPa - 11.25 Kg/cm ² | | | | | | | |
| Diámetro Nominal pulg. | Referencia | Peso Aprox. Kg/m | Diámetro Exterior Prom. | | Espesor de Pared Mínimo | | Diámetro Interior Prom. mm |
| | | | mm | pulg. | mm | pulg. | |
| 2 | 2900012 | 0.655 | 60.32 | 2.37 | 2.31 | 0.09 | 55.70 |
| 2.1/2 | 2900020 | 0.964 | 73.03 | 2.87 | 2.79 | 0.11 | 67.45 |
| 3 | 2900024 | 1.438 | 88.90 | 3.50 | 3.43 | 0.13 | 82.04 |
| 4 | 2900035 | 2.376 | 114.30 | 4.50 | 4.39 | 0.17 | 105.52 |
| 6 | 2900045 | 5.148 | 168.28 | 6.62 | 6.48 | 0.25 | 155.32 |
| 8 | 2900056 | 8.735 | 219.08 | 8.62 | 8.43 | 0.33 | 202.17 |
| 10 | 2902413 | 13.666 | 273.05 | 10.75 | 10.49 | 0.41 | 252.07 |
| 12 | 2902423 | 19.288 | 323.85 | 12.75 | 12.45 | 0.49 | 298.95 |
| 14 | 2902432 | 22.65 | 355.60 | 14 | 13.67 | 0.54 | 328.26 |
| 16 | 2902436 | 30.22 | 406.40 | 16 | 15.62 | 0.61 | 375.16 |
| 18 | 2902440 | 38.03 | 457.20 | 18 | 17.58 | 0.69 | 422.04 |
| 20 | 2902444 | 43.97 | 508.00 | 20 | 19.53 | 0.77 | 468.94 |
| 24 | NUEVO | 65.72 | 609.60 | 24 | 23.44 | 0.92 | 562.72 |

Figura 5-2. Diámetros comerciales disponibles para optimización (RDE 26 PVC - PAVCO)

5.4. Resiliencia de RDAP

La resiliencia de una RDAP hace referencia a la capacidad que tiene la red de mantener su servicio por encima del estándar de satisfacción estipulado (las presiones y caudales demandados en cada uno de los nodos de la red) durante la ocurrencia de un evento adverso, como una falla. En otras palabras, la resiliencia de una RDAP es una medida de la tolerancia a fallas de una red. Uno de las formas más conocidas y utilizadas a nivel mundial para medir la resiliencia de una RDAP es mediante el cálculo del índice de resiliencia de Todini (2000), el cual se calcula de la siguiente manera:

Ecuación 34. Índice de resiliencia

$$I_r = \frac{\sum_{j=1}^{n_n} q_j^* (h_j - h_j^*)}{(\sum_{e=1}^{n_e} Q_e H_e + \sum_{i=1}^{n_b} P_i) - \sum_{j=1}^{n_n} q_j^* h_j^*}$$

donde I_r = índice de resiliencia de una red [-]; q_j^* = caudal demandado en el nodo j de la red [l/s]; h_j^* = mínima cabeza requerida en el nodo j de la red [m]; h_j = cabeza real en el nodo j de la red [m]; Q_e = caudal ingresado desde el embalse e de la red (l/s); H_e = cabeza real en el embalse e de la red [m]; P_i = potencia adicionada por la bomba i de la red [$m \cdot l/s$]; n_n = número de nodos en la red; n_e = número de embalses en la red; n_b = número de bombas en la red. Este índice puede tomar valores entre [0,1], donde 0 represente una red sin resiliencia y 1 representa una red con resiliencia ideal.

El cálculo de este índice es importante para la comparación entre diseños optimizados y no optimizados. Se espera que, con la optimización de las RDAP, el índice de resiliencia disminuya de forma significativa.

6. CASOS DE ESTUDIO

Seis redes de distribución de agua potable (5 redes reales colombianas y una red patrón) fueron seleccionadas para realizar el análisis geométrico de los diseños optimizados. En la Tabla 6-1 se presentan las características generales de cada una de las redes y en la Figura 6-1 la topología de estas.

Tabla 6-1. Características generales casos de estudio

| Red | Tuberías | Nodos | Bombas | Válvulas | Tanques/Embalses | Demanda base (LPS) |
|----------------|----------|-------|--------|----------|------------------|--------------------|
| Blacksburg* | 35 | 30 | 0 | 0 | 1 | 97.68 |
| Mamatoco | 101 | 77 | 0 | 0 | 1 | 17.64 |
| Mesolandia | 104 | 89 | 0 | 0 | 1 | 20.39 |
| La Esperanza | 141 | 96 | 0 | 0 | 1 | 18.28 |
| Andalucía Alta | 360 | 329 | 0 | 0 | 1 | 35.48 |
| Candelaria | 567 | 463 | 0 | 0 | 2 | 95.56 |

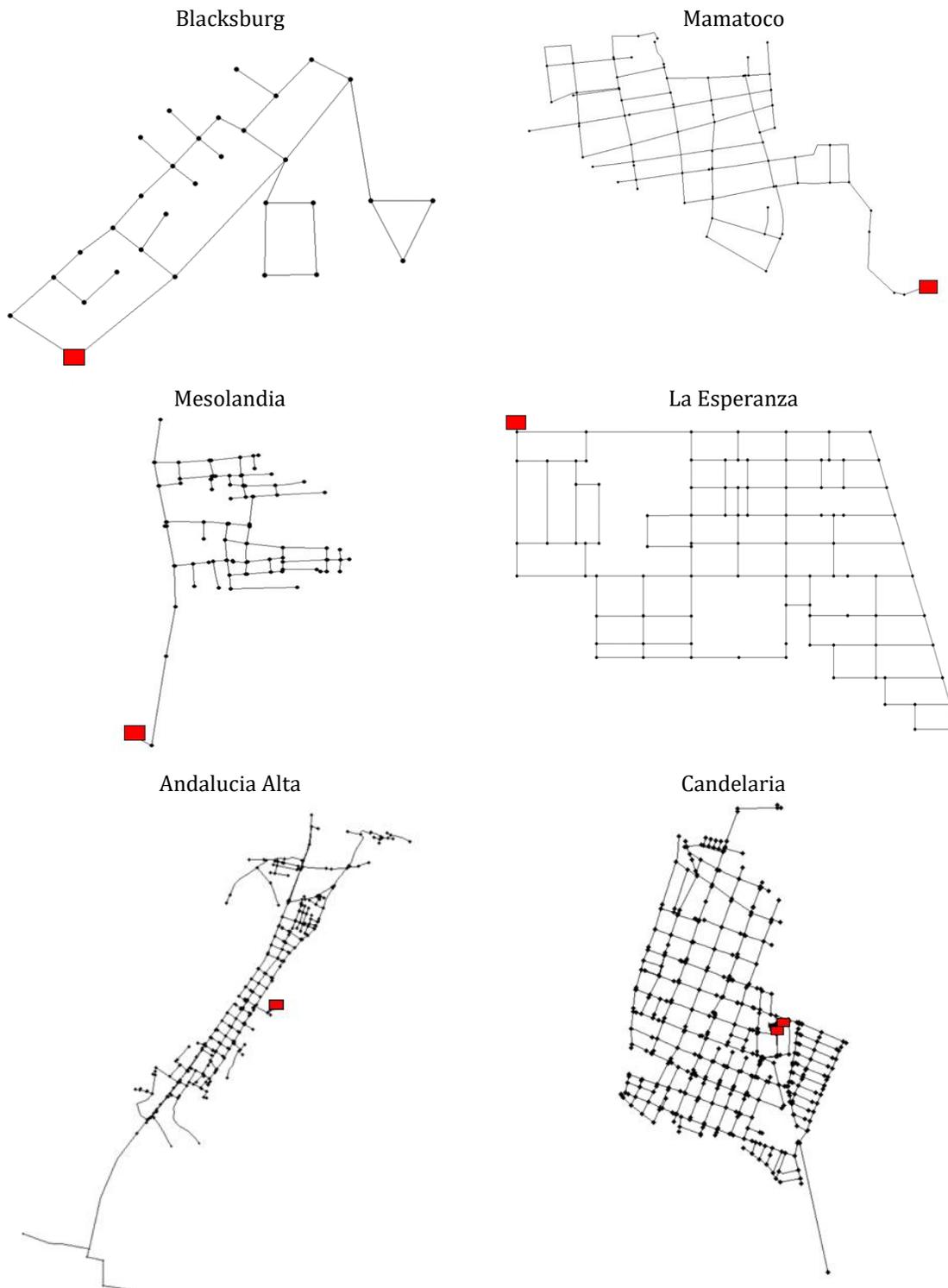


Figura 6-1. Casos de estudio. En rojo se señala la ubicación de los tanques

Cada una de estas redes cuenta con un diseño original, el cual es adaptado para poder realizar las comparaciones respectivas con el diseño optimizado. La adaptación consta principalmente de dos factores: en primer lugar se cambian todas las tuberías al material de PVC, y en segundo lugar, se ajusta la altura del embalse (cabeza de energía) para que la presión mínima de cada diseño sea mayor a 15 m.c.a. Si para el diseño original se tienen presiones mayores a los 15 m.c.a, no se realiza el ajuste a la altura del tanque. Así mismo, se calcula el costo y el índice de resiliencia original de la red con base a la ecuación de costo presentada en la sección anterior.

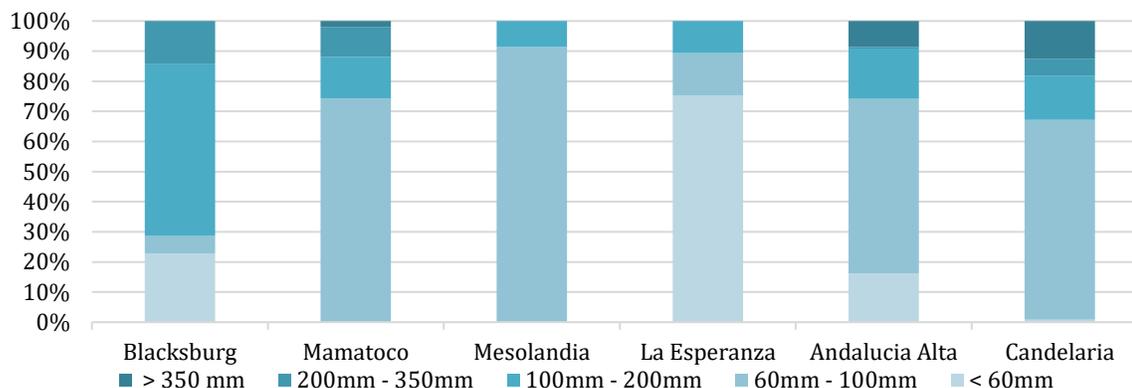
Tabla 6-2. Presión mínima, costo y resiliencia de casos de estudio

| Red | Presión mínima (m.c.a) | Costo (USD) | IR |
|----------------|------------------------|---------------|------|
| Blacksburg | 38.68 | \$ 105,808.88 | 0.78 |
| Mamatoco | 17.23 | \$ 69,634.72 | 0.98 |
| Mesolandia | 18.11 | \$ 52,656.83 | 0.60 |
| La Esperanza | 23.12 | \$ 40,847.51 | 0.92 |
| Andalucía Alta | 18.38 | \$ 178,437.43 | 0.71 |
| Candelaria | 23.93 | \$ 206,049.85 | 0.68 |

En la Tabla 6-3 se presenta un resumen de las tuberías de cada uno de los diseños originales.

Tabla 6-3. Diámetros originales casos de estudio

| Diámetros | Blacksburg | Mamatoco | Mesolandia | La Esperanza | Andalucía Alta | Candelaria |
|---------------|------------|----------|------------|--------------|----------------|------------|
| < 60mm | 23% | 0% | 0% | 75% | 16% | 1% |
| 60mm - 100mm | 6% | 74% | 91% | 14% | 58% | 66% |
| 100mm - 200mm | 57% | 14% | 9% | 11% | 17% | 15% |
| 200mm - 350mm | 14% | 10% | 0% | 0% | 1% | 5% |
| > 350 mm | 0% | 2% | 0% | 0% | 9% | 13% |
| Volumen (m3) | 114 | 69 | 46 | 32 | 147 | 185 |
| Área (m2) | 2663 | 2105 | 1810 | 1638 | 6650 | 6885 |
| Longitud (m) | 6185 | 6642 | 6170 | 7558 | 26400 | 23312 |



7. ANÁLISIS Y RESULTADOS

7.1. Caracterización geométrica diseños originales

La caracterización geométrica inicial permite identificar el tipo de redes estudiadas. En la Tabla 7-1 se presentan los resultados de la caracterización geométrica inicial con base en el esquema de clasificación propuesto por Hwang y Lansey (2017).

Tabla 7-1. Resultados de clasificación topológica según Hwang y Lansey

| Network | BI | D (mm) | Class |
|----------------|------|--------|-------------------------------|
| Blacksburg | 0.29 | 137.1 | Distribution Sparse-Grid(DSG) |
| Mamatoco | 0.23 | 100.9 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Mesolandia | 0.33 | 93.4 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| La Esperanza | 0.02 | 69.0 | Distribution Dense-Grid(DDG) |
| Andalucía Alta | 0.53 | 80.2 | Distribution Branch (DB) |
| Candelaria | 0.24 | 94.0 | Distribution Dense-Grid(DDG) |

El número del BI varía entre [0.23, 0.53] mostrando así que la mayoría de las redes estudiadas son redes en forma de grilla, únicamente Andalucía Alta presenta una configuración con alto grado de ramificación. En términos del diámetro ponderado por la longitud \bar{D} , las redes estudiadas varían entre [69.0, 137.1] milímetros, por lo cual, todas las redes clasifican como función en redes de distribución. La clasificación general permite identificar que, de las seis redes estudiadas, cuatro de ellas (Mamatoco, Mesolandia, La Esperanza, y Candelaria) son redes de distribución con alta densidad de malla, una (Blacksburg) es de malla dispersa y una (Andalucía) es una ramificada. Estos cálculos permiten son importantes porque permiten clasificar de forma inicial la topología de la red, eliminando el sesgo al momento de clasificar la red únicamente con su topología de forma visual (como comúnmente se realiza). Se espera que con la optimización, el \bar{D} disminuya de forma significativa.

En términos de las métricas de CNT, los cálculos para conectividad, eficiencia, centralidad, robustez, diversidad y modularidad, se presentan en la Tabla 7-2. Esta clasificación permite una caracterización del grafo, no tiene en cuenta las características propias (pesos) de las RDAP determinados previamente.

Tabla 7-2. Resultados métricos CNT

| Red | q | R_m | λ_2 | Eficiencia | C_b | $\lambda\Delta$ | HET | MOD |
|----------------|------|-------|-------------|------------|-------|-----------------|------|------|
| Blacksburg | 0.08 | 0.19 | 0.0419 | 0.31 | 0.44 | 0.31 | 0.41 | 0.62 |
| Mamatoco | 0.03 | 0.16 | 0.0153 | 0.22 | 0.23 | 0.21 | 0.38 | 0.67 |
| Mesolandia | 0.03 | 0.09 | 0.0076 | 0.17 | 0.31 | 0.19 | 0.37 | 0.70 |
| La Esperanza | 0.03 | 0.24 | 0.0125 | 0.20 | 0.24 | 0.32 | 0.23 | 0.70 |
| Andalucía Alta | 0.01 | 0.05 | 0.0005 | 0.08 | 0.45 | 0.06 | 0.42 | 0.82 |
| Candelaria | 0.01 | 0.11 | 0.0015 | 0.09 | 0.21 | 0.09 | 0.37 | 0.82 |

En cuanto a la conectividad de las redes, es posible determinar que la red con mejor conectividad es la red patrón Blacksburg, ya que es la que cuenta con mayor densidad de enlaces y conectividad algebraica. Esto se esperaba ya que esta red no es una red real, por lo cual su configuración no se rige por las normas de las redes espacialmente restringidas (por calles y carreteras) como en las demás redes analizadas. En segundo lugar, se encuentra la red La Esperanza (alto coeficiente de enmallado), la cual comparte resultados muy similares con la red Mamatoco (tercer lugar en términos de conectividad). La red con peores propiedades de conectividad es la red Andalucía Alta, comprobando lo confirmado en la clasificación inicial al terminar que se trataba de una red ramificada.

En términos de eficiencia, la red más eficiente es Blacksburg (0.31) y las redes menos eficientes son Andalucía Alta (0.08) y Candelaria (0.09). Esto va de la mano con la densidad de los enlaces y la cantidad de nodos de la red, a medida que aumentan los nodos deberían aumentar los enlaces para mantener la eficiencia de la red. La red con mayor dominancia del punto central es la red Andalucía y la que menos tiene dominancia del punto central es Candelaria. Indicando qué, en términos topológicos, la red Andalucía es más dependiente de sus nodos y tuberías centrales.

La robustez medida a través de la brecha espectral permite identificar que La Esperanza es la red más robusta y con mejores propiedades de expansión. Por el contrario, la red Andalucía es la menos robusta indicando que su topología no es la más adecuada para la expansión de la red. La red más diversa es Andalucía, ya que si diversidad, medida a través de la heterogeneidad (coeficiente de variación del grado de los nodos) es la más alta, no obstante, los valores en comparación con las otras redes no varían mucho, como es de esperarse en RDAP espacialmente restringidas. Por último, la modularidad indica que las redes de Andalucía y Candelaria son las más modulares, mientras que, Blacksburg y Mamatoco son menos propensas a la segregación en comunidades.

El cálculo de las métricas con peso se analizará una vez optimizadas las redes.

7.2. Optimización de RDAP

La optimización de los casos de estudio se llevó a cabo bajo la metodología establecida en la sección de metodología de optimización. En la Tabla 7-3 se presenta un resumen de los resultados obtenidos para cada una de las redes. Las siglas N.O. significan No-Optimización.

Tabla 7-3. Resultados generales optimización

| Red | | Costo [USD] | Reducción costo [USD] | # Simulaciones |
|------------|------|-------------|-----------------------|----------------|
| Blacksburg | N.O. | \$ 105,809 | [-] | [-] |
| | G.A | \$ 55,972 | 47.1% | 332501 |
| | OPUS | \$ 62,244 | 41.2% | 37 |
| Mamatoco | N.O. | \$ 69,635 | [-] | [-] |

| Red | | Costo [USD] | Reducción costo [USD] | # Simulaciones |
|----------------|------|-------------|-----------------------|----------------|
| | G.A | \$ 38,490 | 44.7% | 332501 |
| | OPUS | \$ 27,564 | 60.4% | 62 |
| Mesolandia | N.O. | \$ 52,657 | [-] | [-] |
| | G.A | \$ 37,689 | 28.4% | 332501 |
| | OPUS | \$ 36,131 | 31.4% | 54 |
| La Esperanza | N.O. | \$ 40,848 | [-] | [-] |
| | G.A | \$ 33,753 | 17.4% | 332501 |
| | OPUS | \$ 30,374 | 25.6% | 41 |
| Andalucía Alta | N.O. | \$ 178,437 | [-] | [-] |
| | G.A | \$ 138,249 | 22.5% | 1165001 |
| | OPUS | \$ 120,498 | 32.5% | 208 |
| Candelaria | N.O. | \$ 206,050 | [-] | [-] |
| | G.A | \$ 130,862 | 36.5% | 332501 |
| | OPUS | \$ 108,961 | 47.1% | 338 |

Como se puede observar, los cambios obtenidos en los costos de las redes son significativos, incluso, alcanzando valores de hasta el 60% (OPUS – Mamatoco) para algunas redes. También es importante analizar la alta eficiencia computacional de la metodología OPUS sobre G.A, mostrando que para alcanzar costos similares en G.A se deben realizar muchas más iteraciones. Esto se debe a la naturaleza de cada metodología de optimización, no obstante, es importante de mencionar porque permite entender que algunas metodologías son más eficientes que otras para la optimización de algunas RDAP. El único caso en donde se obtiene una mejor reducción del costo por parte de G.A. es para la red de Blacksburg, la cual, como se mencionó previamente, es una red patrón.

Los resultados obtenidos para el análisis de resiliencia de las redes se presentan en la Tabla 7-4. Los resultados indican lo esperado, con la reducción de los diámetros en cada una de las redes, la tolerancia a fallas debe disminuir. No obstante, esta relación no es lineal en ya que para algunos diseños optimizados se obtiene mejor resiliencia aun cuando el \bar{D} es menor (Mesolandia, comparativa entre G.A. y OPUS). Así mismo, el caso de la red Mesolandia es llamativo ya que los diseños optimizados no reducen de forma significativa la resiliencia original, mostrando que el diseño original de la red no es el más adecuado (en términos económicos y de tolerancia a fallas).

Tabla 7-4. Resultados resiliencia

| Network | | Presión mínima (mca) | IR | \bar{D} [mm] |
|------------|------|----------------------|------|----------------|
| Blacksburg | N.O. | 38.68 | 0.78 | 137.1 |
| | G.A | 17.10 | 0.32 | 90.5 |
| | OPUS | 15.09 | 0.46 | 96.7 |
| Mamatoco | N.O. | 17.23 | 0.98 | 100.9 |
| | G.A | 16.35 | 0.14 | 69.3 |

| | | | | |
|----------------|------|-------|------|------|
| | OPUS | 15.42 | 0.10 | 59.9 |
| Mesolandia | N.O. | 18.11 | 0.60 | 93.4 |
| | G.A | 15.00 | 0.49 | 73.8 |
| | OPUS | 15.01 | 0.58 | 71.2 |
| La Esperanza | N.O. | 23.12 | 0.92 | 69.0 |
| | G.A | 15.37 | 0.25 | 62.9 |
| | OPUS | 15.00 | 0.23 | 58.9 |
| Andalucia Alta | N.O. | 18.38 | 0.71 | 80.2 |
| | G.A | 15.46 | 0.42 | 68.5 |
| | OPUS | 15.00 | 0.42 | 62.5 |
| Candelaria | N.O. | 23.93 | 0.68 | 94.0 |
| | G.A | 15.06 | 0.24 | 71.3 |
| | OPUS | 15.00 | 0.31 | 62.3 |

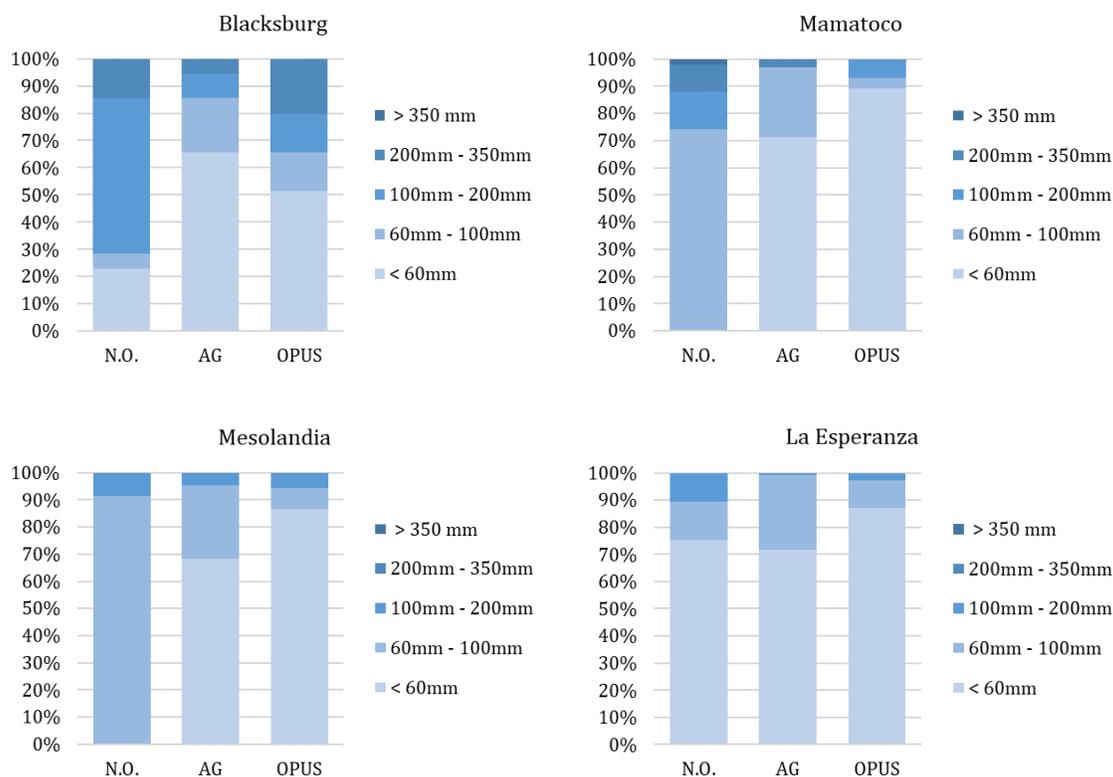
7.2.1. Diámetros

La distribución de los diámetros obtenidos en los diseños optimizados se puede observar en la Tabla 7-5 y en la Figura 7-1. Los resultados muestran lo esperado, entre mayor sea la reducción de costos de la red, mayor es el cambio en la distribución de los diámetros de la misma. En general, los diseños optimizados aumentaron de forma significativa la implementación de tuberías con diámetros menores a los 60 mm (diámetro de 55.87 mm, valor mínimo comercial estudiado).

Tabla 7-5. Resultados de diámetros para todos los diseños

| Blacksburg | | | | Mamatoco | | | |
|--------------------|-------------|-----------|-------------|---------------------|-------------|-----------|-------------|
| Diámetros | N.O. | AG | OPUS | Diámetros | N.O. | AG | OPUS |
| < 60mm | 22.86% | 65.71% | 51.43% | < 60mm | 0% | 71% | 89% |
| 60mm - 100mm | 5.71% | 20.00% | 14.29% | 60mm - 100mm | 74% | 26% | 4% |
| 100mm - 200mm | 57.14% | 8.57% | 14.29% | 100mm - 200mm | 14% | 0% | 7% |
| 200mm - 350mm | 14.29% | 5.71% | 20.00% | 200mm - 350mm | 10% | 3% | 0% |
| > 350 mm | 0.00% | 0.00% | 0.00% | > 350 mm | 2% | 0% | 0% |
| Volumen (m3) | 114.1 | 53.8 | 61.1 | Volumen (m3) | 68.7 | 33.5 | 19.6 |
| Area (m2) | 2663.4 | 1757.8 | 1878.1 | Area (m2) | 2105.0 | 1445.9 | 1249.9 |
| Longitud total (m) | 6184.7 | | | Longitud total (m) | 6642.17 | | |
| Mesolandia | | | | La Esperanza | | | |
| Diámetros | N.O. | AG | OPUS | Diámetros | N.O. | AG | OPUS |
| < 60mm | 0% | 68% | 87% | < 60mm | 75% | 72% | 87% |
| 60mm - 100mm | 91% | 27% | 8% | 60mm - 100mm | 14% | 28% | 10% |
| 100mm - 200mm | 9% | 5% | 6% | 100mm - 200mm | 11% | 1% | 3% |
| 200mm - 350mm | 0% | 0% | 0% | 200mm - 350mm | 0% | 0% | 0% |
| > 350 mm | 0% | 0% | 0% | > 350 mm | 0% | 0% | 0% |

| | | | | | | | |
|-----------------------|-------------|-----------|-------------|--------------------|-------------|-----------|-------------|
| Volumen (m3) | 45.5 | 31.0 | 29.9 | Volumen (m3) | 32.3 | 24.3 | 21.3 |
| Area (m2) | 1810.0 | 1431.4 | 1379.9 | Area (m2) | 1638.1 | 1493.0 | 1399.6 |
| Longitud total (m) | 6170 | | | Longitud total (m) | 7558.2 | | |
| Andalucia Alta | | | | Candelaria | | | |
| Diámetros | N.O. | AG | OPUS | Diámetros | N.O. | AG | OPUS |
| < 60mm | 16% | 49% | 83% | < 60mm | 1% | 48% | 90% |
| 60mm - 100mm | 58% | 49% | 9% | 60mm - 100mm | 66% | 48% | 4% |
| 100mm - 200mm | 17% | 1% | 8% | 100mm - 200mm | 15% | 1% | 3% |
| 200mm - 350mm | 1% | 0% | 1% | 200mm - 350mm | 5% | 1% | 2% |
| > 350 mm | 9% | 1% | 0% | > 350 mm | 13% | 2% | 0% |
| Volumen (m3) | 146.9 | 106.5 | 90.7 | Pipe Volume (m3) | 184.8 | 103.2 | 85.8 |
| Area (m2) | 6650.2 | 5680.0 | 5183.8 | Pipe Area (m2) | 6884.5 | 5220.8 | 4564.2 |
| Longitud total (m) | 26400.3 | | | Pipe length (m) | 23312.27 | | |



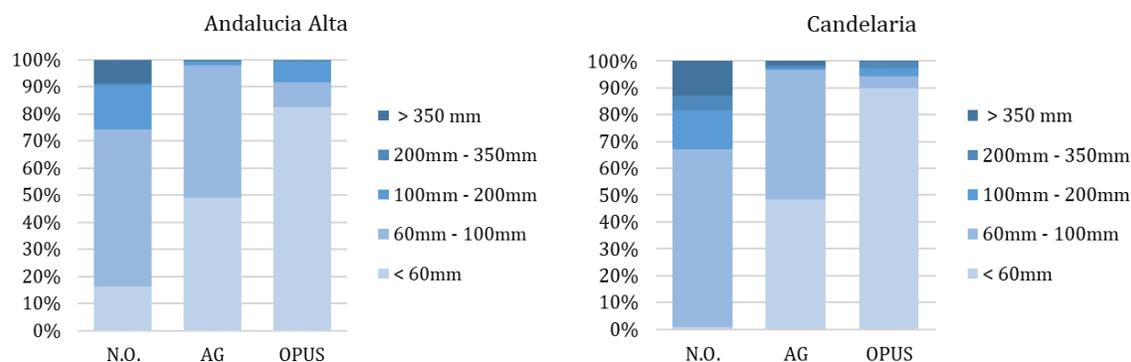


Figura 7-1. Distribución de diámetros para todos los diseños

7.2.2. Índices de CNT ajustados con peso

7.2.2.1 Conectividad algebraica

En la tabla 7-6 se presentan los resultados obtenidos del cambio de la conectividad algebraica para los diseños optimizados. La tabla muestra los resultados separados en peso (w_d y w_Q), diseño (N.O-No Optimización, G.A y OPUS), y en el cambio relativo de la métrica con respecto a su valor del diseño original. La figura 7-2 permite visualizar lo descrito en la tabla 7-6.

Tabla 7-6. Resultados conectividad algebraica

| Conectividad algebraica - λ_2 | | | | | | |
|---------------------------------------|-------|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|
| Red | Peso | N.O. | G.A. | OPUS | Cambio relativo G.A. | Cambio relativo OPUS |
| Blacksburg | [-] | 0.042 | 0.042 | 0.042 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.033 | 0.063 | 0.040 | 0.945701 | 0.233940 |
| | w_Q | 0.061 | 0.122 | 0.039 | 1.003634 | -0.364745 |
| Mamatoco | [-] | 0.015 | 0.015 | 0.015 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.012 | 0.011 | 0.013 | -0.130471 | 0.088686 |
| | w_Q | 0.016 | 0.019 | 0.019 | 0.187669 | 0.204071 |
| Mesolandia | [-] | 0.008 | 0.008 | 0.008 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.008 | 0.008 | 0.008 | 0.002561 | 0.027000 |
| | w_Q | 0.014 | 0.014 | 0.015 | 0.010614 | 0.113522 |
| La Esperanza | [-] | 0.013 | 0.013 | 0.013 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.013 | 0.012 | 0.013 | -0.076233 | -0.016848 |
| | w_Q | 0.019 | 0.016 | 0.016 | -0.137025 | -0.134490 |
| | [-] | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000000 | 0.000000 |

| | | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|
| Andalucía-Alta | w_d | 0.001 | 0.001 | 0.001 | -0.049675 | 0.058040 |
| | w_Q | 0.002 | 0.003 | 0.002 | 0.157190 | -0.004974 |
| Candelaria | [-] | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.002 | 0.002 | 0.002 | -0.165224 | -0.108235 |
| | w_Q | 0.004 | 0.004 | 0.004 | 0.095947 | 0.051264 |

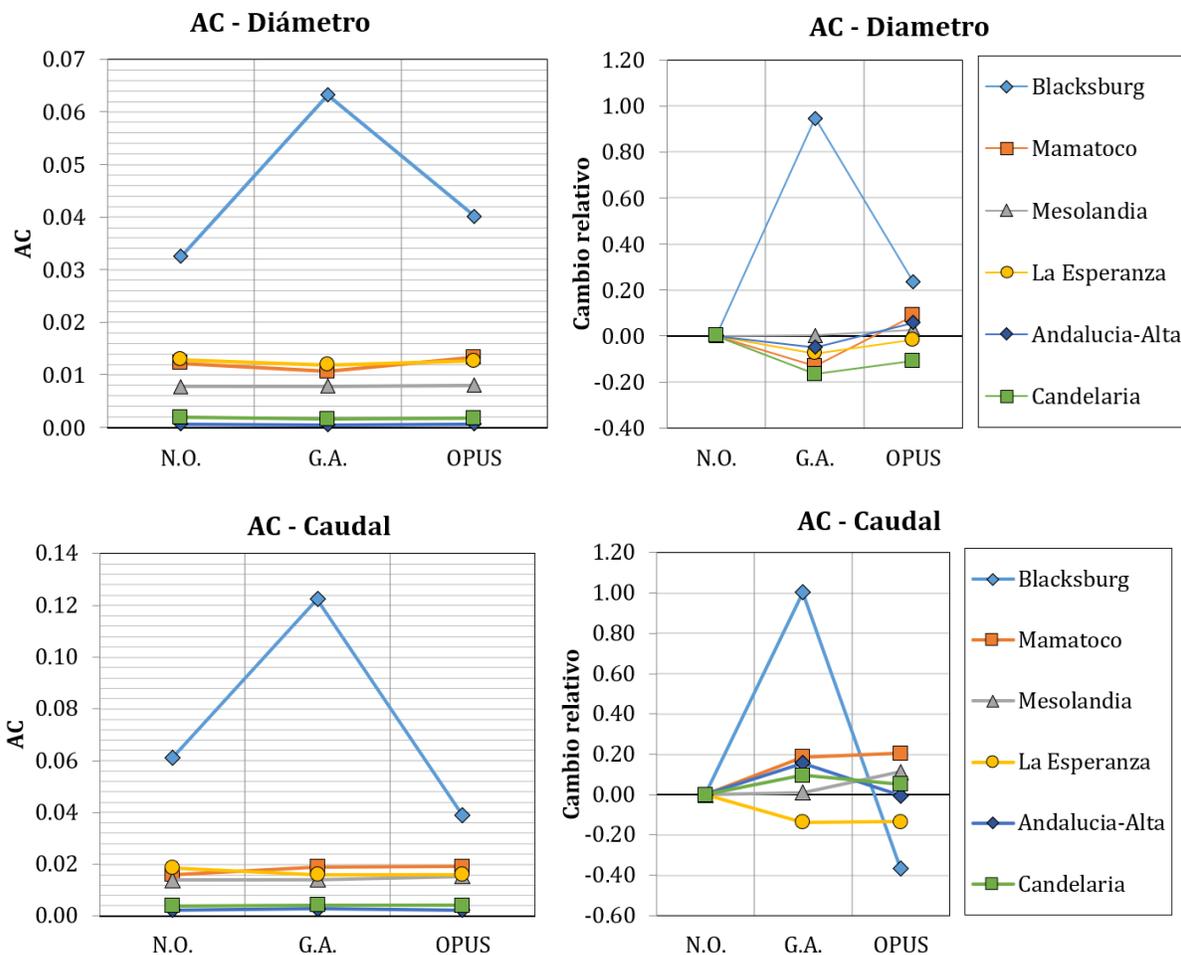


Figura 7-2. Resultados conectividad algebraica

- Diámetro w_d

Las figuras 7-2 muestran que las redes se comportan de forma diferente para cada caso, por lo cual, no es posible realizar una generalización de los cambios en conectividad obtenidos al optimizar los diseños. Para la conectividad en términos del diámetro, los resultados muestran que la red Blacksburg es la de mayor conectividad, y con su optimización, esta conectividad aumenta significativamente (100% para AG y 25% OPUS). Para el resto de las redes, se puede observar que la optimización no altera de forma significativa su conectividad inicial, los cambios relativos para cada una de ellas son

inferiores al 20%. Las redes con menor conectividad son las redes de Andalucía Alta y Candelaria, tal como se mostraba en el análisis inicial sin pesos.

- Caudal w_Q

En cuanto a la conectividad en términos del caudal, los resultados obtenidos muestran un comportamiento similar al descrito anteriormente, siendo Blacksburg la red con mayor conectividad y a su vez, la red más sensible a la optimización. En este caso, al optimizar Blacksburg con OPUS, la conectividad algebraica de la red disminuye.

7.2.2.2 Centralidad

En la 7-7 se presentan los resultados obtenidos del cambio de la dominancia del punto central para los diseños optimizados. La tabla muestra los resultados separados en peso (w_d y w_Q), diseño (N.O-No Optimización, G.A y OPUS), y en el cambio relativo de la métrica con respecto a su valor del diseño original. La figura 7-3 permite visualizar lo descrito en la tabla 7-7.

Tabla 7-7. Resultados centralidad

| Centralidad - C_b | | | | | | |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|
| Red | Peso | N.O. | G.A. | OPUS | Cambio relativo G.A. | Cambio relativo OPUS |
| Blacksburg | [-] | 0.437 | 0.437 | 0.437 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.452 | 0.263 | 0.410 | -0.417741 | -0.091418 |
| | w_Q | 0.345 | 0.400 | 0.429 | 0.158829 | 0.242014 |
| Mamatoco | [-] | 0.227 | 0.227 | 0.227 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.230 | 0.224 | 0.224 | -0.025220 | -0.026436 |
| | w_Q | 0.347 | 0.304 | 0.347 | -0.124923 | -0.000690 |
| Mesolandia | [-] | 0.313 | 0.313 | 0.313 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.329 | 0.347 | 0.323 | 0.053978 | -0.018930 |
| | w_Q | 0.412 | 0.530 | 0.388 | 0.285888 | -0.059049 |
| La Esperanza | [-] | 0.244 | 0.244 | 0.244 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.255 | 0.205 | 0.242 | -0.198174 | -0.051664 |
| | w_Q | 0.372 | 0.438 | 0.306 | 0.176165 | -0.176570 |
| Andalucía-Alta | [-] | 0.452 | 0.452 | 0.452 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.451 | 0.450 | 0.450 | -0.002249 | -0.003549 |
| | w_Q | 0.445 | 0.441 | 0.445 | -0.010629 | -0.001949 |
| Candelaria | [-] | 0.210 | 0.210 | 0.210 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.306 | 0.265 | 0.237 | -0.133117 | -0.226051 |
| | w_Q | 0.436 | 0.384 | 0.319 | -0.119828 | -0.267312 |

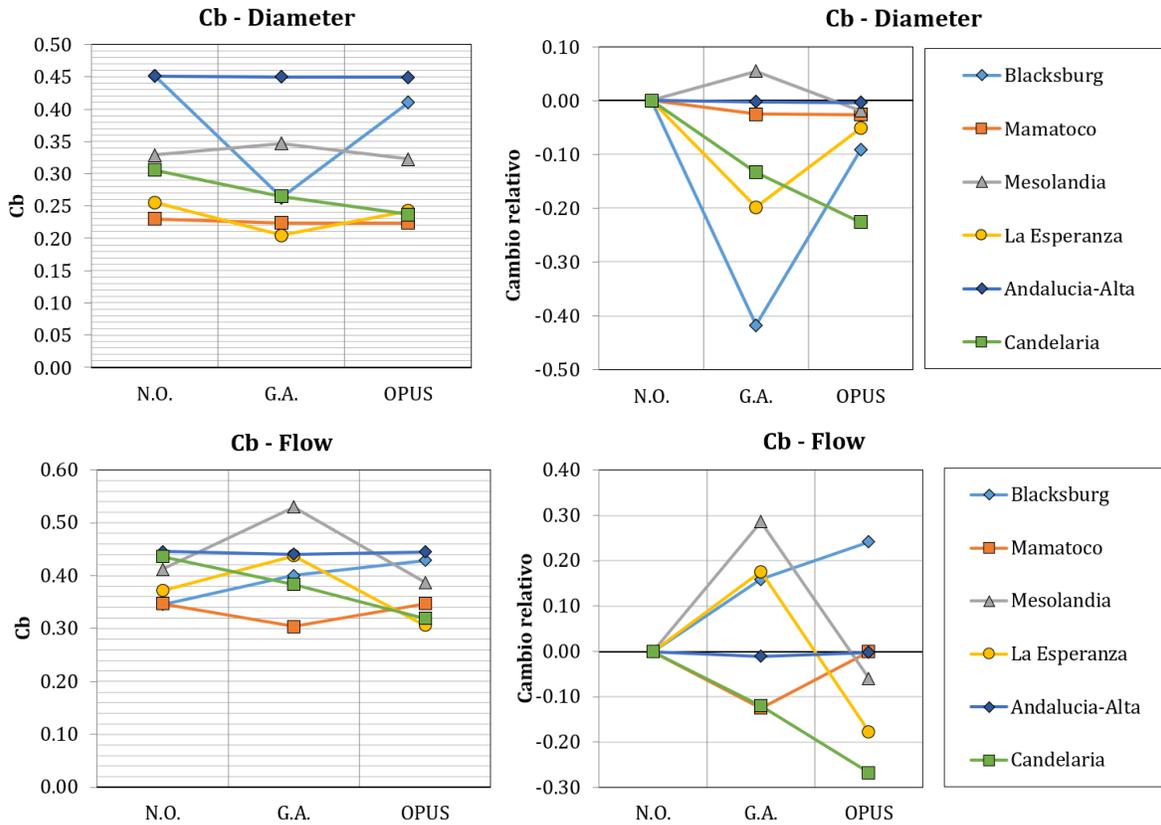


Figura 7-3. Resultados centralidad

- Diámetro w_d

El cálculo de la dominancia del punto central con respecto a los diámetros de la red muestra una posible relación negativa con respecto a la optimización. Esto se puede observar en la figura 7-3 (diámetro), en donde se muestra que, para todas las redes, los resultados obtenidos en el diseño optimizado por la metodología OPUS, disminuyen la dominancia del punto central. Si bien no es un cambio relativo significativo, si puede reflejar que los diseños optimizados disminuyen la centralidad de la red. Así mismo, se puede observar que para la red Andalucía, los cambios en la centralidad son muy bajos (casi nulos) y esto se debe a que esta red es de estructura ramificada, por lo cual, su centralidad no se afecta por los cambios generados en la optimización.

- Caudal w_Q

En términos de la centralidad a través del caudal, se evidencia que el comportamiento es diferente para cada red. El único comportamiento que se mantiene constante, con respecto al diámetro, es el de la red Andalucía, comprobando así que su centralidad no se ve afectada por la optimización. La metodología de OPUS muestra una disminución de la centralidad para las redes de Candelaria, La Esperanza y Mesolandia, mientras que A.G

únicamente muestran disminución en Candelaria y Mamatoco. La red de Blacksburg presenta un aumento significativo con su optimización.

7.2.2.3 Robustez

En la Tabla 7-8 presentan los resultados obtenidos de la brecha espectral para los diseños optimizados. La tabla muestra los resultados separados en peso (w_d y w_Q), diseño (N.O-No Optimización, G.A y OPUS), y en el cambio relativo de la métrica con respecto a su valor del diseño original.

Tabla 7-8. Resultados brecha espectral

| Brecha Espectral - $\lambda\Delta$ | | | | | | |
|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|
| Red | Peso | N.O. | G.A. | OPUS | Cambio relativo G.A. | Cambio relativo OPUS |
| Blacksburg | [-] | 0.308 | 0.308 | 0.308 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.206 | 0.766 | 0.275 | 2.718272 | 0.336267 |
| | w_Q | 0.588 | 0.898 | 0.485 | 0.528550 | -0.174625 |
| Mamatoco | [-] | 0.206 | 0.206 | 0.206 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.204 | 0.184 | 0.339 | -0.094999 | 0.662867 |
| | w_Q | 0.286 | 0.420 | 0.392 | 0.469005 | 0.371109 |
| Mesolandia | [-] | 0.193 | 0.193 | 0.193 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.263 | 0.450 | 0.556 | 0.707232 | 1.111048 |
| | w_Q | 0.614 | 0.643 | 0.640 | 0.047200 | 0.042878 |
| La Esperanza | [-] | 0.319 | 0.319 | 0.319 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.452 | 0.022 | 0.111 | -0.951868 | -0.754014 |
| | w_Q | 0.752 | 0.667 | 0.605 | -0.113155 | -0.194916 |
| Andalucia-Alta | [-] | 0.058 | 0.058 | 0.058 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.537 | 0.494 | 0.436 | -0.079417 | -0.188442 |
| | w_Q | 0.645 | 0.639 | 0.629 | -0.008834 | -0.024279 |
| Candelaria | [-] | 0.086 | 0.086 | 0.086 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.182 | 0.125 | 0.289 | -0.312379 | 0.587870 |
| | w_Q | 0.365 | 0.393 | 0.282 | 0.077154 | -0.226412 |

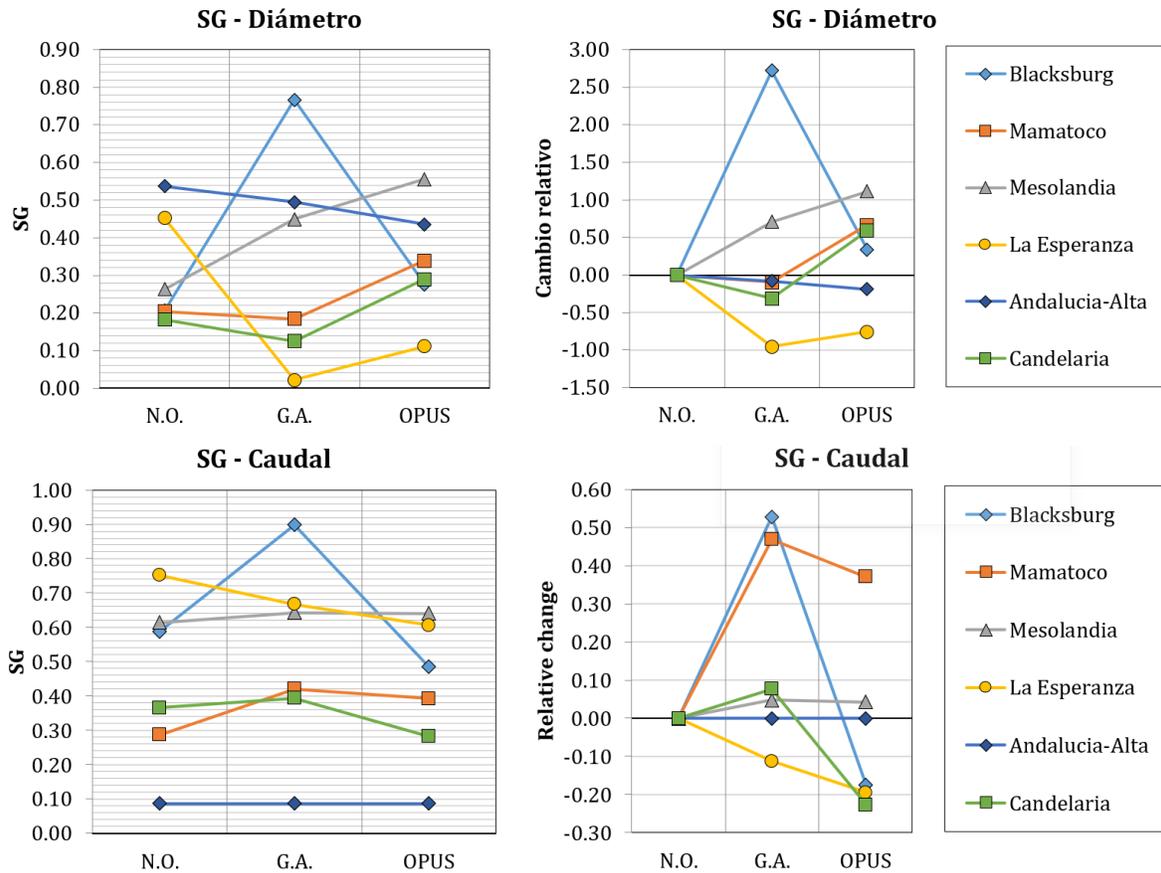


Figura 7-4. Resultados brecha espectral

- Diámetro w_d

Los resultados de la brecha espectral, por tratarse de una métrica espectral, son muy sensibles a los pesos utilizados, por lo cual, es de esperarse que los resultados obtenidos sean muy distintos para cada red. Inicialmente, se puede apreciar que la red de Andalucía Alta tenía el valor más alto de robustez, no obstante, esta disminuyó con el diseño optimizado. La metodología de OPUS mejora la robustez de los diseños de Mesolandia, Candelaria y Mamatoco. Nuevamente, Blacksburg muestra un comportamiento atípico entre el diseño de G.A y OPUS.

- Caudal w_Q

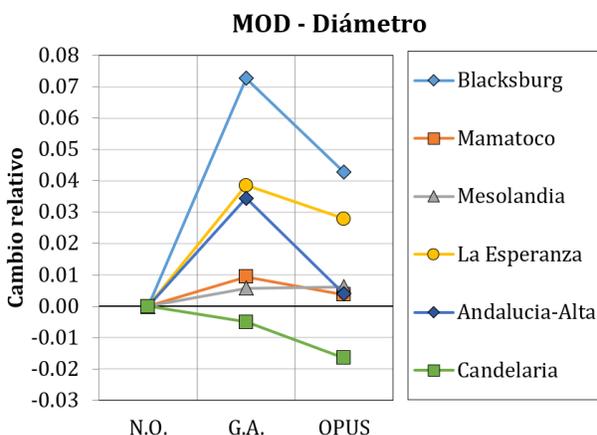
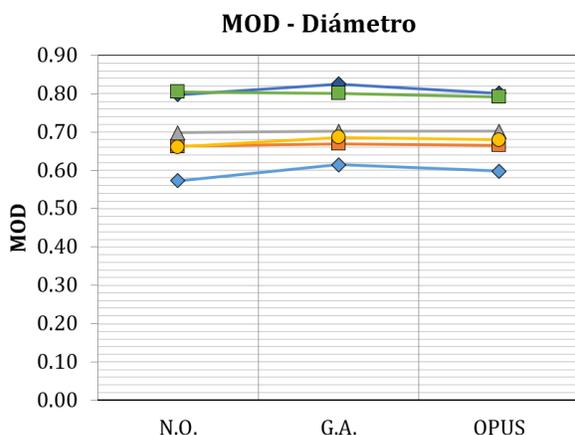
Para el caso de Andalucía Alta, la robustez medida con la brecha espectral y utilizando como peso el caudal no cambia con su optimización. Inicialmente se tiene la Esperanza como la red más robusta, pero al optimizar, Mesolandia mejora su resultado. En general, los resultados no siguen ningún comportamiento específico.

7.2.2.4 Modularidad

En la Tabla 7-9 se presentan los resultados obtenidos de la modularidad para los diseños optimizados. La tabla muestra los resultados separados en peso (w_d y w_Q), diseño (N.O-No Optimización, G.A y OPUS), y en el cambio relativo de la métrica con respecto a su valor del diseño original.

Tabla 7-9. Resultados modularidad

| Modularidad - MOD | | | | | | |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|
| Red | Peso | N.O. | G.A. | OPUS | Cambio relativo G.A. | Cambio relativo OPUS |
| Blacksburg | [-] | 0.621 | 0.621 | 0.621 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.573 | 0.615 | 0.598 | 0.072650 | 0.042735 |
| | w_Q | 0.464 | 0.511 | 0.513 | 0.101143 | 0.104662 |
| Mamatoco | [-] | 0.665 | 0.665 | 0.665 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.663 | 0.669 | 0.666 | 0.009348 | 0.003694 |
| | w_Q | 0.421 | 0.435 | 0.425 | 0.033959 | 0.009499 |
| Mesolandia | [-] | 0.703 | 0.703 | 0.703 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.698 | 0.702 | 0.702 | 0.005764 | 0.006161 |
| | w_Q | 0.599 | 0.546 | 0.445 | -0.08954 | -0.25698 |
| La Esperanza | [-] | 0.697 | 0.697 | 0.697 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.661 | 0.686 | 0.679 | 0.038598 | 0.027939 |
| | w_Q | 0.539 | 0.481 | 0.505 | -0.10919 | -0.06457 |
| Andalucia-Alta | [-] | 0.823 | 0.823 | 0.823 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.798 | 0.825 | 0.801 | 0.034450 | 0.003908 |
| | w_Q | 0.428 | 0.459 | 0.406 | 0.074589 | -0.05116 |
| Candelaria | [-] | 0.818 | 0.818 | 0.818 | 0.000000 | 0.000000 |
| | w_d | 0.805 | 0.801 | 0.791 | -0.00498 | -0.01646 |
| | w_Q | 0.454 | 0.308 | 0.265 | -0.32157 | -0.41722 |



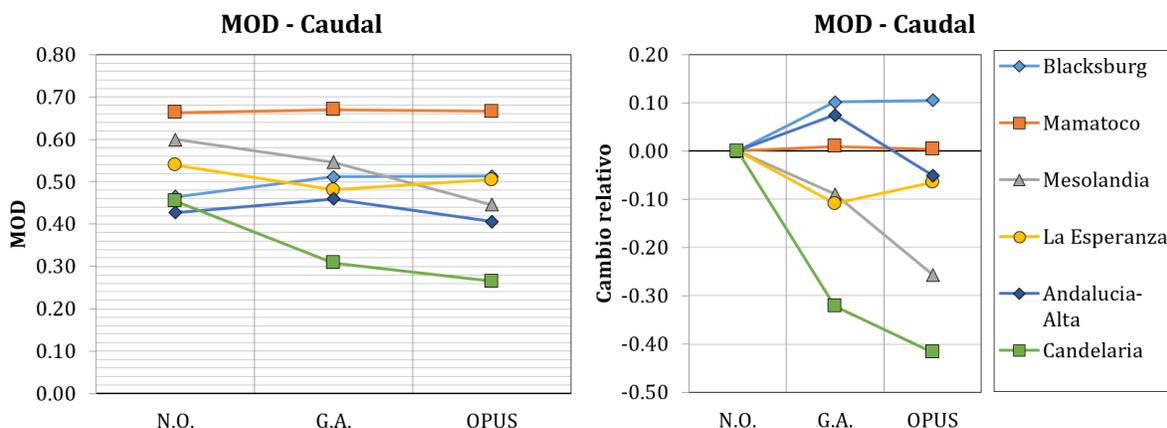


Figura 7-5. Resultados modularidad

- Diámetro w_d

En general, la modularidad de las redes calculada con el peso del diámetro muestra una mejora a medida que se optimiza. Únicamente una red (Candelaria) empeora su modularidad. No obstante, los cambios relativos obtenidos para la modularidad son muy bajos, todos menores al 8% con respecto a su valor inicial.

- Caudal w_Q

La modularidad calculada con el caudal si permite ver un cambio significativo con la optimización, en especial para la red de Candelaria, la cual disminuye hasta casi 40%. Las redes de Mesolandia y La Esperanza también presentan una disminución en si modularidad para ambos algoritmos de optimización.

7.2.3. Centroides

Los centroides de las redes se calculan para analizar los desplazamientos obtenidos con la optimización de los diseños. En la tabla XX se presentan todos los centroides para las redes analizadas.

Tabla 7-10. Resultados centroides

| Red | | Volumen | | Potencia Específica | | Diámetro | | Potencia | |
|------------|------|---------|---------|---------------------|---------|----------|---------|----------|---------|
| | | Cx | Cy | Cx | Cy | Cx | Cy | Cx | Cy |
| Blacksburg | NO | 5377 | 6412 | 3369 | 4844 | 5139 | 6537 | 5404 | 6541 |
| | AG | 5373 | 5894 | 4257 | 5574 | 5253 | 6392 | 5420 | 6539 |
| | OPUS | 4557 | 6394 | 2932 | 5515 | 4718 | 6474 | 5381 | 6538 |
| Mamatoco | NO | 990439 | 1733400 | 990562 | 1733334 | 990356 | 1733455 | 990313 | 1733436 |
| | AG | 990477 | 1733388 | 990607 | 1733343 | 990346 | 1733471 | 990319 | 1733434 |
| | OPUS | 990371 | 1733453 | 990625 | 1733311 | 990331 | 1733481 | 990319 | 1733434 |
| Mesolandia | NO | 924487 | 1695590 | 924348 | 1695176 | 924568 | 1695693 | 924525 | 1695609 |
| | AG | 924466 | 1695497 | 924366 | 1695284 | 924563 | 1695675 | 924519 | 1695600 |
| | OPUS | 924456 | 1695441 | 924389 | 1695358 | 924563 | 1695666 | 924522 | 1695596 |
| | NO | 934053 | 1097565 | 933904 | 1097649 | 934109 | 1097533 | 934086 | 1097575 |

| Red | | Volumen | | Potencia Específica | | Diámetro | | Potencia | |
|----------------|------|---------|---------|---------------------|---------|----------|---------|----------|---------|
| | | Cx | Cy | Cx | Cy | Cx | Cy | Cx | Cy |
| La Esperanza | AG | 934107 | 1097527 | 933859 | 1097642 | 934125 | 1097525 | 934086 | 1097575 |
| | OPUS | 934099 | 1097539 | 933842 | 1097651 | 934125 | 1097527 | 934085 | 1097575 |
| Andalucía Alta | NO | 1101161 | 952932 | 1101273 | 952927 | 1101216 | 952994 | 1101227 | 953014 |
| | AG | 1101131 | 952866 | 1101279 | 953002 | 1101208 | 952985 | 1101226 | 953012 |
| | OPUS | 1101138 | 952856 | 1101283 | 952981 | 1101220 | 952988 | 1101226 | 953012 |
| Candelaria | NO | 1081190 | 868594 | 1081214 | 868681 | 1081183 | 868564 | 1081105 | 868762 |
| | AG | 1081151 | 868631 | 1081236 | 868710 | 1081163 | 868588 | 1081105 | 868762 |
| | OPUS | 1081149 | 868655 | 1081150 | 868736 | 1081165 | 868594 | 1081105 | 868762 |

En las figuras 7-6 a 7-10 se presentan la ubicación de los distintos centroides calculados para cada red. En términos generales se observa que únicamente los centroides de potencia específica y volumen muestran un desplazamiento significativo. Así mismo, el centroide de potencia muestra desplazamientos muy bajos (casi nulos) en cuanto a los diseños optimizados, mostrando que la distribución de potencia de la red no se afecta con la optimización del diseño. Para los centroides de diámetro, su desplazamiento no es tan importante y se concentra en el centroide de coordenadas de los nodos y las tuberías de la red. Si bien si existe un desplazamiento debido a los cambios en los diseños optimizados, este no resulta ser tan significativo.

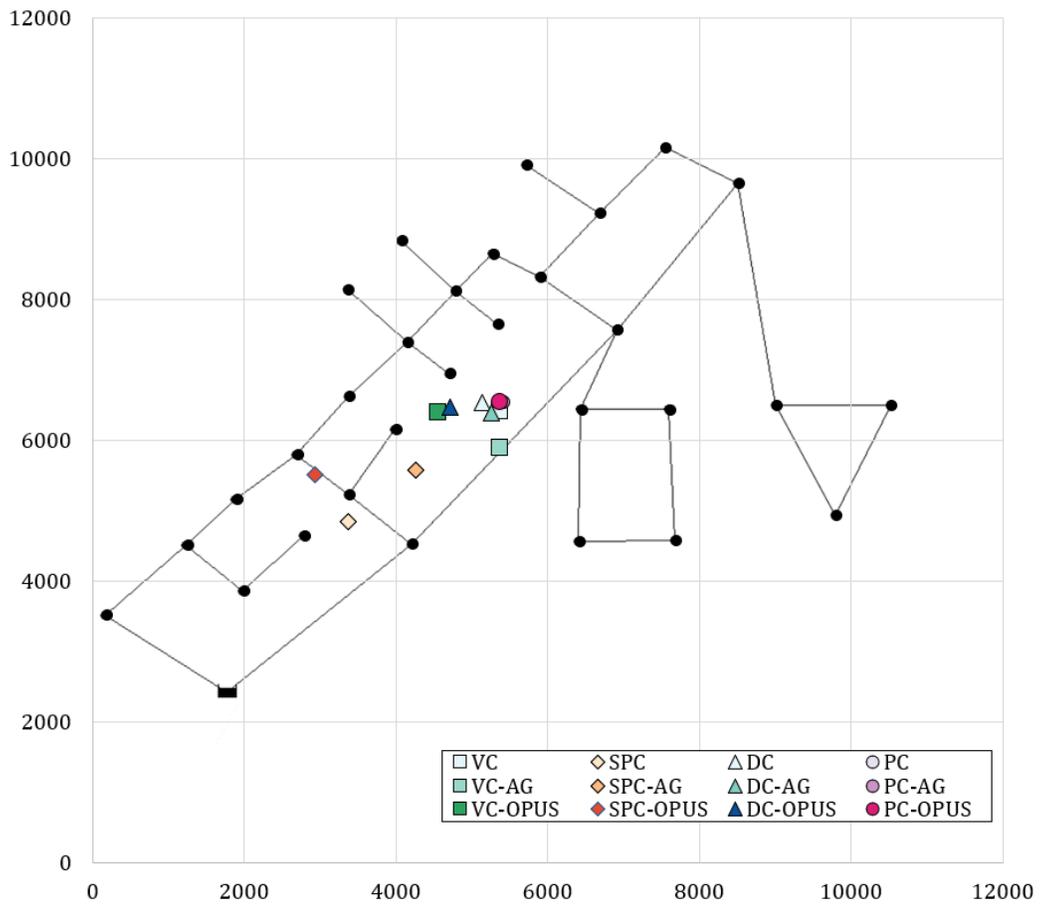


Figura 7-6. Centroides Blackburg

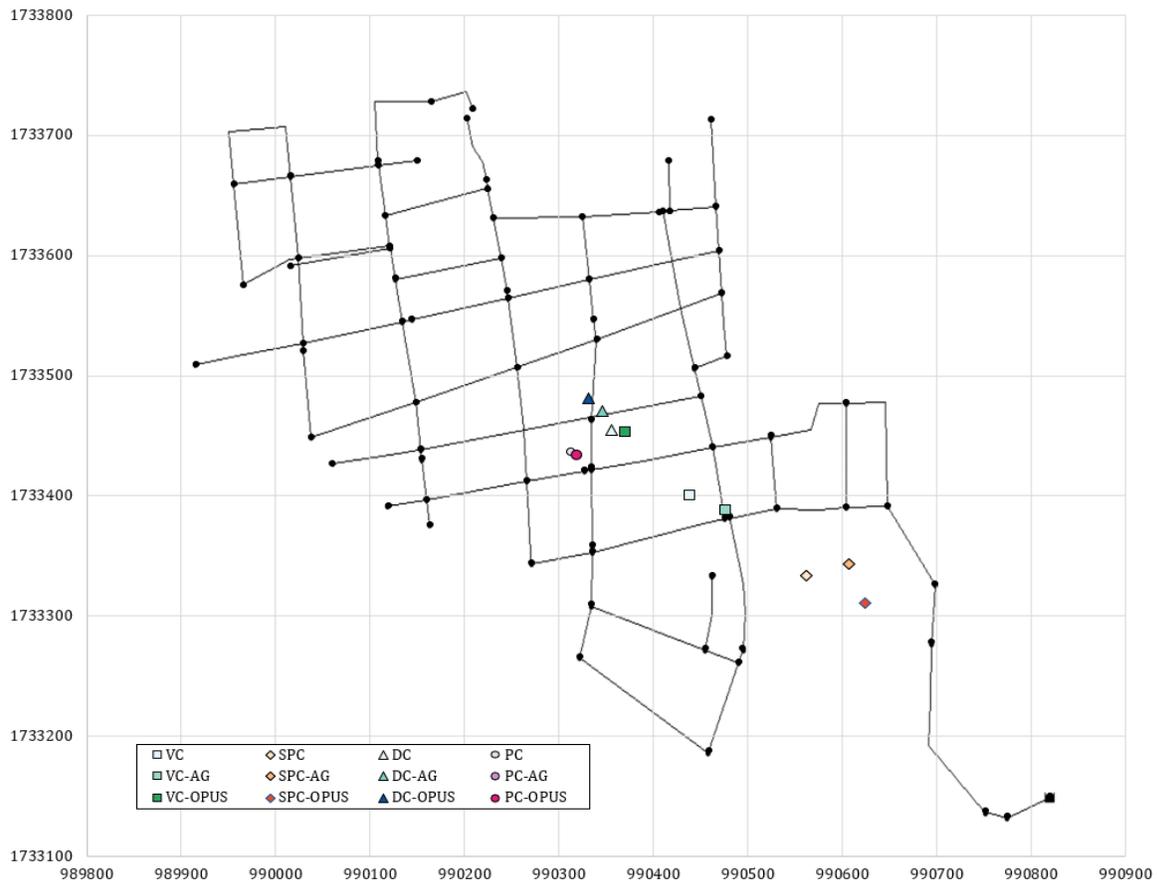


Figura 7-7. Centroides Mamatocho

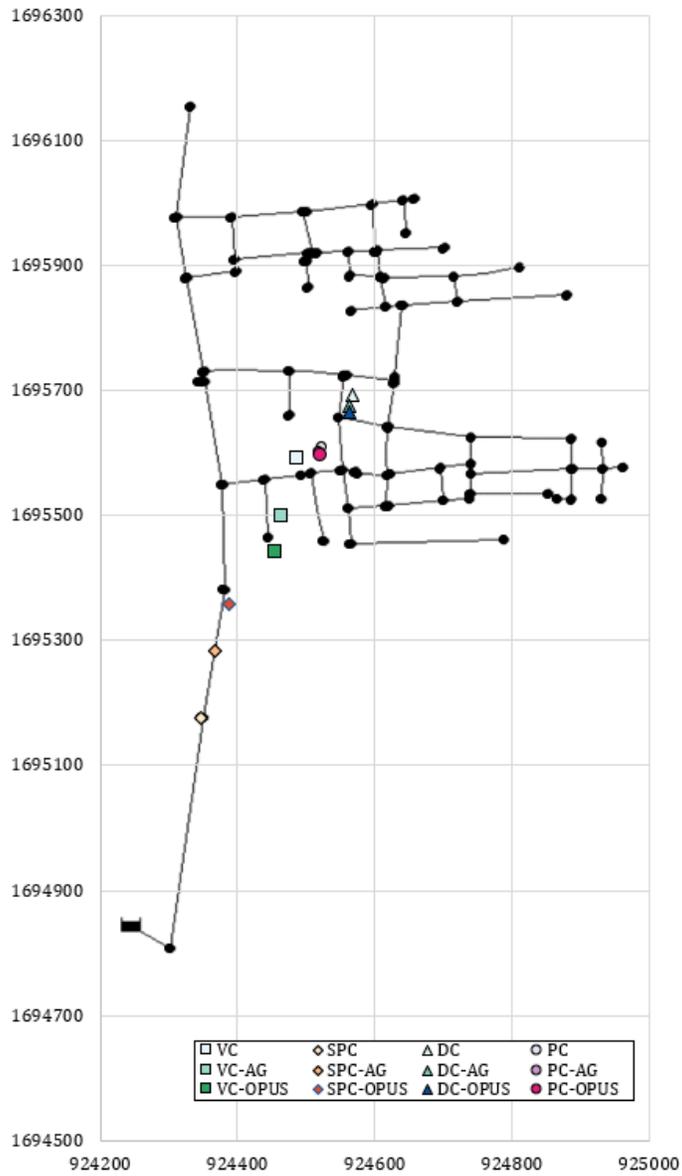


Figura 7-8. Centroides Mesolandia

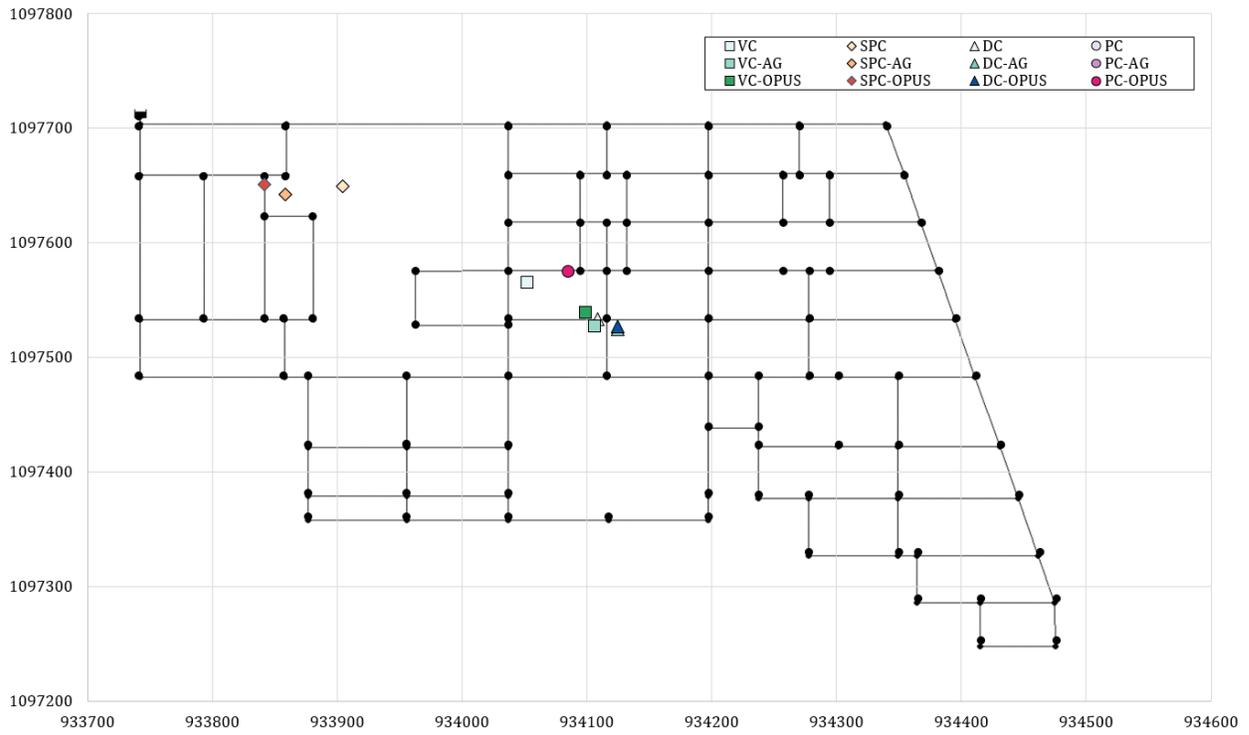


Figura 7-9. Centroides La Esperanza

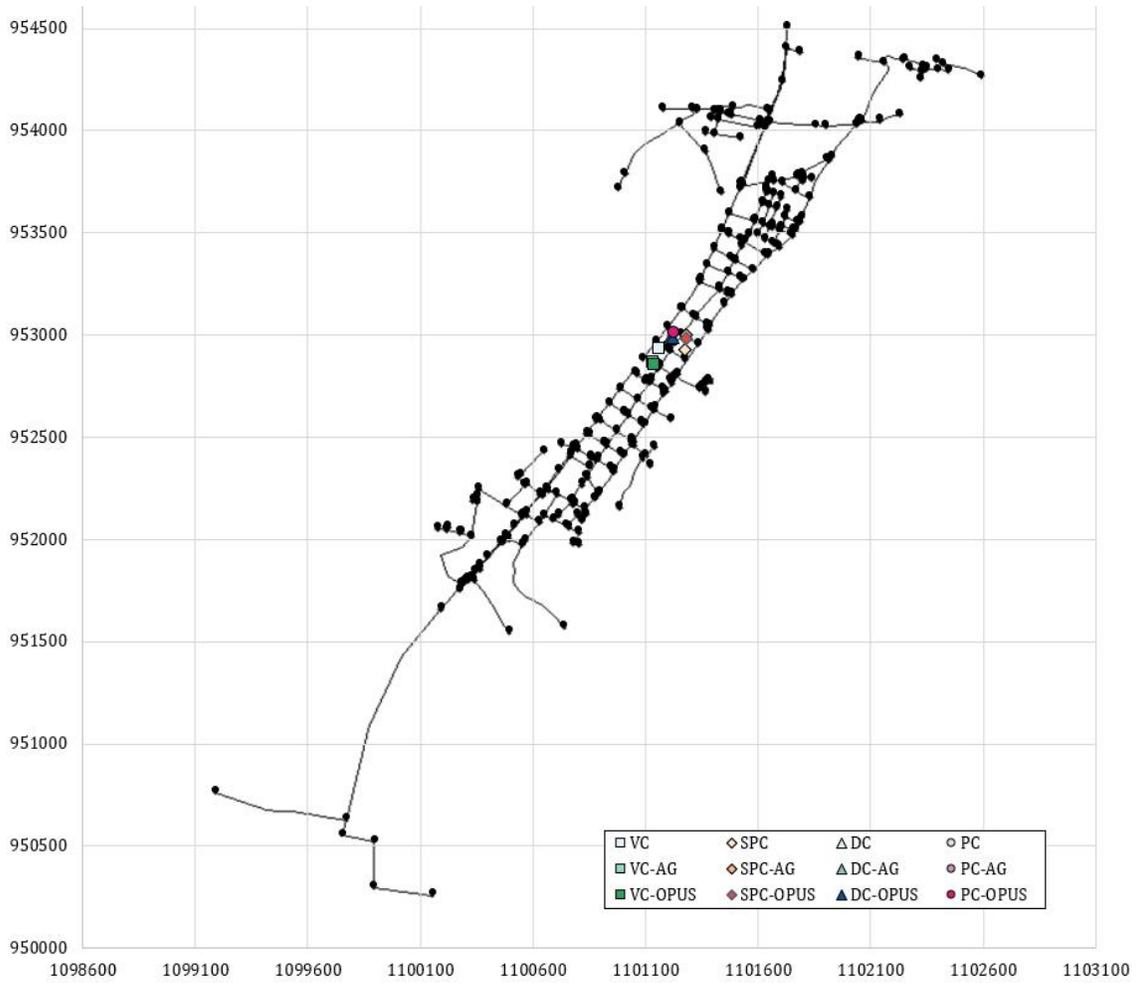


Figura 7-10. Centroides Andalucía Alta

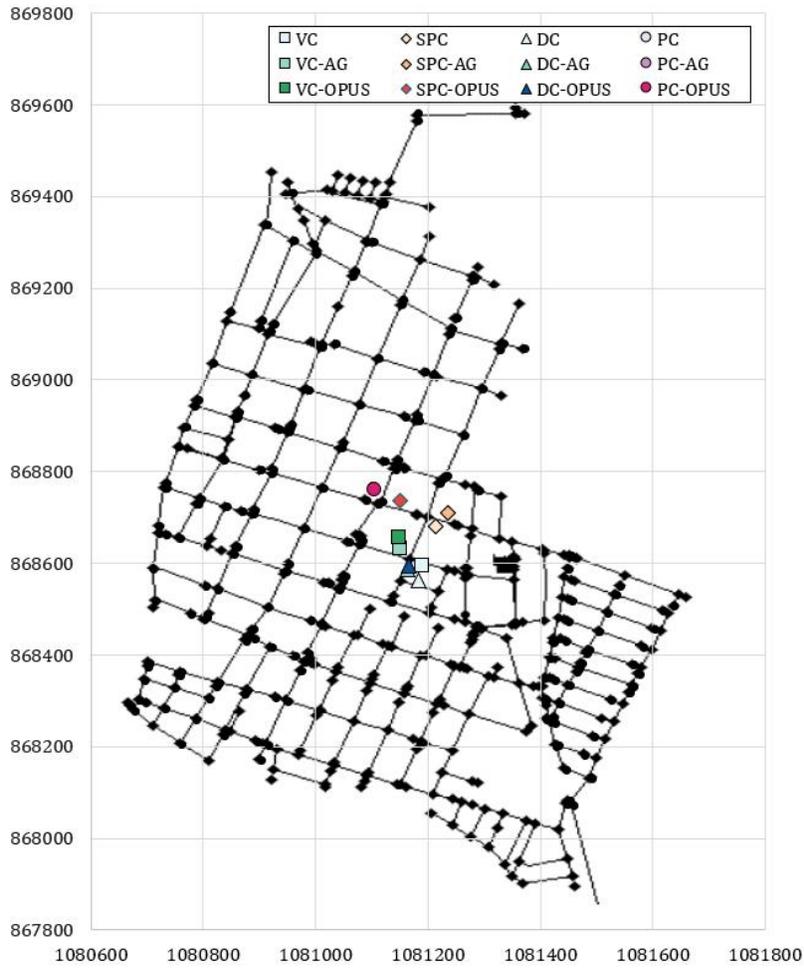


Figura 7-11. Centroides Candelaria

8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En la presente investigación, mediante la realización de un estado del arte, se buscó abrir un camino para entender las posibles relaciones existentes entre la geometría de las redes de distribución de agua potable y su diseño optimizado. Para tal fin, se realizó inicialmente una recopilación bibliográfica exhaustiva en la cual se determinó el estado actual de las investigaciones en términos de geometrías de RDAP y sus diseños optimizados. De esta recopilación fue posible concluir:

- La optimización de RDAP abarca una gran variedad de problemas, todos descritos previamente. De estos, en el que más se ha avanzado es en la optimización de los componentes de la red, en especial del diámetro de sus tuberías. Así mismo, podría considerarse como el problema más simple de tratar para entender la geometría de los diseños optimizados de RDAP. Por estas razones, la realización del análisis geométrico de RDAP diseñadas óptimamente se debe enfocar principalmente en la geometría de los diseños optimizados en costos de sus tuberías.
- La mayoría de estudios en RDAP que implementan teoría de redes complejas ha supuesto grafos sin peso, no han incluido características geométricas de los componentes de la red en el análisis realizado. (Yazdani & Jeffrey, 2012c), (Hwang & Lansey, 2017) y (Giustolisi et al., 2019) han realizado esfuerzos para considerar características de RDAP en el cálculo de métricas topológicas, no obstante, se han enfocado en la adaptación de métricas locales.
- Las métricas del mundo de la teoría de grafos son de alta eficiencia computacional. Por lo cual, la adaptación de estas para el análisis de RDAP puede traer consigo grandes beneficios en el análisis de redes muy extensas.
- Otros componentes que permiten analizar la topología de la red, como los centroides, pueden ser un complemento importante para el análisis geométrico de las RDAP.
- Con el fin de poder comparar los diseños de RDAP optimizados en costos vs. los diseños no optimizados, es necesario proponer nuevos índices (o ajustar índices) que midan características hidráulicas del sistema, así como el diámetro de sus tuberías optimizadas.

Teniendo en cuenta las conclusiones de la recopilación bibliográfica, se planteó una metodología para realizar un análisis geométrico de RDAP diseñadas óptimamente. Esta metodología permitió: i) identificar las métricas más adecuadas de CNT para la caracterización topológica de RDAP, en donde se analizan 6 características principales de las RDAP (conectividad, eficiencia, centralidad, robustez, modularidad y diversidad); ii) realizar un ajuste a las métricas encontradas para tener en cuenta propiedades de las tuberías, así como propiedades hidráulicas de la red (mediante la definición de pesos como el diámetro y el caudal) y iii) definir una metodología de optimización para evaluar los resultados obtenidos al momento de realizar diseños optimizados de RDAP.

Los resultados permiten concluir que los cambios geométricos obtenidos con los diseños optimizados, en términos de conectividad, centralidad, robustez y modularidad, no se ajustan a una metodología de optimización específica. Cada red tiene variaciones independientes al algoritmo de optimización utilizado, dando a entender que los cambios en las geometrías de los diseños optimizados obedecen más a la estructura topológica original de la red que a lo que sucede en realidad en términos hidráulicos dentro de los algoritmos de optimización.

Para el caso de clasificación de la red según su topología y función, se confirma que el esquema de clasificación propuesto por Hwang y Lansey (2017) es adecuado para la caracterización de redes de distribución y redes de transmisión (matrices) de agua potable. Dependiendo de la normativa de cada país, se puede ajustar los límites del diámetro promedio ponderado por la longitud para separar las redes de distribución con las redes de transmisión (matrices). Del mismo modo, el cálculo del coeficiente en mallado de la red R_m para las redes reducidas, se adapta de mejor manera a la realidad de las RDAP.

Las métricas de CNT, comúnmente utilizadas para la caracterización de redes complejas, sirven para realizar una clasificación inicial de la topología de las RDAP, no obstante, se debe tener presente que estas métricas no permiten sacar conclusiones hidráulicas ya que no tienen en cuenta los componentes de la red y lo que sucede en su interior desde el punto de vista hidráulico.

El esfuerzo por ajustar estas métricas mediante la implementación de pesos permite evaluar algunas características topológicas como la conectividad algebraica, la centralidad, la modularidad y la robustez en términos de características reales de las RDAP. Sin embargo, la formulación matemática de estas métricas es ajena a las ecuaciones de continuidad y masa, y las condiciones de frontera (demandas, tanques, niveles de los tanques, entre otras) que determinan el comportamiento de las redes de distribución de agua potable. No existe una relación simple de ver entre la geometría de la red y el resultado de su diseño optimizado; se recomienda realizar más comparaciones entre RDAP con mismos niveles de complejidad. Así mismo, las métricas espectrales de las redes (λ_2 y $\lambda\Delta$), por su formulación matemática, son muy sensibles a los pesos escogidos, se recomienda analizar otras formulaciones que se adapten mejor a las RDAP.

La evaluación geométrica de los diseños de la red mediante características básicas como las distribuciones de los diámetros, longitudes de tuberías, entre otras, sirven como indicadores simples para definir la complejidad y diversidad de las redes.

El cálculo de los centroides de la red permite comparar las distribuciones del volumen, los diámetros, la potencia y la potencia específica para diferentes tipos de diseños. No obstante, los resultados obtenidos muestran que no hay desplazamientos significativos entre los diseños originales y los diseños optimizados de las redes. Para la mayoría de las redes, los centroides de diámetro, volumen y potencia se concentran en el medio de la

topología, en cambio, el centroide de potencia específica tiende a ubicarse más cerca al tanque de alimentación.

Debido a que las redes de distribución de agua potable son redes espacialmente restringidas, se recomienda realizar una comparativa entre la topología de esta misma y la expansión urbana.

Como continuación a esta investigación, se recomienda realizar un análisis de sensibilidad en los parámetros de los diferentes algoritmos de optimización implementados en el análisis geométrico de las redes. Del mismo modo, comparar los resultados de optimización con algoritmos multiobjetivos que permitan diseñar RDAP de bajo costo, pero alta resiliencia (por ejemplo). En esta optimización multiobjetivo, comparar las geometrías de las RDAP.

Se recomienda analizar la trazabilidad de la red dada una topología. Estudiar diferentes trazados para los mismos nodos de demanda y comparar qué tanto influye el trazado y la topología inicial en los resultados de la optimización.

9. Referencias

- Albert, R., & Barabási, A. L. (2002). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74(1264), 553–554.
- Barabási, A. L. (2012). The network takeover. *Nature Physics*, 8(1), 14–16.
- Barabási, A. L., & Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks. *Science*. <https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509>
- Barabási, A. L., Towlson, E. K., & Cornelius, S. P. (2018). Course PHYS 5116: Complex Networks. Retrieved from Northeastern University, Network Science Institute website: <https://www.barabasilab.com/course>
- Barthelemy, M. (2003). Crossover from Scale-Free to Spatial Networks. *Europhysics Letters*, 63, 915–921.
- Barthélemy, M. (2011). Spatial networks. *Physics Reports*, 499(1–3), 1–101. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>
- Barthélemy, M., & Flammini, A. (2008). Modeling Urban street patterns. *Physical Review Letters*, 100(13), 3–6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.138702>
- Beckmann, M. J., & Kansky, K. J. (2006). Structure of Transportation Networks. Relationships between Network Geometry and Regional Characteristics. *Econometrica*. <https://doi.org/10.2307/1905669>
- Berardi, L., Ugarelli, R., Røstum, J., & Giustolisi, O. (2014). Assessing mechanical vulnerability in water distribution networks under multiple failures. *Water Resources Research*. <https://doi.org/10.1002/2013WR014770>
- Berche, B., Von Ferber, C., Holovatch, T., & Holovatch, Y. (2009). Resilience of public transport networks against attacks. *European Physical Journal B*, 71(1), 125–137. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2009-00291-3>
- Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., & Hwang, D. U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4–5), 175–308. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009>
- Boccelli, D. L., Tryby, M. E., Uber, J. G., Rossman, L. A., Zierolf, M. L., & Polycarpou, M. M. (2002). Optimal Scheduling of Booster Disinfection in Water Distribution Systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9496\(1998\)124:2\(99\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9496(1998)124:2(99))
- Bonacich, P. (1972). Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. *The Journal of Mathematical Sociology*, 2(1), 113–120.
- Buhl, J., Gautrais, J., Reeves, N., Solé, R. V., Valverde, S., Kuntz, P., & Theraulaz, G. (2006). Topological patterns in street networks of self-organized urban settlements. *European Physical Journal B*, 49(4), 513–522. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2006-00085-1>
- Cadini, F., Zio, E., & Petrescu, C. A. (2009). Using centrality measures to rank the importance of the components of a complex network infrastructure. *Lecture Notes in*

- Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 5508 LNCS, 155–167. https://doi.org/10.1007/978-3-642-03552-4_14
- Cardillo, A., Scellato, S., Latora, V., & Porta, S. (2006). Structural properties of planar graphs of urban street patterns. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 73(6), 1–8. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.066107>
- Carvalho, R., Buzna, L., Bono, F., Gutiérrez, E., Just, W., & Arrowsmith, D. (2009). Robustness of trans-European gas networks. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 80(1), 1–11. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.016106>
- Chase, D. V., & Ormsbee, L. E. (1993). Computer-generated pumping schedules for satisfying operational objectives. *Journal / American Water Works Association*.
- Cohen, R., Erez, K., Ben-Avraham, D., & Havlin, S. (2000). Resilience of the Internet to random breakdowns. *Physical Review Letters*. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4626>
- Costa, L. D. F., Rodrigues, F. A., Travieso, G., & Boas, P. R. V. (2007). Characterization of complex networks: A survey of measurements. *Advances in Physics*. <https://doi.org/10.1080/00018730601170527>
- Crucitti, P., Latora, V., & Marchiori, M. (2005). Locating Critical Lines in High-Voltage Electrical Power Grids. *Fluctuation and Noise Letters*, 05(02), L201–L208. <https://doi.org/10.1142/s0219477505002562>
- Csardi G, Nepusz T (2006). “The igraph software package for complex network research.” *InterJournal, Complex Systems*, 1695. <http://igraph.org>.
- Deuerlein, J. W. (2008). Decomposition Model of a General Water Supply Network. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134(6), 822–832.
- Diao, K., Butler, D., & Ulanicki, B. (2017). Fractality in water distribution networks. *Computing and Control for the Water Industry, Sheffield, September, 1*(September). <https://doi.org/10.15131/shef.data.5364151.v1>
- Diao, K., Zhou, Y., & Rauch, W. (2013). Automated Creation of District Metered Area Boundaries in Water Distribution Systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 139, 184–190. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)wr.1943-5452.0000247](https://doi.org/10.1061/(asce)wr.1943-5452.0000247)
- Erdős, P., & Rényi, A. (1959). On random graphs 1. *Publ. Math. Debrecen*.
- Erdős, P., & Rényi, A. (1960). On the evolution of random graphs. *Publication of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*.
- Estrada, E. (2006). Network robustness to targeted attacks. the interplay of expansibility and degree distribution. *European Physical Journal B*. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2006-00330-7>
- Everett, M. G., & Borgatti, S. P. (1998). Analyzing Clique Overlap. *Connections*, 21(1), 49–

61.

- Fortunato, S., & Barthélemy, M. (2007). Resolution limit in community detection. *PNAS*, *104*(1), 36–41. <https://doi.org/https://doi.org/10.1073/pnas.0605965104>
- Freeman, L. C. (1977). A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness. *Sociometry*, *40*(1), 35–41. <https://doi.org/10.2307/3033543>
- Freeman, L. C. (1978). Centrality in Social Networks Conceptual Clarification. *Social Networks*, *179*(1968), 215–239.
- Gao, J., Barzel, B., & Barabási, A. L. (2016). Universal resilience patterns in complex networks. *Nature*. <https://doi.org/10.1038/nature16948>
- Girvan, M., & Newman, M. (2002). Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *99*(12), 7821–7826. <https://doi.org/10.1073/pnas.122653799>
- Giustolisi, O., Berardi, L., & Laucelli, D. (2012). Optimal Water Distribution Network Design Accounting for Valve Shutdowns. *Journal of Water Resources Planning and Management*. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)wr.1943-5452.0000327](https://doi.org/10.1061/(asce)wr.1943-5452.0000327)
- Giustolisi, O., & Ridolfi, L. (2014a). A novel infrastructure modularity index for the segmentation of water distribution networks. *Water Resources Management*, *50*, 7648–7661. <https://doi.org/10.1002/2014WR016067>
- Giustolisi, O., & Ridolfi, L. (2014b). New Modularity-Based Approach to Segmentation of Water Distribution Networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, *140*. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)hy.1943-7900.0000916](https://doi.org/10.1061/(asce)hy.1943-7900.0000916)
- Giustolisi, O., Ridolfi, L., & Berardi, L. (2015). General metrics for segmenting infrastructure networks. *Journal of Hydroinformatics*, *17*(4), 505–517. <https://doi.org/10.2166/hydro.2015.102>
- Giustolisi, O., Ridolfi, L., & Simone, A. (2019). Tailoring Centrality Metrics for Water Distribution Networks. *Water Resources Research*, *55*(3), 2348–2369. <https://doi.org/10.1029/2018WR023966>
- Giustolisi, O., & Savic, D. (2010). Identification of segments and optimal isolation valve system design in water distribution networks. *Urban Water Journal*, *7*(1), 1–15. <https://doi.org/10.1080/15730620903287530>
- Giustolisi, O., Simone, A., & Ridolfi, L. (2017). Network structure classification and features of water distribution systems. *Water Resources Research*, *53*, 3407–3423. <https://doi.org/10.1002/2016WR020071>
- Gupta, R., & Prasad, T. D. (2002). Extended Use of Linear Graph Theory for Analysis of Pipe Networks. *Journal of Hydraulic Engineering*. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(2000\)126:1\(56\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(2000)126:1(56))
- Gutiérrez-Pérez, J. A., Herrera, M., Pérez-García, R., & Ramos-Martínez, E. (2013). Application of graph-spectral methods in the vulnerability assessment of water supply networks. *Mathematical and Computer Modelling*, *57*(7–8), 1853–1859. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.12.008>

- Hawick, K. A. (2012). Water Distribution Network Robustness and Fragmentation using Graph Metrics. *Proc. Int. Conf. on Water Resource Management (AfricaWRM 2012)*, 304–310. <https://doi.org/10.2316/p.2012.762-037>
- Hwang, H., & Lansey, K. (2017). Water Distribution System Classification Using System Characteristics and Graph-Theory Metrics. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 143(12), 04017071. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)wr.1943-5452.0000850](https://doi.org/10.1061/(asce)wr.1943-5452.0000850)
- Jacobs, P., & Goulter, I. (1988). Evaluation of methods for decomposition of water distribution networks for reliability analysis. *Civil Engineering Systems*, 5(2), 58–64. <https://doi.org/10.1080/02630258808970505>
- Jacobs, P., & Goulter, I. (1989). Optimization of redundancy in water distribution networks using graph theoretic principles. *Engineering Optimization*, 15(1), 71–82. <https://doi.org/10.1080/03052158908941143>
- Kesavan, H. K., & Chandrashekar, M. (1972). Graph-theoretic models for pipe network analysis. *J. Hydraul. Div., ASCE*.
- Kumar, A., & Kansal, M. L. (1999). *DETECTING ACCIDENTAL CONTAMINATIONS IN MUNICIPAL WATER NETWORKS*. 125(October), 308–310.
- Latora, V., & Marchiori, M. (2005). Vulnerability and protection of infrastructure networks. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 71(1), 1–4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.015103>
- Laucelli, D. B., Simone, A., Berardi, L., & Giustolisi, O. (2017). Optimal Design of District Metering Areas for the Reduction of Leakages. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 143(6), 04017017. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)wr.1943-5452.0000768](https://doi.org/10.1061/(asce)wr.1943-5452.0000768)
- Mala-Jetmarova, H., Barton, A., & Bagirov, A. (2015). A history of Water distribution systems and their optimisation. *Water Science and Technology: Water Supply*. <https://doi.org/10.2166/ws.2014.115>
- Mala-Jetmarova, H., Savic, D., & Sultanova, N. (2018). Lost in Optimisation of water distribution systems? A literature review of system design. *Water (Switzerland)*.
- Mala-Jetmarova, H., Sultanova, N., & Savic, D. (2017). Lost in optimisation of water distribution systems? A literature review of system operation. *Environmental Modelling and Software*. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2017.02.009>
- Masucci, A. P., Smith, D., Crooks, A., & Batty, M. (2009). Random planar graphs and the London street network. *European Physical Journal B*, 71(2), 259–271. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2009-00290-4>
- Meng, F., Fu, G., Farmani, R., Sweetapple, C., & Butler, D. (2018). Topological attributes of network resilience: A study in water distribution systems. *Water Research*, 143, 376–386. <https://doi.org/10.1016/j.watres.2018.06.048>
- Moreno, C., Rojas, D., & Saldarriaga, J. (2018). RELATION BETWEEN POPULATION DENSITY AND TOPOLOGY IN POTABLE WATER DISTRIBUTION NETWORKS Methodology Optimal Design of RDAP. *WDSA / CCWI 2018 Joint Conference*

- Proceedings*, 1. Retrieved from <https://ojs.library.queensu.ca/index.php/wdsa-ccw/article/view/12351>
- Nazempour, R., Monfared, M. A. S., & Zio, E. (2016). A complex network theory approach for optimizing contamination warning sensor location in water distribution networks. *International Journal of Disaster Risk Reduction*. <https://doi.org/10.1016/j.ijdrr.2018.04.029>
- Newman, M. (2004). Fast algorithm for detecting community structure in networks. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 69(6), 5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.066133>
- Newman, M. (2006). *Modularity and community structure in networks*. 103(23), 8577–8582. <https://doi.org/10.1073/pnas.0601602103>
- Newman, M. (2010). Networks: An Introduction. In *Networks: An Introduction*. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199206650.001.0001>
- Newman, M., & Girvan, M. (2004). Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 69(2 2), 1–15. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.026113>
- Nicklow, J., Reed, P., Savic, D., Dessalegne, T., Harrell, L., Chan-Hilton, A., ... Zechman, E. (2010). State of the Art for Genetic Algorithms and Beyond in Water Resources Planning and Management. *Journal of Water Resources Planning and Management*. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)WR.1943-5452.0000053](https://doi.org/10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0000053)
- Nieminen, U. J. (1974). On centrality in a graph. *Scandinavian Journal of Psychology*.
- Ormsbee, L., Lingireddy, S., & Chase, D. (2009). Optimal Pump Scheduling For Water Distribution Systems. *Mistaconference.Org*.
- Ostfeld, A., & Salomons, E. (2006). Conjunctive optimal scheduling of pumping and booster chlorine injections in water distribution systems. *Engineering Optimization*. <https://doi.org/10.1080/03052150500478007>
- Ostfeld, A., & Shamir, U. (1996). Design of Optimal Reliable Multiquality Water-Supply Systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 122(5), 322–333.
- Paez, D., & Fillion, Y. (2017). Generation and Validation of Synthetic WDS Case Studies Using Graph Theory and Reliability Indexes. *Procedia Engineering*, 186, 143–151. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.03.220>
- Peinado, C. (2016). *Ecuaciones de Costo para el Diseño Optimizado de Redes de Agua Potable y Alcantarillado*. Universidad de los Andes, Bogotá D.C.
- Perelman, L., & Ostfeld, A. (2011). Topological clustering for water distribution systems analysis. *Environmental Modelling and Software*, 26(7), 969–972. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2011.01.006>
- R Core Team (2013). R: A Language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL

<http://www.R-project.org/>.

- Rosas-Casals, M., Valverde, S., & Solé, R. V. (2007). Topological Vulnerability of the European Power Grid Under Errors and Attacks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(07), 2465–2475. <https://doi.org/10.1142/s0218127407018531>
- Rossman, Lewis A. (1994). EPANET users manual : project summary. Cincinnati, OH :U.S. Environmental Protection Agency, Risk Reduction Engineering Laboratory
- Saldarriaga, Juan. (2016). *Hidráulica de Tuberías, Abastecimiento de Agua, Redes y Riegos* (Third). Bogotá D.C.: ALFAOMEGA.
- Saldarriaga, J., Takahashi, S., Hernández, F., Díaz, D. M., & Ochoa, S. (2010). An Energy Methodology for the Design of Water Distribution Systems. En *World Environmental and Water Resources Congress 2010* (pp. 4303–4313). Providence, Rhode Island, United States: American Society of Civil Engineers. [https://doi.org/10.1061/41114\(371\)437](https://doi.org/10.1061/41114(371)437)
- Savić, D. A., Mala-Jetmarova, H., & Sultanova, N. (2018). History of Optimization in Water Distribution System Analysis. *WDSA / CCWI Joint Conference Proceedings*. Retrieved from <https://ojs.library.queensu.ca/index.php/wdsa-ccw/article/view/11973>
- Schaake, J., & Lai, F. H. (1969). Linear programming and dynamic programming application to water distribution network design. *M.I.T. -Dept Civ Eng-Hydrodynamics Laboratory-Report 116*.
- Scibetta, M., Boano, F., Revelli, R., & Ridolfi, L. (2013). Community detection as a tool for complex pipe network clustering. *EPL*. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/103/48001>
- Shamir, U. (1974). Optimal Design and Operation of Water Distribution Systems. *Water Resources Research*. <https://doi.org/10.1029/WR010i001p00027>
- Sheng, N., Jia, Y., Xu, Z., Ho, S. L., & Wai Kan, C. (2013). A complex network based model for detecting isolated communities in water distribution networks. *Chaos*, 23(4). <https://doi.org/10.1063/1.4823803>
- Shuang, Q., Zhang, M., & Yuan, Y. (2014). Node vulnerability of water distribution networks under cascading failures. *Reliability Engineering and System Safety*, 124, 132–141. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2013.12.002>
- Simone, A., Giustolisi, O., & Laucelli, D. B. (2016). A proposal of optimal sampling design using a modularity strategy. *Water Resources Research*, 52, 6171–6185. <https://doi.org/10.1002/2016WR018944>
- Simpson, A.R, Murphy, L. ., & Dandy, G. . (1993). Pipe network optimisation using genetic algorithms. *American Society of Civil Engineers*.
- Simpson, Angus R., Dandy, G. C., & Murphy, L. J. (1994). Genetic Algorithms Compared to Other Techniques for Pipe Optimization. *Journal of Water Resources Planning and Management*. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9496\(1994\)120:4\(423\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9496(1994)120:4(423))

- Soldi, D., Candelieri, A., & Archetti, F. (2015). Resilience and vulnerability in urban water distribution networks through network theory and hydraulic simulation. *Procedia Engineering*, 119(1), 1259–1268. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.08.990>
- Song, C., Gallos, L. K., Havlin, S., & Makse, H. A. (2007). How to calculate the fractal dimension of a complex network: The box covering algorithm. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2007/03/P03006>
- Todini, E. (2000). Looped water distribution networks design using a resilience index based heuristic approach. *Urban Water*, 2(2), 115–122. [https://doi.org/10.1016/S1462-0758\(00\)00049-2](https://doi.org/10.1016/S1462-0758(00)00049-2)
- Torres, J. M., Duenas-Osorio, L., Li, Q., & Yazdani, A. (2017). Exploring Topological Effects on Water Distribution System Performance Using Graph Theory and Statistical Models. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 143(1), 04016068. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)wr.1943-5452.0000709](https://doi.org/10.1061/(asce)wr.1943-5452.0000709)
- Travers, J., & Milgram, S. (1969). An Experimental Study of the Small World Problem. *Sociometry*. <https://doi.org/10.2307/2786545>
- Vargas, K., & Saldarriaga, J. (2019). Analysis of Fractality in Water Distribution Networks Using Hydraulic Criteria. *World Environmental and Water Resources Congress 2019*, 564–572. <https://doi.org/10.1061/9780784482353.054>
- Walski, T. M., Brill, E. D., Gessler, J., Goulter, I. C., Jeppson, R. M., Lansey, K., ... Ormsbee, L. (2008). Battle of the Network Models: Epilogue. *Journal of Water Resources Planning and Management*. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9496\(1987\)113:2\(191\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9496(1987)113:2(191))
- Wasserman, S., & Faust, K. (1994). Social network analysis: methods and applications II. In *American Ethnologist*. <https://doi.org/10.1525/ae.1997.24.1.219>
- Watts, D., & Strogatz, S. (1998). Collective dynamics of networks. *Nature*, 393, 440–442.
- Yates, D. F., Templeman, A. B., & Boffey, T. B. (1984). The computational complexity of the problem of determining least capital cost designs for water supply networks. *Engineering Optimization*. <https://doi.org/10.1080/03052158408960635>
- Yazdani, A., & Jeffrey, P. (2010). *A complex network approach to robustness and vulnerability of spatially organized water distribution networks*. 1–18. Retrieved from <http://arxiv.org/abs/1008.1770>
- Yazdani, A., & Jeffrey, P. (2011). Complex network analysis of water distribution systems. *Chaos*, 21(1). <https://doi.org/10.1063/1.3540339>
- Yazdani, A., & Jeffrey, P. (2012a). Applying Network Theory to Quantify the Redundancy and Structural Robustness of Water Distribution Systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 138(2), 153–161. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)wr.1943-5452.0000159](https://doi.org/10.1061/(asce)wr.1943-5452.0000159)
- Yazdani, A., & Jeffrey, P. (2012b). *Robustness and Vulnerability Analysis of Water Distribution Networks Using Graph Theoretic and Complex Network Principles*. [https://doi.org/10.1061/41203\(425\)85](https://doi.org/10.1061/41203(425)85)



- Yazdani, A., & Jeffrey, P. (2012c). Water distribution system vulnerability analysis using weighted and directed network models. *Water Resources Research*, 48(6), 1–10. <https://doi.org/10.1029/2012WR011897>
- Yazdani, A., Otoo, R. A., & Jeffrey, P. (2011). Resilience enhancing expansion strategies for water distribution systems: A network theory approach. *Environmental Modelling and Software*, 26(12), 1574–1582. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2011.07.016>
- Wu, I. P. (1975). Design on Drip Irrigation Main Lines. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*.