

Universidad de los Andes  
Facultad De Ingeniería  
Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental



**Tesis 2**

**Estudio del comportamiento de resaltos hidráulicos en tuberías  
parcialmente llenas de sección circular, con Números de Froude  
supercríticos menores a 4**

Preparado por:  
Ing. Laura Elizabeth Montaña Luna

Asesor:  
Ing. Juan Saldarriaga

**Informe Final Proyecto de grado**

**Bogotá, Junio 2013**

## Agradecimientos

Para culminar cualquier trabajo se requiere de dedicación, esfuerzos y sacrificios, los cuales son superados gracias a todas aquellas personas que de una u otra forma fueron un apoyo en la escalera para culminar con éxito esta etapa. Por esta razón quiero agradecer primero que todo a Dios que me ha permitido ir avanzado poco a poco en mi proyecto de vida, a mis padres que han sido siempre un apoyo incondicional y mi fuerza en el camino, a mi asesor de tesis Juan Saldarriaga, quien me fue orientando poco a poco hasta obtener el resultado de éste proyecto, a Jaysson Guerrero por acompañarme desde un inicio en ésta etapa, a John Calvo por brindarme el tiempo y la dedicación en el Laboratorio de Hidráulica, y finalmente a CIACUA y a todas aquellas personas que de una u otra forma participaron en éste proyecto, dedicándome su tiempo, su amistad y colaboración.

## Tabla de contenido

Índice de Tablas .....	IV
Índice de Ilustraciones.....	VI
Índice de Ecuaciones.....	VII
Notación .....	X
1. Introducción .....	1
1.1 Objetivos.....	3
1.1.1.    Objetivo General.....	3
1.1.2.    Objetivos Específicos .....	3
2. Antecedentes .....	4
3. Marco Teórico .....	29
3.1.    Resaltos Hidráulicos.....	29
3.1.1.    Definición .....	29
3.1.2.    Tipos de Resaltos Hidráulicos.....	30
3.1.3.    Cálculo de profundidades subsecuentes en el Resalto Hidráulico.....	31
3.1.4.    Análisis del comportamiento del resalto hidráulico.....	35
4. Diseño del modelo.....	37
4.1.    Ubicación.....	37
4.2.    Proceso de diseño.....	37
4.3.    Aparatos de medición .....	38
4.3.1.    Sensor Ultrasónico U – GAGE T30.....	38
4.3.2.    ADV (Velocímetro Doppler acústico).....	39
4.3.3.    Piezómetros.....	40
4.3.4.    Caudalímetro .....	41
4.4.    Metodología y proceso de medición .....	41
4.4.1.    Profundidad del flujo .....	41
4.4.1.1.    Parámetros de medición .....	41
4.4.1.2.    Metodología de medición.....	42
4.4.1.3.    Lista de caudales y pendientes .....	42

---

4.4.2.	Distribución de velocidades.....	46
4.4.2.1.	<i>Parámetros de medición</i> .....	46
4.4.2.2.	<i>Metodología de medición</i> .....	46
4.4.2.3.	<i>Lista de caudales y pendientes</i> .....	46
5.	Pruebas de verificación de los parámetros hidráulicos de la tubería.....	48
5.1.	Comprobación de Diseño .....	48
5.2.	Análisis caudales máximos para diferentes pendientes .....	51
5.3.	Análisis del valor máximo del Número de Froude .....	52
5.4	Análisis Comparativo con otros autores para el cálculo de la profundidad subsecuente al resalto hidráulico .....	56
5.4.1	Silvester.....	56
5.4.2	Straub .....	61
5.4.3	French .....	62
5.4.4	Hager.....	65
5.4.5	FHWA.....	68
5.4.5	Conclusiones .....	71
5.5	Análisis comparativo con otros autores para el cálculo de la longitud del resalto hidráulico	72
5.5.1	Silvester.....	72
5.5.2	Hager.....	74
5.5.3	FWHA.....	74
6.	Resultados y Análisis de Resultados .....	76
6.1.	Resultados.....	76
6.1.1.	Registro Fotográfico.....	76
6.1.2.	Profundidad de flujo .....	78
6.1.3.	Longitud del resalto hidráulico.....	80
6.1.4.	Distribución de Velocidades .....	84
6.2.	Análisis de Resultados .....	87
6.2.1.	Análisis profundidades subsecuentes .....	87
6.2.2.	Análisis del comportamiento de la Energía en el resalto hidráulico.....	92
6.2.3.	Análisis Conservación del Momentum.....	96

---

6.2.4.	Comparación entre los resultados empíricos y teóricos de las profundidades subsecuentes.....	99
6.2.5.	Ecuación profundidades subsecuentes en el Resalto Hidráulico.....	101
6.2.6.	Análisis del comportamiento de la longitud en el Resalto Hidráulico .....	102
6.2.7.	Comparación entre los resultados empíricos y teóricos de la longitud del resalto hidráulico.....	105
6.2.8.	Ecuación longitud del resalto hidráulico para tuberías circulares .....	105
6.2.9.	Análisis de disipación de energía en el Resalto Hidráulico .....	105
6.2.10.	Análisis del comportamiento de la distribución de velocidades en el resalto hidráulico.....	107
7.	Conclusiones .....	112
8.	Recomendaciones.....	113
8.1.	Recomendaciones de diseño .....	113
8.2.	Recomendaciones para futuras pruebas .....	113
9.	Glosario .....	114
10.	Bibliografía.....	115
11.	Anexos.....	117
11.1.	Cálculo de la profundidad normal del flujo .....	118
11.2.	Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico mediante el método desarrollado por Silvester .....	121
11.3.	Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico por el Método desarrollado por French .....	124
11.4.	Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico por el Método desarrollado por Hager .....	126
11.5.	Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico por el Método desarrollado por FHWA. ....	128

## Índice de Tablas

Tabla 1. Valores de k' dependiendo de la relación de llenado (Silvester, 1964).....	10
Tabla 2. Coeficientes para tuberías circulares horizontales (FHWA, 2006).....	27
Tabla 3. Tipos de Resaltos Hidráulicos en fondos sin pendiente (Gonzales Rodríguez, 1992).....	30
Tabla 4. Lista de caudales y pendientes. ....	42
Tabla 5. Lista de caudales y pendientes para el análisis del comportamiento de la velocidad. ....	46
Tabla 6. Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 50 % . ....	50
Tabla 7. Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 85 % . ....	50
Tabla 8. Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 92.9 % . ....	51
Tabla 9. Valores de k' dependiendo de la relación de llenado (Silvester, 1964).....	57
Tabla 10. Cálculo de la profundidad subsecuente para una pendiente del 1.9%.....	57
Tabla 11. Cálculo de la profundidad subsecuente para una pendiente del 3.1%.....	58
Tabla 12. Cálculo de la profundidad subsecuente para un caudal de 0.01 m <sup>3</sup> /s.....	59
Tabla 13. Cálculo de la profundidad subsecuente para un caudal de 0.1 m <sup>3</sup> /s.....	60
Tabla 14. Cálculo de la profundidad subsecuente para una pendiente de 0.019 mediante la metodología planteada por Straub.....	62
Tabla 15. Cálculo de la profundidad subsecuente para una pendiente de 0.031 mediante la metodología planteada por Straub.....	62
Tabla 16. Resultados obtenidos mediante la metodología de French para una S = 0.019. ....	64
Tabla 17. Resultados obtenidos mediante la metodología de French para una S = 0.031. ....	64
Tabla 18. Resultados obtenidos para una pendiente de 0.019 con la metodología planteada por Hager.....	65
Tabla 19. Resultados obtenidos para una pendiente de 0.031 con la metodología planteada por Hager.....	66
Tabla 20. Resultados de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico para la aproximación teórica con una pendiente de 0.019. ....	67
Tabla 21. Resultados de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico para la aproximación teórica con una pendiente de 0.031. ....	67
Tabla 22. Resultados para el cálculo de la profundidad subsecuente del resalto mediante la metodología planteada por la FHWA, para una pendiente de 0.019.....	69
Tabla 23. Resultados para el cálculo de la profundidad subsecuente del resalto mediante la metodología planteada por la FHWA, para una pendiente de 0.031.....	69
Tabla 24. Cálculo de la longitud mediante la metodología planteada por Silvester. ....	73
Tabla 25. Cálculo longitudes en el resalto hidráulico de acuerdo con la metodología planteada por Hager. ....	74

---

Tabla 26. Cálculo de la longitud del resalto con la metodología de FWHA.....	75
Tabla 27. Registro fotográfico del resalto hidráulico para caudales cercanos a 30 L/s. ....	76
Tabla 28. Comportamiento de la velocidad de las partículas en diferentes secciones transversales para $S = 1.2\%$ y $Q = 24$ L/s.....	84
Tabla 29. Comportamiento de la velocidad de las partículas en diferentes secciones verticales para $S$ $= 1.2\%$ y $Q = 24$ L/s.....	85
Tabla 30. Comportamiento de la velocidad de las partículas en diferentes secciones transversales para $S = 1.6\%$ y $Q = 24$ L/s.....	86
Tabla 31. Comportamiento de la velocidad de las partículas en diferentes secciones verticales para $S$ $= 1.6\%$ y $Q = 24$ L/s.....	87
Tabla 32. Ecuaciones sin corrección que describen el comportamiento del resalto hidráulico en tuberías.....	93
Tabla 33. "m" y "k" para cada pendiente. ....	94
Tabla 34. Ecuaciones sin corrección que describen el comportamiento del resalto hidráulico en tuberías.....	97
Tabla 35. "m" y "k" para cada pendiente.....	98
Tabla 36. Error cuadrático medio para las diferentes ecuaciones evaluadas.....	100
Tabla 37. Rango de validez de la Ecuación 84 y la Ecuación 85. ....	100
Tabla 38. Error cuadrático medio para las diferentes ecuaciones evaluadas.....	105
Tabla 39. Comportamiento de la distribución de la velocidad en el resalto hidráulico. ....	108

## Índice de Ilustraciones

Ilustración 1. Montaje realizado por Kindsvater y Lane (Kindsvater, 1938).....	4
Ilustración 2. Montaje de Kalinske y Robertson (Robertson & Kalinske, 1943).....	5
Ilustración 3. Datos típicos de profundidades y presiones en un Resalto Hidráulico (Robertson & Kalinske, 1943). .....	7
Ilustración 4. Diagrama de niveles en la tubería. ....	15
Ilustración 5. Vista lateral de diferentes resaltos hidráulicos (Stahl & Hager, 1999). ....	19
Ilustración 6. Vista en perfil de los diferentes tipos de Resalto Hidráulico (Stahl & Hager, 1999)..	20
Ilustración 7. Longitudes del resalto hidráulico planteadas por Hager (Stahl & Hager, 1999).....	20
Ilustración 8. Resalto Hidráulico (Akan, 2006). ....	29
Ilustración 9. Profundidad subsecuente menor al diámetro de la tubería (Ghamry, Shames, & Branch, 2002). .....	29
Ilustración 10. Profundidad subsecuente mayor al diámetro de la tubería (Ghamry, Shames, & Branch, 2002). .....	29
Ilustración 11. Tipos de Resaltos Hidráulicos (Gonzales Rodríguez, 1992).....	31
Ilustración 12. Canal donde su ubicó el montaje.....	37
Ilustración 13. Vista dentro de la tubería. ....	38
Ilustración 14. Vista de la compuerta con el neumático.....	38
Ilustración 15. Vista de la compuerta en el montaje. ....	38
Ilustración 16. Vista perfil de la compuerta. ....	38
Ilustración 17. Características del U - GAGE T30 (Banner Engineering). .....	39
Ilustración 18. U - GAGE T30. ....	39
Ilustración 19. ADV (SonTek, 2012). ....	40
Ilustración 20. Adaptación del ADV en la tubería. ....	40
Ilustración 21. Piezómetros en la tubería. ....	41
Ilustración 22. Caudalímetro ABB. ....	41
Ilustración 23. Matriz geométrica de medición de la Distribución de Velocidades. ....	46

## Índice de Ecuaciones

Ecuación 1. Ecuación para hallar la ecuación de fuerza del resalto (Silvester, 1964). .....	8
Ecuación 2. Ecuación para hallar la fuerza del resalto (Silvester, 1964). .....	8
Ecuación 3. Número de Froude.....	8
Ecuación 4. Proceso para encontrar profundidades subsecuentes.....	8
Ecuación 5. Proceso para hallar profundidades subsecuentes.....	8
Ecuación 6. Ecuación 5 reorganizada.....	8
Ecuación 7. Relación Número de Froude (Silvester, 1964). .....	9
Ecuación 8. Número de Froude aguas abajo del resalto.....	9
Ecuación 9. Proceso para encontrar las profundidades subsecuentes en cualquier forma de canal. ...	9
Ecuación 10. Profundidades subsecuentes para cualquier tipo de canal (Silvester, 1964). .....	9
Ecuación 11. Valor de la proporción entre la profundidad de llenado y el centro de masa para tuberías parcialmente llenas (Silvester, 1964).....	10
Ecuación 12. Profundidades subsecuentes para tuberías parcialmente llenas (Silvester, 1964). .....	10
Ecuación 13. Valor de la proporción entre la profundidad de llenado y el centro de gravedad para tuberías llenas (Silvester, 1964). .....	10
Ecuación 14. Profundidades subsecuentes para tuberías llenas (Silvester, 1964).....	10
Ecuación 15. Longitud de un resalto hidráulico para cualquier tipo de sección (Silvester, 1964)....	11
Ecuación 16. Cálculo del Momentum en Resaltos Hidráulicos (Rajaratnam, 1965). .....	12
Ecuación 17. Conservación del Momentum (Rajaratnam, 1965).....	13
Ecuación 18. Ecuación del Número de Froude según Rajaratnam (Rajaratnam, 1965). .....	13
Ecuación 19. Conservación del Momentum (Rajaratnam, 1965).....	13
Ecuación 20. Cálculo de la profundidad crítica. ....	14
Ecuación 21. Aproximación Número de Froude (French, 2007). .....	14
Ecuación 22. Cálculo profundidad subsecuente para Números de Froude menores a 1.7 (French, 2007). .....	14
Ecuación 23. Cálculo profundidad subsecuente para Números de Froude mayores a 1.7 (French, 2007). .....	14
Ecuación 24. Cálculo del Momentum. (French, 2007). .....	15
Ecuación 25. Distancia del centro de la tubería de agua. ....	15
Ecuación 26. Distancia del centro de la tubería al centroide de masa de agua. ....	16
Ecuación 27. Distancia desde la superficie de agua hasta el centroide de la masa de agua. ....	16
Ecuación 28. Igualando Momentums. ....	16
Ecuación 29. Aproximación del área (Stahl & Hager, 1999).....	16
Ecuación 30. Aproximación Presión (Stahl & Hager, 1999). .....	16
Ecuación 31. Ecuación del Momentum (Stahl & Hager, 1999). .....	17
Ecuación 32. Aproximación del Número de Froude (Hager, 1990).....	17
Ecuación 33. Proceso para encontrar la profundidad subsecuente del resalto hidráulico. ....	17

---

Ecuación 34. Relación entre las relaciones de llenado aguas arriba y aguas abajo del resalto (Stahl & Hager, 1999).....	17
Ecuación 35. Proceso para encontrar la profundidad subsecuente en un resalto hidráulico. ....	18
Ecuación 36. Profundidad subsecuente en el resalto hidráulico (Stahl & Hager, 1999).....	18
Ecuación 37. Profundidad subsecuente con Números de Froude mayores a 2 (Stahl & Hager, 1999). .....	18
Ecuación 38. Profundidad subsecuente para Números de Froude mayores a 2 (Stahl & Hager, 1999). ....	19
Ecuación 39. Relación entre la longitud de recirculación y la profundidad aguas abajo del resalto (Stahl & Hager, 1999). ....	21
Ecuación 40. Determinación de la longitud de recirculación a partir del Número de Froude. ....	21
Ecuación 41. Relación entre la longitud de aireación y la profundidad aguas abajo del resalto (Stahl & Hager, 1999).....	21
Ecuación 42. Determinación de la longitud de aireación a partir del Número de Froude (Stahl & Hager, 1999).....	21
Ecuación 43. Estimación para resaltos Ondulares Tipo C y D (Gargano & Hager, 2002). ....	22
Ecuación 44. Sumergencia en la compuerta (Ghamry, Shames, & Branch, 2002).....	23
Ecuación 45. Sumergencia (Ghamry, Shames, & Branch, 2002). ....	23
Ecuación 46. Cálculo Momentum Específico en Canales Rectangulares (Akan, 2006).....	24
Ecuación 47. Procedimiento cálculo altura subsecuente de los resaltos hidráulicos en canales rectangulares (Akan, 2006). ....	24
Ecuación 48. Caudal por unidad de ancho. ....	24
Ecuación 49. Procedimiento cálculo profundidades subsecuentes.....	25
Ecuación 50. Conservación de la masa. ....	25
Ecuación 51. Cálculo velocidad aguas abajo a partir de los parámetros aguas arriba. ....	25
Ecuación 52. Cálculo profundidades subsecuentes en canales rectangulares. ....	26
Ecuación 53. Cálculo profundidad subsecuente para profundidades subsecuentes menores al diámetro (FHWA, 2006). ....	26
Ecuación 54. Cálculo profundidad subsecuente para profundidades subsecuentes mayores al diámetro (FHWA, 2006). ....	27
Ecuación 55. Determinación de la longitud del resalto cuando la profundidad aguas abajo es menor al diámetro. (FHWA, 2006) ....	28
Ecuación 56. Determinación longitud del resalto cuando la profundidad aguas abajo es mayor al diámetro (FHWA, 2006). ....	28
Ecuación 57. Conservación del Momentum Específico.....	31
Ecuación 58. Dimensiones del Resalto Hidráulico en canales cuadrados reorganizada (SMITH & CHEN, 1989).....	32
Ecuación 59. Profundidad subsecuente en el resalto hidráulico (Stahl & Hager, 1999). ....	34
Ecuación 60. Profundidad subsecuente con Números de Froude mayores a 2 (Stahl & Hager, 1999). .....	34

---

Ecuación 61. Cálculo de la intensidad de la turbulencia (Lopardo, 2012).....	36
Ecuación 62. Cálculo del parámetro adimensional para determinar la turbulencia del resalto hidráulico (Lopardo, 2012). .....	36
Ecuación 63. Cálculo de la relación de llenado.....	48
Ecuación 64. Cálculo de $\theta$ .....	48
Ecuación 65. Cálculo del área mojada. ....	48
Ecuación 66. Cálculo del perímetro mojado. ....	48
Ecuación 67. Cálculo del radio hidráulico. ....	49
Ecuación 68. Cálculo de la velocidad. ....	49
Ecuación 69. Cálculo del caudal. ....	49
Ecuación 70. Cálculo del Número de Reynoldls.....	49
Ecuación 71. Cálculo del ancho de la superficie.....	49
Ecuación 72. Cálculo de la profundidad hidráulica. ....	49
Ecuación 73. Cálculo del Número de Froude.....	49
Ecuación 74. Cálculo de la altura total del soporte. ....	49
Ecuación 75. Curva que describe el Número de Froude máximo. ....	56
Ecuación 76. Cálculo de la profundidad crítica. ....	61
Ecuación 77. Aproximación Número de Froude (French, 2007). ....	61
Ecuación 78. Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico por un método iterativo de acuerdo con la metodología planteada por Hager. ....	65
Ecuación 79. Aproximación teórica para cálculos de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico.....	66
Ecuación 80. Aproximación empírica para el cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico.....	67
Ecuación 81. Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico menor al diámetro. ....	69
Ecuación 82. Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico mayor al diámetro. ....	69
Ecuación 83. Relación entre el caudal y la gravedad y el diámetro de la tubería. (Sturm, 2010).....	89
Ecuación 84. Ecuación empírica de la profundidad subsecuente para $y_2 < D$ . ....	91
Ecuación 85. Ecuación empírica de la profundidad subsecuente para $y_2 > D$ . ....	91
Ecuación 86. Ecuación empírica de la profundidad subsecuente de acuerdo a la Energía Específica. .....	95
Ecuación 87. Ecuación empírica de la profundidad subsecuente de acuerdo al Momentum Específico. ....	99
Ecuación 88. Cálculo del Error Cuadrático Medio. ....	99
Ecuación 89. Cálculo del Error Cuadrático Medio Promedio. ....	99
Ecuación 90. Ecuación lineal para determinar la longitud del resalto hidráulico en tuberías. ....	104
Ecuación 91. Ecuación potencial para determinar la longitud del resalto hidráulico en tuberías. ..	104
Ecuación 92. Ecuación para determinar el valor de la disipación de energía. ....	107
Ecuación 93. Cálculo disipación de Energía.....	114

## Notación

SÍMBOLO	UNIDADES S.I.	DEFINICIÓN
$A$	$m^2$	Área mojada de la sección.
$d$	$m$	Diámetro de la tubería.
$\Delta E$	$\%$	Disipación de Energía relativa respecto a la energía aguas arriba.
$E_1$	$m$	Energía específica aguas arriba del resalto.
$E_2$	$m$	Energía específica aguas abajo del resalto.
$F_1$	-	Número de Froude aguas arriba del resalto.
$g$	$m/s^2$	Aceleración de la gravedad.
$L$	$m$	Longitud del resalto hidráulico.
$M_1$	$m^3$	Momentum específico aguas arriba del resalto hidráulico.
$M_2$	$m^3$	Momentum específico aguas abajo del resalto hidráulico.
$P$	$m$	Perímetro mojado de la sección.
$Q$	$m^3/s$	Caudal.
$R^2$	$\%$	Coefficiente de determinación.
$Re$	-	Número de Reynolds.
$S$	-	Pendiente de la tubería.
$v$	$m/s$	Velocidad del flujo.
$v_x$	$m/s$	Componente de la velocidad en la dirección longitudinal.
$v_y$	$m/s$	Componente de la velocidad en la dirección transversal.
$v_z$	$m/s$	Componente de la velocidad en la dirección vertical.
$y_c$	$m$	Profundidad crítica del flujo.
$y_n$	$m$	Profundidad normal del flujo.
$y_1$	$m$	Profundidad subsecuente aguas arriba del resalto
$y_2$	$m$	Profundidad subsecuente aguas abajo del resalto

## 1. Introducción

---

El estudio del fenómeno de resaltos hidráulicos en tuberías ha sido un tema de baja investigación a nivel nacional e internacional dada la dificultad de su análisis. Sin embargo, dada la importancia de analizar los alcantarillados y sus fenómenos de sobrecarga, es importante realizar un estudio para definir ciertas características de los resaltos hidráulicos en tuberías fluyendo parcialmente llenas.

El resalto hidráulico es un fenómeno generado cuando la profundidad del flujo varía rápidamente; es decir, cuando en un canal (abierto o cerrado) existe un cambio de flujo supercrítico a subcrítico. Éste fenómeno ocurre por la presencia de altas pendientes u obstáculos (como las compuertas) que generan un aumento importante del flujo aguas abajo, afectando las condiciones del flujo aguas arriba. Adicionalmente, cuando los Números de Froude sean más grandes (flujo supercrítico), la altura subsecuente aguas abajo del resalto será mayor.

Las principales características de un resalto hidráulico son: las pérdidas de energía, la longitud del resalto y su localización. Las pérdidas de energía son causadas por la turbulencia generada en el resalto, y se calculan como la diferencia de energía específica entre el flujo aguas abajo del resalto y el flujo aguas arriba. La longitud del resalto se mide desde el lugar donde inicia la turbulencia hasta el lugar donde finaliza: según la literatura encontrada, existen relaciones empíricas que permiten encontrar la longitud del resalto hidráulico dependiendo del Número de Froude y de la altura del flujo aguas arriba del resalto en canales rectangulares, trapeciales, triangulares y en el caso de tuberías circulares, se encontró una ecuación empírica en el artículo de Silvester (Silvester, 1964) con un rango de validez muy pequeño, dada la dificultad de medir resaltos cuando la tubería se presuriza. Por último, la localización del resalto varía de acuerdo con el impacto que genere el obstáculo que se encuentre aguas abajo, por lo tanto, es una variable que en estudios del resalto en el laboratorio puede ser modificada.

Por lo tanto, el presente trabajo presenta un estudio de resaltos hidráulicos en tuberías, el cual se realiza en un modelo realizado en el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Los Andes. El diseño y construcción del modelo se realizaron previamente a este trabajo, por lo cual, en éste proyecto se muestran los resultados de la construcción previa y sus modificaciones para ubicar aparatos que permitan realizar la medición de las variables a estudiar. Adicionalmente, presenta una revisión bibliográfica de estudios anteriores en el tema, una comparación de las diferentes metodologías planteadas, y un estudio de los resultados esperados en el modelo construido.

El Capítulo 2 presenta todos los estudios y metodologías planteadas previamente para el análisis de resaltos hidráulicos en tuberías, presentando gráficas y ecuaciones desarrolladas. El Capítulo 3 explica el fenómeno de los resaltos hidráulicos en tuberías, los diferentes tipos de resaltos hidráulicos planteados y las diferentes características que puede tener este fenómeno. En el Capítulo 4 se muestra el resultado del diseño y construcción del montaje, los aparatos de medición requeridos para la toma de datos de las variables a analizar, y la metodología que se llevará a cabo en el proceso de análisis. En el siguiente capítulo se realiza un análisis para determinar los comportamientos esperados en el resalto hidráulico, determinando profundidades que generarán un resalto hidráulico más fuerte, y un análisis teórico de las metodologías encontradas en el Capítulo 2, tanto para el cálculo de la profundidad subsecuente aguas abajo del resalto como para el cálculo de la longitud del mismo. En el Capítulo 6 se

---

encuentran los resultados obtenidos con los datos tomados para las variables medidas ( $y_1$ ,  $y_2$ ,  $L$ )<sup>1</sup>, mediante gráficos e ilustrando los perfiles del flujo cuando la profundidad aguas abajo del resalto es mayor al diámetro de la tubería; en este capítulo también se muestra el análisis de los resultados obtenidos, mediante la comparación con las metodologías analizadas previamente y gráficos que permitan inferir el comportamiento del resalto hidráulico en la tubería. En el Capítulo 7 y 8 se describen algunas conclusiones mostradas en el proyecto y las recomendaciones que se plantearán para futuras investigaciones en el tema. En el siguiente capítulo se presenta un glosario con los términos importantes llevados a cabo en el proyecto, y posteriormente se presenta la bibliografía requerida e investigada, y finalmente en el Capítulo 11 se presentan los anexos, los cuales se componen de diferentes códigos desarrollados en Macros de Excel, y los planos diseñados y requeridos para la construcción del montaje.

---

<sup>1</sup> Ir a la página X.

---

## 1.1 Objetivos

---

### 1.1.1. Objetivo General

Estudiar el comportamiento de los resaltos hidráulicos en tuberías fluyendo parcialmente llenas de sección circular mediante la toma de datos experimentales en el modelo físico construido anteriormente. El estudio se realizará teniendo como restricción Números de Froude menores a 4.0 y pendientes menores al 2.5%.

### 1.1.2. Objetivos Específicos

Para llevar a cabo el estudio de resaltos hidráulicos en tuberías se requiere realizar una recopilación bibliográfica de modelos y estudios realizados anteriormente, analizando las metodologías encontradas en esta recopilación, y aplicarlas a las condiciones físicas que tiene el montaje realizado.

Adicionalmente, se deben determinar las variables que se trabajarán en el modelo, las cuales deben cumplir con las condiciones físicas e hidráulicas de este; y con las variables identificadas, se debe proceder a realizar la toma de datos en el modelo, las cuales deben permitir realizar un análisis del comportamiento de los resaltos hidráulicos en tuberías. Es importante tener en cuenta que el modelo se debe adaptar para la ubicación de los sensores, por lo cual, se requiere un diseño de las modificaciones necesarias para medir los diferentes parámetros.

Por otra parte, se determinarán ecuaciones empíricas que describan el comportamiento de los resaltos hidráulicos en las tuberías, mostrando la diferencia de éstas ecuaciones empíricas respecto a las ecuaciones encontradas en la literatura, con lo cual se obtendrán las herramientas suficientes para determinar el comportamiento de los resaltos hidráulicos.

## 2. Antecedentes

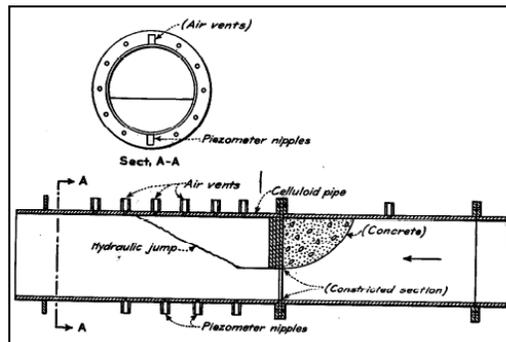
Los antecedentes mostrados a continuación se encuentran en la tesis de pregrado denominada “Diseño y construcción de un modelo para estudiar el comportamiento de resaltos hidráulicos en tuberías fluyendo parcialmente llenas de sección circular, con Números de Froude supercríticos menores a 4” (Montaño Luna, 2012).

El proceso para entender la formación y el comportamiento de resaltos hidráulicos en tuberías ha sido estudiando experimental y teóricamente. En éste capítulo se mostrarán los diferentes estudios que han trabajado algunos investigadores para entender el fenómeno.

### *Kindsvater y Lane (1938)*

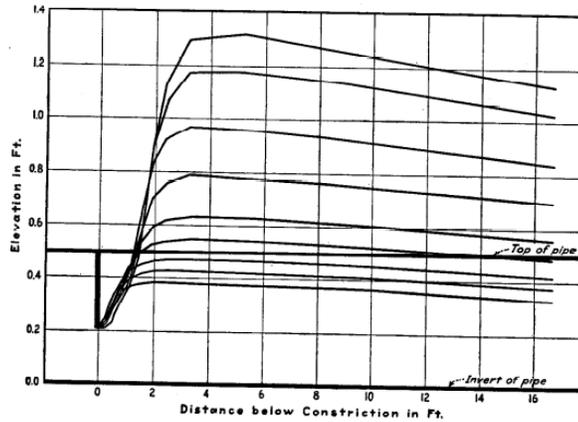
El primer análisis de resaltos hidráulicos en tuberías circulares fluyendo parcialmente llenas fue realizado por Kindsvater y Lane en el año 1938, a raíz de los estudios que se venían realizando de resaltos hidráulicos en canales rectangulares.

Kindsvater y Lane, en la Universidad de Iowa, establecieron que la mejor forma para analizar el comportamiento de resaltos hidráulicos en tuberías circulares, era mediante análisis experimentales; por lo tanto, para su montaje usaron una tubería transparente de 150 mm de diámetro y 6 m de longitud en posición horizontal. Los resaltos hidráulicos los produjeron con 3 obstrucciones: la primera que ocupaba el 40% del diámetro, la segunda el 60% y la tercera el 80% del diámetro. (Ver Ilustración 1).



**Ilustración 1.** Montaje realizado por Kindsvater y Lane (Kindsvater, 1938).

La variación del nivel del agua era medida mediante piezómetros aguas abajo de las constricciones; por lo tanto, se podía analizar la variación de la altura del resalto a medida que aumentaba o disminuía el caudal de entrada, y la longitud a la cual ocurría tal como se muestra en la Gráfica 1.



Gráfica 1. Alturas medidas con caudal variable (Kindsvater, 1938).

Kindsvater y Lane concluyeron que con caudales muy bajos, la tubería no se alcanzaba a presurizar aguas abajo del resalto; mientras que a caudales grandes, el resalto presurizaba completamente la tubería. También, como el montaje tenía ventilación, el aire aumentaba la presión sobre la superficie del agua, lo cual hacía que el resalto se moviera hacia la contracción y lo terminara ahogando.

Finalmente, como los análisis de resaltos hidráulicos se basan en la variación del Momentum aguas arriba y aguas abajo de la contracción, Kindsvater y Lane observaron que el Momentum era relativamente mayor aguas arriba de la contricción que aguas abajo; a lo que argumentaban la fricción causada por la tubería, la falta de uniformidad de la velocidad aguas abajo del resalto y la omisión de las burbujas de agua en los cálculos del Momentum.

**Kalinske y Robertson (1943)**

Posteriormente, en 1943, Kalinske y Robertson estudiaron la salida de paquetes de aire como consecuencia de la formación de resaltos hidráulicos en tuberías con pendiente; su montaje consistió en una tubería de diámetro de 150 mm, y aproximadamente 10 m de longitud; y las pendientes que estudiaron fueron de 0.2%, 2%, 5%, 10%, 20% y 30%. En la Ilustración 2 se puede observar el montaje para pendientes del 2% y el 30%.

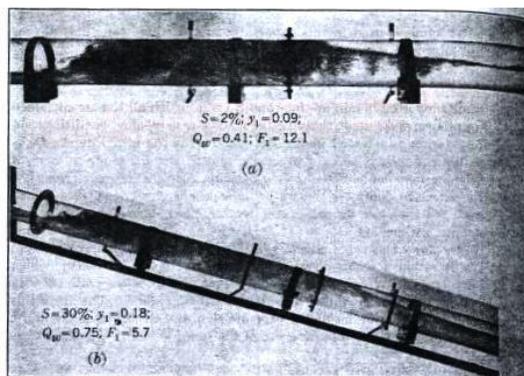
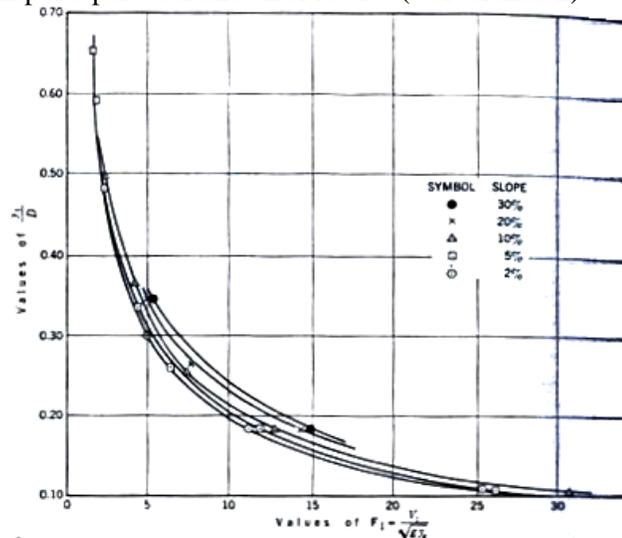


Ilustración 2. Montaje de Kalinske y Robertson (Robertson & Kalinske, 1943).

Previo a éste artículo, Kennison había indicado en el artículo “*The Design of Pipes Lines*” publicado en la Revista Americana N.E.W.W.A. (New England Water Works Association) en 1933, que si la pendiente de la tubería es menor a la línea de gradiente hidráulico, las burbujas se moverán a lo largo de la tubería sin ninguna dificultad. Por lo tanto, Kalinske y Robertson aplicando este criterio, buscarían en su montaje el aire entrante en las tuberías.

Los resultados de su estudio arrojaron que la intensidad del resalto es dependiente del Número de Froude aguas arriba del resalto, de la pendiente, ya que ésta determina la entrada de aire en la tubería y finalmente de la relación de llenado, la cual va relacionada directamente con la pendiente de la tubería. Por lo tanto, para entender el comportamiento, realizaron una relación entre el caudal de aire que entraba en la tubería ( $Q_a$ ) y el Caudal de agua ( $Q_w$ ) y lo graficaron respecto al Número de Froude; se observa que con cualquier pendiente, mientras mayor es la relación entre los caudales, el Número de Froude aumenta.

También analizaron que para diferentes relaciones de llenado, existe un Número de Froude crítico en donde la tubería solo transporta parte del aire en el resalto (Ver Gráfica 2):



**Gráfica 2.** Valores críticos experimentales del Número Froude para diferentes relaciones de llenado (Robertson & Kalinske, 1943).

En la Gráfica 2 se observa que con un Número de Froude seleccionado, la relación de llenado es más alta en la pendiente más alta, y más baja cuando la pendiente es más baja; por ejemplo, con un Número de Froude de 10, la pendiente del 2% tiene una relación de llenado cercana a 0.19; con una pendiente del 5%, la relación de llenado es cercana a 0.21; con una pendiente del 10%, la relación de llenado es de 0.22; con una pendiente de 20% la relación es de 0.24 y con una pendiente del 30%, la relación de llenado es de 0.25. Además cuando la pendiente es de 2%, el Número de Froude se mantiene constante en un valor cercano a 2 mientras la relación de llenado varía entre 0.58 y 0.68.

Adicionalmente, en la Ilustración 3 se observan diferentes comportamientos del flujo para diversos caudales con sus respectivos datos típicos.

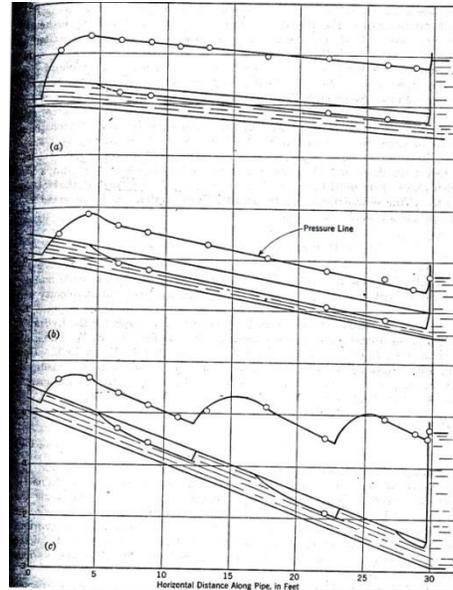


Fig.	$y_2$	$F_1$	$Q_w$	$Q_a$	$S$
(a)	0.147	8.2	0.720	0.060	2 %
(b)	0.127	7.5	0.482	0.039	5 %
(c)	0.290	2.6	0.848	0.014	10 %

**Ilustración 3.** Datos típicos de profundidades y presiones en un Resalto Hidráulico (Robertson & Kalinske, 1943).

En la Ilustración 3 se puede analizar que cuando la pendiente es más alta hay más resaltos. Además, según Robertson y Kalinske, con cada resalto hidráulico, la cantidad de presión de aire que hay en la tubería aumenta mientras el Número de Froude y la profundidad subsecuente se mantienen constantes, tal como se observa en la Imagen C de la Ilustración 3, donde la altura aguas abajo de cada uno de los tres resaltos tiene a tener un valor constante. También Robertson y Kalinske observan que cuando la profundidad aguas arriba del primer resalto es menor que la profundidad aguas arriba del segundo resalto, el primer resalto entregará mayor cantidad de aire a la segunda profundidad y por lo tanto la separación entre estos dos resaltos será mayor. Mientras que cuando la profundidad aguas arriba del segundo resalto es mayor a la profundidad del primer resalto, el primer resalto entregará menor cantidad de aire y se encontrarán a menor distancia.

**Richard Silvester (1964)**

En el año 1964, Richard Silvester realizó un análisis de resaltos hidráulicos que se formaban en cualquier tipo de canal horizontal (rectangular, triangular, parabólico, circular y trapecial). El planteó que las características principales para cualquier dissipador de energía (incluido el resalto hidráulico); son: la relación de las profundidades subsecuentes, las pérdidas de energía y la longitud del resalto.

En cuanto a las profundidades subsecuentes, se debe tener en cuenta el radio, la relación entre las profundidades ( $d_1/d_2$ ), el caudal, y para tuberías circulares, el centro de masa del agua. Silvester incluye en su artículo la ecuación de fuerza del resalto para cualquier tipo de canal horizontal (Ver Ecuación 1):

$$A_1 k'_1 d_1 - A_2 k'_2 d_2 = \left(\frac{Q^2}{g}\right) * \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right)$$

**Ecuación 1.** Ecuación para hallar la ecuación de fuerza del resalto (Silvester, 1964).

donde:

$A_1$  = Área de la sección de agua

$k'$  = Proporción de la profundidad al centro de gravedad del canal circular

$Q$  = Caudal

$g$  = Gravedad

La Ecuación 1 puede escribirse como:

$$A_1 k'_1 d_1 - A_2 k'_2 d_2 = \left(\frac{Q^2}{g A_2} - \frac{Q^2}{g A_1}\right)$$

**Ecuación 2.** Ecuación para hallar la fuerza del resalto (Silvester, 1964).

También se conoce que el Número de Froude es (Ver Ecuación 3):

$$F^2 = \frac{Q^2}{A^2 g D}$$

**Ecuación 3.** Número de Froude.

donde:

$F$  = Número de Froude

$D$  = Profundidad de sección

Por lo tanto, se puede inferir que:

$$F^2 A D = \frac{(Q^2 A D)}{A^2 D g} = \frac{Q^2}{A g}$$

**Ecuación 4.** Proceso para encontrar profundidades subsecuentes.

Luego, reemplazando la Ecuación 4 en la Ecuación 2, se tiene que:

$$A_1 k'_1 D_1 - A_2 k'_2 D_2 = F_2^2 A_2 D_2 - F_1^2 A_1 D_1$$

**Ecuación 5.** Proceso para hallar profundidades subsecuentes.

La Ecuación 5 se puede reescribir como:

$$A_2 k'_2 D_2 - A_1 k'_1 D_1 = F_1^2 A_1 D_1 - F_2^2 A_2 D_2$$

**Ecuación 6.** Ecuación 5 reorganizada.

Por otra parte, la relación entre el Número de Froude aguas abajo del resalto sobre el Número de Froude aguas arriba del resalto se muestra en la Ecuación 7:

$$\frac{F_2^2}{F_1^2} = \frac{A_1^2 D_1}{A_2^2 D_2}$$

**Ecuación 7.** Relación Número de Froude (Silvester, 1964).

Y si se despeja el Número de Froude aguas abajo del resalto:

$$F_2^2 = \frac{A_1^2 D_1 F_1^2}{A_2^2 D_2}$$

**Ecuación 8.** Número de Froude aguas abajo del resalto.

Entonces, reemplazando la Ecuación 8 en la Ecuación 6:

$$A_2 k'_2 D_2 - A_1 k'_1 D_1 = F_1^2 A_1 D_1 - \frac{A_1^2 D_1 F_1^2 A_2 D_2}{A_2^2 D_2}$$

$$A_2 k'_2 D_2 - A_1 k'_1 D_1 = F_1^2 A_1 D_1 - \frac{A_1^2 D_1 F_1^2}{A_2 D_2}$$

$$A_2 k'_2 D_2 - A_1 k'_1 D_1 = F_1^2 A_1 D_1 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)$$

**Ecuación 9.** Proceso para encontrar las profundidades subsecuentes en cualquier forma de canal.

Y para encontrar las profundidades subsecuentes, se divide la Ecuación 9 por el Área y la profundidad de sección aguas arriba del resalto ( $A_1, D_1$ ):

$$\frac{k'_2 (A_2 D_2)}{A_1 D_1} - k'_1 = F_1^2 \left[1 - \frac{A_1}{A_2}\right]$$

**Ecuación 10.** Profundidades subsecuentes para cualquier tipo de canal (Silvester, 1964).

Cómo en tuberías circulares la profundidad subsecuente puede tener dos condiciones (mayor o menor al diámetro), el cálculo de ésta profundidad se divide en dos casos:

### **Tubería Parcialmente Llena:**

Cuando la tubería está parcialmente llena, la proporción de la profundidad del agua al centro de masa del agua ( $k'$ ) es variable, y se calcula con la Ecuación 11:

$$k' = 1 - \frac{1}{2} \frac{d}{D} + \frac{\left( 2 \left( 1 - \frac{D}{d} \right)^{\frac{3}{2}} * \left( \frac{D}{d} \right)^{\frac{1}{2}} \right)}{3m}$$

**Ecuación 11.** Valor de la proporción entre la profundidad de llenado y el centro de masa para tuberías parcialmente llenas (Silvester, 1964).

donde:

$k'$  = Proporción de la profundidad del flujo respecto al centro de gravedad

$d$  = Altura del flujo

$D$  = Diámetro de la tubería

$m$  = Área mojada de la tubería

Y los respectivos valores de  $k$  para diferentes profundidades de llenado son:

**Tabla 1.** Valores de  $k'$  dependiendo de la relación de llenado (Silvester, 1964).

d/D	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
k'	0.41	0.413	0.416	0.419	0.424	0.432	0.445	0.462	0.473	0.5

Finalmente, reemplazando la Ecuación 11 en la Ecuación 10 se tiene que:

$$k'_2 \frac{d_2}{d_1} \frac{m_2}{m_1} - k'_1 = F_1^2 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_2} \right]$$

**Ecuación 12.** Profundidades subsecuentes para tuberías parcialmente llenas (Silvester, 1964).

### Tubería Llena

En aquellas tuberías que quedan presurizadas luego de un resalto hidráulico, la ecuación de la proporción entre la profundidad de llenado y el centro de gravedad se calcula con la Ecuación 13.

$$k'_2 = \frac{\left( d_2 - \frac{D}{2} \right)}{d_2}$$

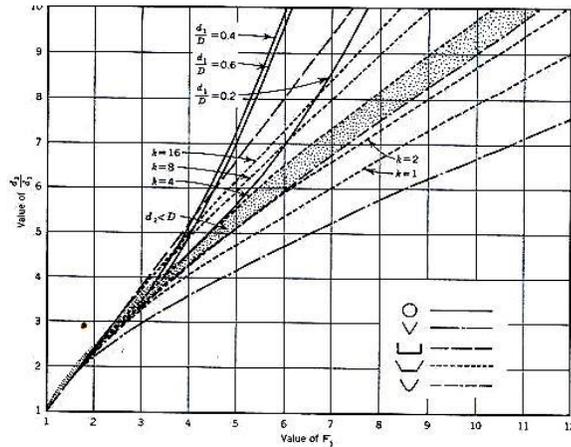
**Ecuación 13.** Valor de la proporción entre la profundidad de llenado y el centro de gravedad para tuberías llenas (Silvester, 1964).

Y reemplazando la Ecuación 13 en la Ecuación 10 se tiene que:

$$\frac{m_2}{m_1} \frac{d_2}{d_1} - \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1} \frac{D}{d_1} - k'_1 = F_1^2 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_2} \right]$$

**Ecuación 14.** Profundidades subsecuentes para tuberías llenas (Silvester, 1964).

Luego, Silvester en su artículo, muestra un diagrama en el cual compara el valor del Número de Froude respecto a la profundidad de llenado en diferentes tipos de secciones (Ver Gráfica 3):



**Gráfica 3.** Curvas Analíticas para  $d_2/d_1$  y  $F_1$  (Silvester, 1964).

En la Gráfica 3 se puede observar que en tuberías circulares, para relaciones de llenado bajas aguas arriba del resalto ( $d_1/D = 0.2$ ), el Número de Froude es más alto que para relaciones de llenado altas ( $d_1/D = 0.6$ ). También se puede observar que cuando la tubería fluye parcialmente llena luego del resalto hidráulico, existe una región válida de resultados, la cual se va incrementando a medida que aumenta la relación  $d_2/d_1$ . Otro aspecto importante que se debe considerar, es que la relación de llenado del 20% presenta el Número de Froude más alto, el cual se va aproximando a 8.

Adicionalmente, Silvester fue el primer investigador que aproximó una ecuación para hallar la longitud del resalto hidráulico en tuberías circulares, teniendo como parámetros  $L/d_1$ ,  $L/d_2$ , y  $L/(d_2 - d_1)$ . Por lo tanto, para comparar las longitudes en la tubería, Silvester tomó el experimento realizado por Kindsvater en 1934, y supuso las longitudes como la distancia entre el inicio del resalto, hasta el punto donde la altura aguas abajo alcanzaba un máximo, teniendo en cuenta las pérdidas por fricción.

Su aproximación se basó en usar la Ecuación 15 y adaptarla para cada tipo de sección.

$$\frac{L}{d_1} = K (F_1 - 1)^\alpha$$

**Ecuación 15.** Longitud de un resalto hidráulico para cualquier tipo de sección (Silvester, 1964).

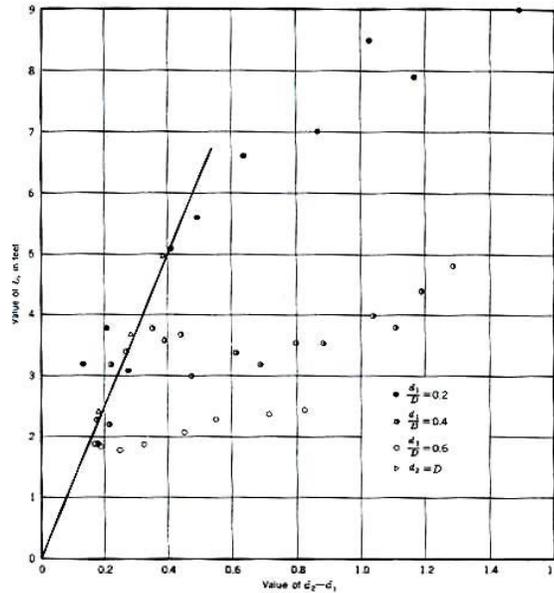
donde:

$L/d_1$ : Relación entre la longitud y la altura aguas arriba del resalto. Depende de la sección del canal

$K$ : Constante determinada experimentalmente según la sección del canal

$\alpha$ : Se determina por la relación  $\frac{d_2 - 1}{F_1 - 1}$

En tuberías circulares, la longitud del resalto se determinó en el experimento realizado por Kindsvater en 1934, con el cual, Silvester adaptó las mediciones y estableció la Gráfica 4:



**Gráfica 4.** Variación diferencia de alturas del resalto vs Longitud (Silvester, 1964).

En la Gráfica 4 se puede observar que a medida que aumenta la relación de llenado aguas arriba del resalto, la longitud del resalto es menor; esto puede ir relacionado conjuntamente con la disminución del Número de Froude a medida que disminuye la relación de llenado (Ver Gráfica 3). Esto ocurre porque cuando hay menor relación de llenado, la velocidad aumenta por lo cual el Número de Froude aumenta, haciendo que el resalto adquiera más fuerza y se aumente la longitud.

**Rajaratnam (1965)**

En 1965, Rajaratnam realizó un nuevo análisis de resaltos hidráulicos en tuberías de sección exponencial y circular para canales horizontales. Su análisis se basó nuevamente en las conclusiones dadas por Kindsvater (1938), y el análisis realizado por Kalinske (1943) para las masas de aire que salen por la tubería luego de un resalto hidráulico.

Por lo tanto, teniendo en cuenta el análisis de Momentum mediante la Ecuación 16:

$$P + M = \gamma \Psi D^2 \lambda y + \frac{\gamma Q^2}{g} * \frac{1}{\Psi D^2}$$

**Ecuación 16.** Cálculo del Momentum en Resaltos Hidráulicos (Rajaratnam, 1965).

donde:

- $\gamma$ : Peso específico del agua
- $P$ : Presión
- $M$ : Momentum

$\lambda$  y  $\Psi$ : Son funciones de la relación de llenado aguas arriba ( $y_1/D$ )

$D$ : Diámetro de la tubería

$Q$ : Caudal

$y$ : Altura en el punto de medición

Y conociendo que el Momentum se conserva (Ver Ecuación 17):

$$P_1 + M_1 = P_2 + M_2$$

**Ecuación 17.** Conservación del Momentum (Rajaratnam, 1965).

Y tomando el Número de Froude como:

$$F_1^2 = \frac{Q^2}{gD^5\Gamma_1}$$

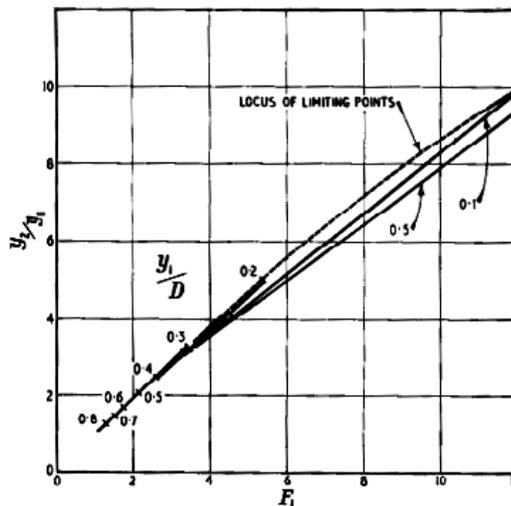
**Ecuación 18.** Ecuación del Número de Froude según Rajaratnam (Rajaratnam, 1965).

donde  $\eta_1$  y  $\Gamma_1$  son funciones de  $y_1/D$ , se reemplaza la Ecuación 17 en la Ecuación 16 y se simplifica obteniendo finalmente la ecuación de conservación del Momentum:

$$1 - \frac{\Psi_1 \lambda_1 y_2}{\Psi_2 \lambda_2 y_1} = F_1^2 \frac{\eta_1}{\lambda_1} \left( \frac{\Psi_1}{\Psi_2} - 1 \right)$$

**Ecuación 19.** Conservación del Momentum (Rajaratnam, 1965).

A partir de la Ecuación 19, Rajaratnam estableció una gráfica con relaciones de llenado inferiores a 0.8 (Ver Gráfica 5), ya que en el análisis, Rajaratnam observó que para relaciones de llenado superiores a 0.8, el comportamiento del flujo no permite ningún análisis



**Gráfica 5.** Análisis de Froude vs  $y_2/y_1$  (Rajaratnam, 1965).

En la Gráfica 5, Rajaratnam analiza que cuando el Número de Froude llega aproximadamente a 3, las curvas de las diferentes relaciones de llenado empiezan a diverger, y sus límites se encuentran entre las relaciones de llenado de 0.2 y 0.5.

### ***Straub (1978)***

En 1978, Straub planteó las siguientes ecuaciones para determinar las profundidades subsecuentes en resaltos hidráulicos, partiendo de la siguiente ecuación semiempírica:

$$y_c = \left( \frac{1.01}{d_0^{0.26}} \right) \left( \frac{Q^2}{g} \right)^{0.25}$$

**Ecuación 20.** Cálculo de la profundidad crítica.

La Ecuación 20 es válida únicamente si:

$$0.02 \leq \frac{y_c}{d} \leq 0.85$$

Posteriormente, se calcula el Número de Froude aguas arriba del resalto mediante la Ecuación 21:

$$F_1 = \left( \frac{Y_c}{Y_1} \right)^{1.93}$$

**Ecuación 21.** Aproximación Número de Froude (**French, 2007**).

donde:

$F_1$ : Número de Froude aguas arriba del resalto [-]

$Y_c$ : Profundidad crítica [m]

$Y_1$ : Profundidad aguas arriba del resalto [m]

Luego realiza dos aproximaciones de la profundidad subsecuente con base en el Número de Froude, dependiendo si el Número de Froude es menor a 1.7 o mayor.

Cuando el Número de Froude es menor a 1.7, la profundidad subsecuente es calculada como:

$$y_2 = \frac{y_c^2}{y_1}$$

**Ecuación 22.** Cálculo profundidad subsecuente para Números de Froude menores a 1.7 (**French, 2007**).

Y cuando el Número de Froude es mayor a 1.7:

$$y_2 = \frac{y_c^{1.8}}{y_1^{0.73}}$$

**Ecuación 23.** Cálculo profundidad subsecuente para Números de Froude mayores a 1.7 (**French, 2007**).

**Richard H. French (1988)**

Richard French propuso igualar momentos tal cual lo hicieron otros autores, pero con la siguiente ecuación:

$$M = \left( \frac{Q^2}{gA} \right) + \bar{z}A$$

**Ecuación 24.** Cálculo del Momentum. (French, 2007).

donde:

$M$ : Momentum [ $m^3$ ]

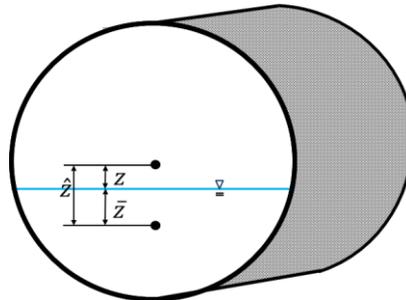
$Q$ : Caudal [ $m^3/s$ ]

$g$ : Gravedad [ $m/s^2$ ]

$\bar{z}$ : Distancia desde la superficie de agua al centroide de masa [m]

$A$ : Área [ $m^2$ ]

Para hallar la distancia desde la superficie de agua al centroide se realiza el siguiente procedimiento:



**Ilustración 4.** Diagrama de niveles en la tubería.

1. Calcular el radio de la tubería ( $r$ ).

$$r = \frac{d}{2}$$

2. Calcular la distancia del centro de la tubería a la superficie de agua ( $z$ )

$$z = y - \frac{d}{2}$$

**Ecuación 25.** Distancia del centro de la tubería de agua.

3. Calcular la distancia desde el centro de la tubería al centroide de masa del agua ( $\hat{z}$ ).

$$\hat{z} = -\frac{2(r^2 - z^2)^{3/2}}{3A}$$

**Ecuación 26.** Distancia del centro de la tubería al centroide de masa de agua.

4. Calcular la distancia desde la superficie de agua hasta el centroide de la masa de agua ( $\bar{z}$ ).

$$\bar{z} = y - (r + \hat{z})$$

**Ecuación 27.** Distancia desde la superficie de agua hasta el centroide de la masa de agua.

Entonces igualando los momentos se tiene que:

$$\left(\frac{Q^2}{gA_1}\right) + \bar{z}_1 A_1 = \left(\frac{Q^2}{gA_2}\right) + \bar{z}_2 A_2$$

**Ecuación 28.** Igualando Momentums.

Luego, con la Ecuación 28 se despeja la altura subsecuente al resalto mediante un método iterativo.

### **Hager y Stahl (1999)**

En 1999 Willi H. Hager y Helmut Stahl realizaron un nuevo análisis enfocado en tuberías circulares fluyendo parcialmente llenas en una sola fase (sin tener en cuenta la relación aire – agua analizada anteriormente por otros autores como Smith y Chen).

Para calcular la profundidad subsecuente, tuvieron en cuenta aproximaciones a las ecuaciones que calcular el área y la fuerza de presión en una tubería circular:

$$\frac{A}{D} = y^{1/5}$$

**Ecuación 29.** Aproximación del área (Stahl & Hager, 1999).<sup>2</sup>

$$\frac{P}{\rho g D^3} = \frac{1}{2} y^{2.5}$$

**Ecuación 30.** Aproximación Presión (Stahl & Hager, 1999).

donde:

A: Área

D: Diámetro de la tubería

<sup>2</sup> Las Ecuación 29 y Ecuación 30 tienen un error máximo del 20% cuando y se encuentra entre 0.2 y 0.9, el cual es aceptable para Stahl y Hager porque se ajustarán empíricamente.

$y$ : Relación de llenado

$P$ : Presión

$\rho$ : Densidad

$g$ : Gravedad

Por lo tanto la Ecuación del Momentum resulta en:

$$\frac{1}{2}y_1^{2.5} + \frac{Q^2}{gD^5y_1^{1.5}} = \frac{1}{2}y_2^{2.5} + \frac{Q^2}{gD^5y_2^{1.5}}$$

**Ecuación 31.** Ecuación del Momentum (Stahl & Hager, 1999).

Por otra parte, Hager realizó otro análisis en 1990 en el libro “Froudezahl im Kreisprofil (Froude number in circular conduits)” para determinar que el Número de Froude en tuberías podía aproximarse a:

$$F = \frac{Q}{\sqrt{gDh^4}}$$

**Ecuación 32.** Aproximación del Número de Froude (Hager, 1990).

donde:

$F$ : Número de Froude

$Q$ : Caudal

$D$ : Diámetro de la tubería

$h$ : Profundidad del flujo

Ahora, dividiendo la Ecuación 31 entre  $\frac{1}{2}y_1$ :

$$1 + \frac{2Q^2}{gD^5 \left(\frac{h_1}{D}\right)^{3.75}} = \frac{y_2^{2.5}}{y_1^{2.5}} + \frac{2Q^2}{gD^5 y_2^{1.5} y_1^{2.5}}$$

**Ecuación 33.** Proceso para encontrar la profundidad subsecuente del resalto hidráulico.

Y sabiendo que:

$$Y = \frac{y_2}{y_1}$$

**Ecuación 34.** Relación entre las relaciones de llenado aguas arriba y aguas abajo del resalto (Stahl & Hager, 1999).

Y aproximando  $3.75 \sim 4$  y reemplazando las Ecuación 34 y Ecuación 32 en la Ecuación 33:

$$\frac{1}{y_2^{1.5} y_1^{2.5}} = \frac{y_1^{1.5}}{y_2^{1.5} y_1^4}$$

$$1 + \frac{2Q^2}{gD^5 \frac{h_1^4}{D^4}} = Y^{2.5} + \frac{2Q^2 y^{1.5}}{gD^5 y_2^{1.5} \left(\frac{h_1}{D}\right)^4}$$

**Ecuación 35.** Proceso para encontrar la profundidad subsecuente en un resalto hidráulico.

$$1 + 2F_1^2 = Y^{2.5} + 2F_1^2 Y^{-1.5}$$

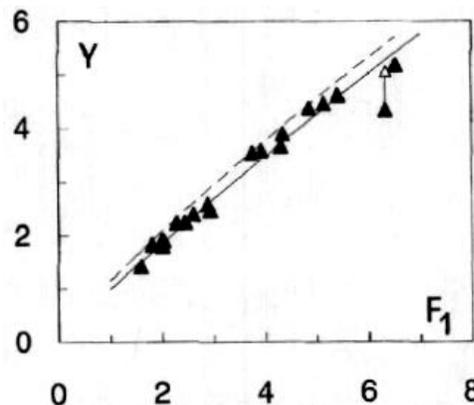
**Ecuación 36.** Profundidad subsecuente en el resalto hidráulico (Stahl & Hager, 1999).

Además, la Ecuación 36 puede modificarse a la Ecuación 37 cuando  $F > 2$ :

$$Y = 1.16F^{0.85}$$

**Ecuación 37.** Profundidad subsecuente con Números de Froude mayores a 2 (Stahl & Hager, 1999).

Analizando la parte teórica, Stahl y Hager realizaron un experimento para verificar la Ecuación 37, determinar un criterio de choque y determinar el comportamiento de los resaltos hidráulicos en tuberías circulares. El diámetro de la tubería en acrílico que utilizaron fue de 240 mm, la pendiente fue de 0.5% y la longitud fue de 6 m (equivalente a 25 veces el diámetro). El resalto se formó colocando placas al final de la tubería y el caudal fue medido con un vertedero en V.



**Gráfica 6.** Profundidad subsecuente según el Número de Froude (Stahl & Hager, 1999).

En las 18 medidas realizadas, los Números de Froude oscilaron entre 1.5 y 6.5 (siempre en el rango supercrítico), y se estableció que la Ecuación 37 había sido sobrestimada a causa de la viscosidad. Por lo

tanto, la Ecuación 37 podía ser reemplazada por la Ecuación 38 (estimada con los resultados obtenidos en los experimentos y mostrados en la Gráfica 6).

$$Y = 1.00F_1^{0.90}$$

**Ecuación 38.** Profundidad subsecuente para Números de Froude mayores a 2 (Stahl & Hager, 1999).

Adicionalmente, Stahl y Hager realizaron un análisis para los tipos de resaltos<sup>3</sup> que se pueden formar: Cuando el Número de Froude es 1.5, el tipo de resalto hidráulico que se forma es ondular y permanece a lo largo de la tubería; cuando el Número de Froude oscila entre 1.5 y 2, las ondas del resalto hidráulico se pierden aguas abajo porque la tubería se presuriza; cuando el Número de Froude es mayor a 2, se producen dos tipos de resaltos hidráulicos, los cuales dependen de la relación de llenado de la tubería: cuando la relación de llenado es inferior a 1/3, se forman remolinos laterales que recirculan, mientras el flujo que continua se concentra en la superficie, cuando la relación de llenado es superior a 1/3, el resalto se comporta normalmente, teniendo la zona de recirculación en la superficie.

En la Ilustración 5 se muestran diferentes tipos de resaltos hidráulicos dependiendo del Número de Froude:

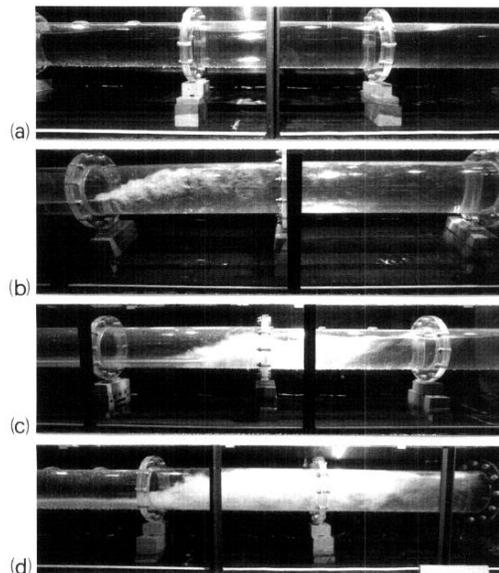


Imagen	Número de Froude	Tipo de Resalto
a	1.1	Ondular
b	2.3	Normal
c	4.1	Flujo recirculante
d	6.5	Con tubería presurizada

**Ilustración 5.** Vista lateral de diferentes resaltos hidráulicos (Stahl & Hager, 1999).

<sup>3</sup> Los tipos de resaltos hidráulicos se explicarán en el Numeral 3 (Marco Teórico).

En la Ilustración 6 se observan las fluctuaciones ocurridas en los flujos, y las zonas de recirculación.

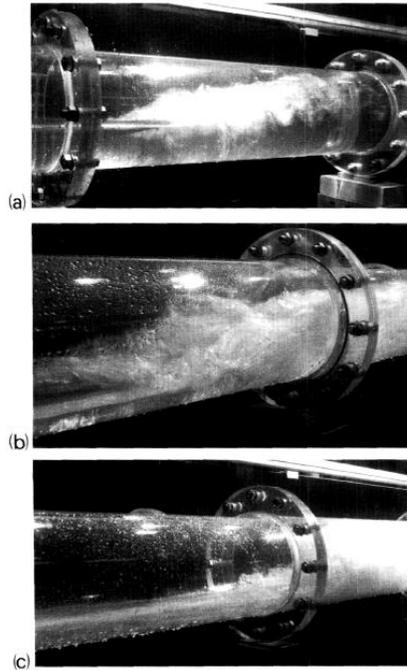
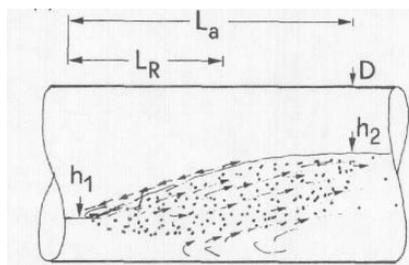


Imagen	Número de Froude	Tipo de Resalto
a	2.3	Normal
b	4.1	Flujo recirculante
c	6.5	Con tubería presurizada

**Ilustración 6.** Vista en perfil de los diferentes tipos de Resalto Hidráulico (Stahl & Hager, 1999).

Hager y Stahl analizan las longitudes desde dos perspectivas: longitudes de recirculación y longitudes de aireación (Ver Ilustración 7).



**Ilustración 7.** Longitudes del resalto hidráulico planteadas por Hager (Stahl & Hager, 1999).

La longitud de recirculación ( $L_R$ ) se mide desde el extremo aguas arriba de los remolinos hasta el punto de estancamiento. Por lo tanto, para expresar una ecuación que determine la longitud de recirculación del resalto hidráulico, Hager y Stahl determinan una relación entre longitud y altura del flujo aguas abajo del resalto:

$$\lambda_R = \frac{L_R}{h_2}$$

**Ecuación 39.** Relación entre la longitud de recirculación y la profundidad aguas abajo del resalto (Stahl & Hager, 1999).

Y  $\lambda_R$  se calcula en función del Número de Froude:

$$\lambda_R = 2F_1^{1/2}$$

**Ecuación 40.** Determinación de la longitud de recirculación a partir del Número de Froude.

La longitud de aireación se mide desde el extremo aguas arriba del resalto donde comienzan los remolinos hasta el lugar donde no hay burbujas de aire (Esta longitud es base para encontrar la longitud del resalto). Para determinarla, Hager y Stahl nuevamente calcularon una relación entre la longitud del resalto y la profundidad aguas abajo del resalto y encontraron una ecuación en función del Número de Froude:

$$\lambda_a = \frac{L_a}{h_2}$$

**Ecuación 41.** Relación entre la longitud de aireación y la profundidad aguas abajo del resalto (Stahl & Hager, 1999).

$$\lambda_a = 4F^{1/2} = 2\lambda_R$$

**Ecuación 42.** Determinación de la longitud de aireación a partir del Número de Froude (Stahl & Hager, 1999).

### ***Rudy Gargano y Willi H. Hager (2002)***

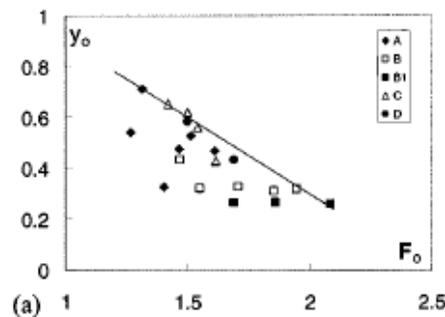
En el año 2002, el investigador Willi H. Hager realizó otro análisis en resaltos hidráulicos pero enfocados únicamente en los resaltos hidráulicos ondulares, analizando la longitud de las olas y los perfiles. El experimento se realizó en un modelo similar al usado en 1999 (diámetro de 240 mm y de 6 m de longitud y el material de construcción fue acrílico).

Las relaciones de llenado oscilaron entre 0.3 y 0.8, variándolas cada 0.05. Se trabajaron 3 pendientes: 0.001, 0.0015 y 0.003, y los Números de Froude oscilaron entre 1.25 y 2.0 (Números de Froude característicos de resaltos hidráulicos ondulares).

Como los resaltos hidráulicos ondulares son muy inestables, cualquier perturbación afecta el flujo en el resalto; además, dependiendo del Número de Froude aguas arriba del resalto, se pueden determinar los siguientes tipos de resaltos hidráulicos ondulares:

1. Resalto Ondular Tipo A: Ocurre cuando los Números de Froude aguas arriba del resalto son bajos ( $F < 1.20$ ). Las ondas fluyen libremente en el flujo.
2. Resalto Ondular Tipo B: Ocurre cuando la pendiente es pronunciada y el flujo va aumentado de aguas arriba hacia aguas abajo sin la formación de ondas. ( $1.20 < F < 1.28$ )
3. Resalto Ondular Tipo C: Ocurre cuando el Número de Froude oscila entre 1.28 y 1.36.
4. Resaltos Ondular Tipo D: Ocurre cuando los Números de Froude aguas arriba del resalto son grandes ( $1.28 < F < 1.60$ ).

En la Gráfica 7 se muestran los diferentes tipos de resaltos hidráulicos generados en los experimentos realizados:



**Gráfica 7.** Tipos de resaltos hidráulicos generados en los experimentos realizados por Hager y Gargano (Gargano & Hager, 2002).

Por lo tanto, según la Gráfica 7, se obtienen los siguientes resultados:

1. Resalto Ondular Tipo A: Ocurre para Números de Froude menores a 1.5
2. Resalto Ondular Tipo B: Ocurre para relaciones de llenado entre 0.3 y 0.45.
3. Resaltos Ondulares Tipo C y D: Se forman de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$y_0 = 1.5 - 0.60F_0$$

**Ecuación 43.** Estimación para resaltos Ondulares Tipo C y D (Gargano & Hager, 2002).

Como conclusión Gargano y Hager comentan que el pico de la onda ocurre en la primera onda, además la longitud de la onda depende exclusivamente de  $y_0/F_0$ . Por último, para evitar problemas en las redes de alcantarillado, los Números de Froude deben ser menores a 0.75 o mayores a 2 para evitar la inestabilidad del flujo y no producir resaltos ondulares, los cuales tienen las mismas características que un resalto normal.

---

***H.K. Ghamry, Ain Shames y Fayoum Branch (2002)***

En el año 2002 se realizó otro experimento para analizar los resaltos hidráulicos en tuberías; el diámetro era de 0.3 m, longitud de 1.37 m, el caudal variaba entre 7 y 35 L/s y la variación de los Números de Froude oscilaban entre 1.29 y 6.43.

Para calcular el resalto, introducen el término de sumergencia (S):

$$S_G = \frac{y_s - y_1}{y_1}$$

**Ecuación 44.** Sumergencia en la compuerta (Ghamry, Shames, & Branch, 2002).

donde:

$S_G$ : Sumergencia en la compuerta

$y_s$ : Altura aguas arriba de la compuerta

$y_1$ : Altura en la compuerta

$$S = \frac{y_1 - y_2}{y_2}$$

**Ecuación 45.** Sumergencia (Ghamry, Shames, & Branch, 2002).

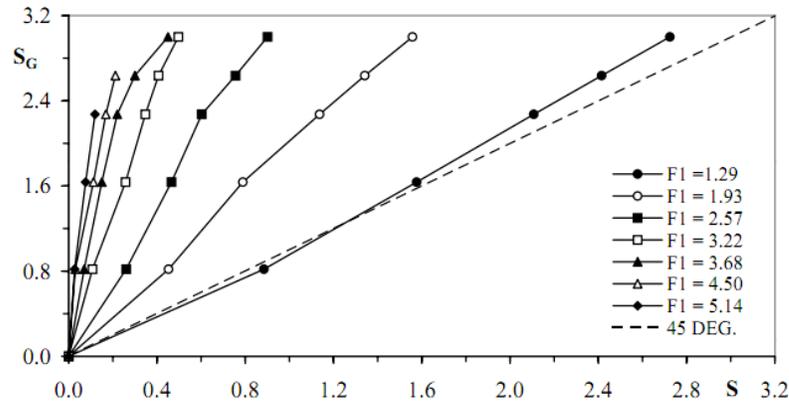
donde:

$S$ : Sumergencia

$y_s$ : Altura aguas arriba del resalto

$y_1$ : Altura aguas abajo del resalto

Estos investigadores realizaron una comparación entre la sumergencia en la compuerta y la sumergencia en el resalto y concluyeron que la relación es proporcional, aunque para una sumergencia del resalto específica, la sumergencia en la compuerta empieza a aumentar cuando aumenta el Número de Froude (Ver Gráfica 8).



**Gráfica 8.** Comparación sumergencia del resalto vs sumersión de la compuerta (Ghamry, Shames, & Branch, 2002).

Por último, para Números de Froude bajos, con variaciones bajas en la sumergencia, varía de manera importante la sumergencia en la compuerta; sin embargo, a medida que aumenta el Número de Froude, la sumergencia en la compuerta y la sumergencia varían igual. Además, la relación entre la energía específica en la compuerta respecto a las diferentes energías a lo largo del resalto tiene un leve aumento cuando la sumergencia aumenta.

*Osman Akan (2006)*

La profundidad subsecuente de un resalto hidráulico en canales rectangulares fue planteada por Akan como la igualdad de los momentos específicos aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico:

$$M_{específico} = \frac{q^2}{gY_j} + \frac{Y_j^2}{2}$$

**Ecuación 46.** Cálculo Momentum Específico en Canales Rectangulares (Akan, 2006).

Igualando los momentos específicos aguas arriba y aguas abajo usando la Ecuación 46 se tiene que:

$$\frac{q^2}{gY_{j1}} + \frac{Y_{j1}^2}{2} = \frac{q^2}{gY_{j2}} + \frac{Y_{j2}^2}{2}$$

**Ecuación 47.** Procedimiento cálculo altura subsecuente de los resaltos hidráulicos en canales rectangulares (Akan, 2006).

Y conociendo que el caudal por unidad de ancho es igual a:

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{v * A}{b} = \frac{v * b * y}{b} = v * y$$

**Ecuación 48.** Caudal por unidad de ancho.

donde:

$Q$ : Caudal [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]

$q$ : Caudal por unidad de ancho [ $\text{m}^3/\text{s}\cdot\text{m}$ ]

$b$ : Ancho del canal [m]

Reemplazando la Ecuación 48 en la Ecuación 47:

$$\frac{Y_{J1}^2}{2} + \frac{Y_{J1}v_1^2}{g} = \frac{Y_{J2}^2}{2} + \frac{Y_{J2}v_2^2}{g}$$

**Ecuación 49.** Procedimiento cálculo profundidades subsecuentes.

Teniendo en cuenta la ecuación de conservación de la masa:

$$Q = v_1A_1 = v_2A_2$$

**Ecuación 50.** Conservación de la masa.

$$v_2 = \frac{v_1A_1}{A_2}$$

**Ecuación 51.** Cálculo velocidad aguas abajo a partir de los parámetros aguas arriba.

Reemplazando la Ecuación 51 y la Ecuación 47 en la Ecuación 49:

$$\frac{Y_{J1}^2}{2} + \frac{Y_{J1}v_1^2}{g} = \frac{Y_{J2}^2}{2} + \frac{Y_{J2}}{g} \left( \frac{Y_{J1}^2}{Y_{J2}^2} \right) v_1^2$$

y reorganizando:

$$\frac{1}{2}(Y_{J2}^2 - Y_{J1}^2) = \frac{Y_{J1}}{g} \left( \frac{Y_{J1}}{Y_{J2}} v_1^2 - v_1^2 \right)$$

$$(Y_{J2}^2 - Y_{J1}^2) = \frac{2}{g} Y_{J1} v_1^2 \left( 1 - \frac{Y_{J1}}{Y_{J2}} \right)$$

$$(Y_{J2} + Y_{J1})(Y_{J2} - Y_{J1}) = 2Y_{J1}^2 Fr_{J1}^2 \frac{(Y_{J2} - Y_{J1})}{Y_{J2}}$$

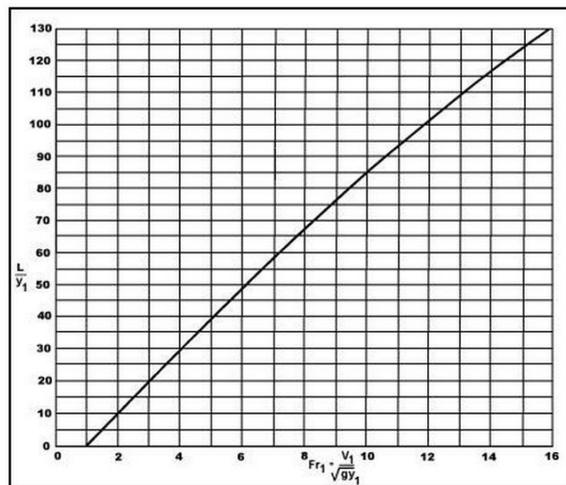
$$\frac{Y_{J2}^2}{Y_{J1}^2} + \frac{Y_{J2}}{Y_{J1}} = 2Fr_{J1}^2$$

$$\left(\frac{Y_{J2}}{Y_{J1}}\right)^2 + \frac{Y_{J2}}{Y_{J1}} - 2Fr_1^2 = 0$$

$$\frac{Y_{J2}}{Y_{J1}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8Fr_1^2}}{2}$$

**Ecuación 52.** Cálculo profundidades subsecuentes en canales rectangulares.

La longitud del resalto hidráulico para canales rectangulares puede ser medida mediante la Gráfica 9, la cual puede presentar errores cuando el resalto hidráulico presenta una superficie muy plana.



**Gráfica 9.** Cálculo de la longitud del Resalto Hidráulico. (FHWA, 2006).

***National Highway Institute (2006)***

En el 2006 aparecen publicadas en la Circular de Ingeniería Hidráulica N° 14 del Departamento de Transporte de Estados Unidos (U.S. Department of Transportation), ecuaciones y gráficas para determinar resaltos hidráulicos en tuberías. Estas ecuaciones se escogen dependiendo si la profundidad aguas abajo es menor o mayor al diámetro:

Cuando la profundidad aguas abajo es menor al diámetro se tiene que:

$$\frac{K_2 y_2 C_2}{y_1 C_1} - K_1 = Fr_1^2 \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)$$

**Ecuación 53.** Cálculo profundidad subsecuente para profundidades subsecuentes menores al diámetro (FHWA, 2006).

donde:

$y_2$ : Profundidad aguas abajo del resalto

$y_1$ : Profundidad aguas arriba del resalto

$Fr_1$ : Número de Froude aguas arriba del resalto

$C$  y  $K$ : Funciones de  $y/D$ , y sus valores se encuentran en la Tabla 2.

Cuando la profundidad aguas abajo es mayor al diámetro, se realizan los cálculos con la Ecuación 54:

$$\frac{y_2 C_2}{y_1 C_1} - 0.5 \left( \frac{C_2 D}{C_1 y_1} \right) - K_1 = Fr_1^2 \left( 1 - \frac{C_1}{C_2} \right)$$

**Ecuación 54.** Cálculo profundidad subsecuente para profundidades subsecuentes mayores al diámetro (FHWA, 2006).

donde:

$y_2$ : Profundidad aguas abajo del resalto

$y_1$ : Profundidad aguas arriba del resalto

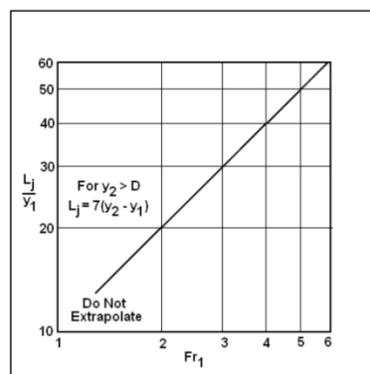
$Fr_1$ : Número de Froude aguas arriba del resalto

$C$  y  $K$ : Funciones de  $y/D$ , y sus valores se encuentran en la Tabla 2.

**Tabla 2.** Coeficientes para tuberías circulares horizontales (FHWA, 2006).

$y/D$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1,000
<b>K</b>	0.41	0.413	0.416	0.419	0.424	0.432	0.445	0.462	0.473	0.5
<b>C</b>	0.041	0.112	0.198	0.293	0.393	0.494	0.587	0.674	0.745	0.748

Adicionalmente, la longitud del resalto (medida desde el punto donde inicia la turbulencia hasta el lugar donde la profundidad aguas abajo alcanza el máximo) cuando la profundidad aguas abajo es menor al diámetro se puede determinar mediante la Gráfica 10:



**Gráfica 10.** Determinación de la longitud del resalto para profundidades subsecuentes menores al diámetro (FHWA, 2006).

---

En la Gráfica 10 se puede observar que existe una aproximación experimental para hallar la longitud del resalto dependiendo si  $y_2$  es mayor o menor al diámetro:

Cuando la profundidad aguas abajo del resalto es menor al diámetro y para Números de Froude menores a 6:

$$L_j = 10F_1$$

**Ecuación 55.** Determinación de la longitud del resalto cuando la profundidad aguas abajo es menor al diámetro. (FHWA, 2006)

Cuando la profundidad aguas abajo del resalto es mayor al diámetro:

$$L_j = 7(y_2 - y_1)$$

**Ecuación 56.** Determinación longitud del resalto cuando la profundidad aguas abajo es mayor al diámetro (FHWA, 2006).

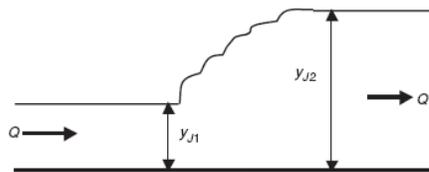
### 3. Marco Teórico

El marco teórico presentado a continuación se encuentra en la tesis de pregrado denominada “Diseño y construcción de un modelo para estudiar el comportamiento de resaltos hidráulicos en tuberías fluyendo parcialmente llenas de sección circular, con Números de Froude supercríticos menores a 4” (Montaño Luna, 2012).

#### 3.1. Resaltos Hidráulicos

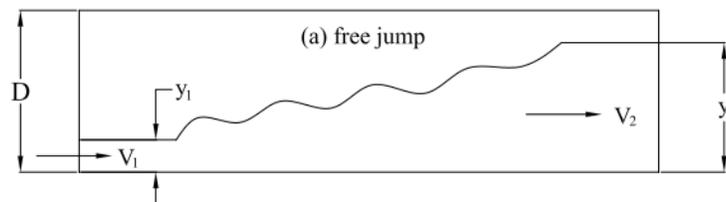
##### 3.1.1. Definición

Los resaltos hidráulicos son fenómenos físicos presentados cuando hay un cambio de flujo supercrítico a flujo subcrítico, lo cual genera pérdidas de energía, turbulencia, rompimiento en la superficie del flujo (en algunos casos) y entrapamiento de aire. Su comportamiento se puede observar en la Ilustración 8:

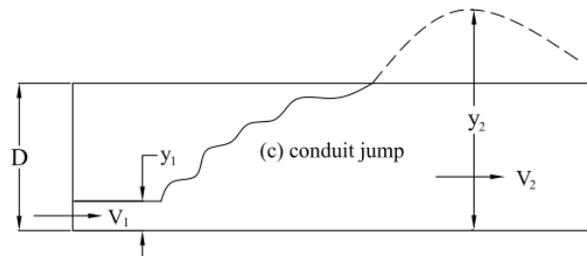


**Ilustración 8.** Resalto Hidráulico (Akan, 2006).

En tuberías circulares, existen dos tipos de resaltos; el primero ocurre cuando la profundidad subsecuente del resalto es menor al diámetro de la tubería ( $y_2 < D$ ), (Ver Ilustración 9), y el segundo tipo, cuando la profundidad subsecuente supera el diámetro ( $y_2 > D$ ) (Ilustración 10).



**Ilustración 9.** Profundidad subsecuente menor al diámetro de la tubería (Ghamry, Shames, & Branch, 2002).



**Ilustración 10.** Profundidad subsecuente mayor al diámetro de la tubería (Ghamry, Shames, & Branch, 2002).

Los resaltos hidráulicos cumplen la función de disipar energía debido a la turbulencia generada en éste fenómeno y la incorporación de aire; por lo tanto son útiles en zonas donde la potencia del agua puede causar daños en las estructuras y erosiones en los canales, o en las plantas de tratamiento de agua residual o plantas de tratamiento de agua potable, donde se usan para mezclar sustancias mientras ocurre el fenómeno.

A continuación se mencionan otras funciones del resalto hidráulico en canales abiertos (CIVIL ENGINEERING PORTAL, 2011):

- Disipación de energía en flujos sobre diques, vertederos y otras estructuras hidráulicas.
- Establecimiento de alturas altas, apropiadas para canales usados en la distribución de agua o irrigación de cultivos.
- Reducción de las presiones altas que se encuentran debajo de las estructuras.
- Mezcla de sustancias químicas usadas para tratamiento de agua.
- Aireación de flujos y declorinado en los procesos de tratamiento de agua.
- Eliminación de paquetes de aire presentados en canales circulares.
- Identificación de las condiciones del flujo mediante mediciones, y así tomar medidas de regulación.

Adicionalmente, la formación de resaltos hidráulicos se presenta cuando el canal tiene altas pendientes, obstáculos en el canal o cambios de pendiente.

### 3.1.2. Tipos de Resaltos Hidráulicos

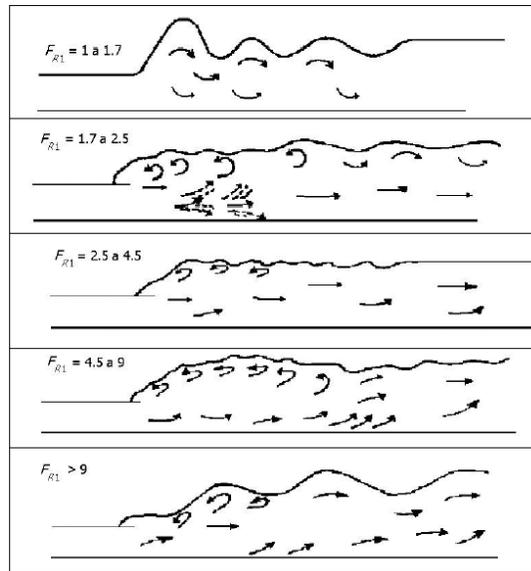
Según la US Bureau of Reclamation, los resaltos hidráulicos se identifican de acuerdo con el Número de Froude:

**Tabla 3.** Tipos de Resaltos Hidráulicos en fondos sin pendiente (Gonzales Rodríguez, 1992).

Número de Froude	Características
Froude = 1.0	No existe formación de Resalto Hidráulico porque se encuentra en la profundidad crítica
$1.0 < \text{Froude} < 1.7$	Resalto Ondular
$1.7 < \text{Froude} < 2.5$	Resalto Débil
$2.5 < \text{Froude} < 4.5$	Resalto Oscilante
$4.5 < \text{Froude} < 9.0$	Resalto Permanente
Froude $> 9.0$	Resalto Fuerte

- Resalto Ondular: Como se explicó en los Antecedentes, un resalto hidráulico ondular genera baja disipación de energía, su disipación oscila entre el 0 y el 8%.
- Resalto Débil: En la superficie del resalto se presenta una pequeña turbulencia, con disipaciones de energía entre el 10 y el 20%.
- Resalto Oscilante: Hay una turbulencia no periódica, la cual va generando a su paso problemas de erosión tanto en las orillas del canal como en el fondo. La disipación de energía oscila entre 20 y 45%.

- Resalto Permanente: Éste resalto no tiene en cuenta el comportamiento del flujo aguas abajo, por lo tanto, su comportamiento es más periódico. La disipación de energía oscila entre 45 – 70%.
- Resalto fuerte: Es un resalto violento, que alcanza disipaciones de energía del 85%.



**Ilustración 11.** Tipos de Resaltos Hidráulicos (Gonzales Rodríguez, 1992).

### 3.1.3. Cálculo de profundidades subsecuentes en el Resalto Hidráulico

Cómo las pérdidas de energía son considerables, no se puede usar la ecuación de conservación de la energía para encontrar la relación entre las profundidades aguas arriba del resalto y aguas abajo, sino que se debe usar la conservación del Momentum planteada en la Ecuación 57.

$$M_{j1} = M_{j2}$$

**Ecuación 57.** Conservación del Momentum Específico.

En canales rectangulares el análisis de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico se realiza mediante la demostración planteada por Akan, obteniendo como resultado la Ecuación 52:

$$\frac{Y_{j2}}{Y_{j1}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8Fr_1^2}}{2}$$

**Ecuación 52.** Cálculo profundidades subsecuentes en canales rectangulares.

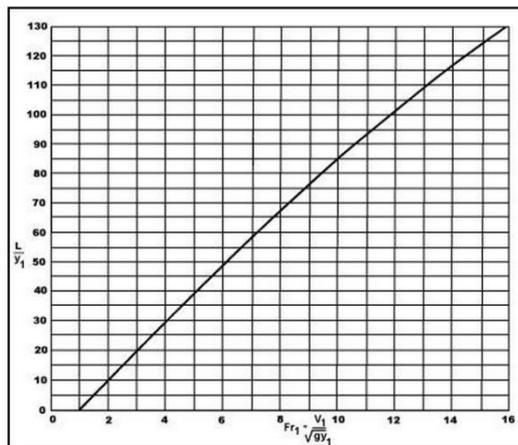
O mediante la Ecuación 58 planteada por Smith y Chen:

$$\frac{H_j}{D} = Fr_1^2 \left(\frac{d_1}{D}\right)^2 \left[ \beta_1 - \beta_2 \frac{d_1}{D} (1 + \beta_a) \right] + \frac{1}{2} \frac{d_1}{D} \left[ \left(\frac{d_1}{D}\right) + \frac{1}{\frac{d_1}{D}} - 2 \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta \right) \right] \cos \theta$$

$$+ \frac{L}{D} \left( \frac{K}{1 + \beta_j} - 1 \right) \text{sen} \theta - \frac{F_f}{\gamma B D^2}$$

**Ecuación 58.** Dimensiones del Resalto Hidráulico en canales cuadrados reorganizada (SMITH & CHEN, 1989).

Además, la longitud del resalto se puede medir mediante la Gráfica 11:



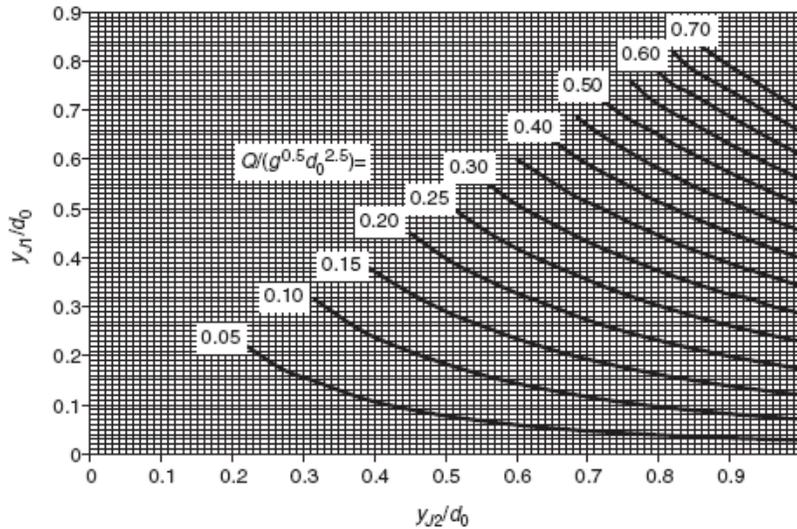
**Gráfica 11.** Cálculo de la longitud del Resalto Hidráulico (FHWA, 2006).

El análisis de Momentum para tuberías circulares se puede explicar en el análisis planteado por Stahl y Hager (Ver Ecuación 31), en el cual se obtiene la siguiente ecuación de conservación del Momentum:

$$\frac{1}{2} y_1^{2.5} + \frac{Q^2}{g D^5 y_1^{1.5}} = \frac{1}{2} y_2^{2.5} + \frac{Q^2}{g D^5 y_2^{1.5}}$$

**Ecuación 31.** Ecuación del Momentum (Stahl & Hager, 1999).

Adicionalmente, en otro análisis, realizado por Osman Akan en el libro *Open Channel Hydraulics*, la solución de la Ecuación 31 requiere de procedimientos de prueba y error, por lo tanto se han graficado diagramas de Momentum para encontrar la solución en canales circulares:



**Gráfica 12.** Diagrama de Momentum en canales circulares (Akan, 2006).

Como se observa en la Gráfica 12, todas las líneas tienen un límite en el inicio de la curva, lo que indica que en tuberías circulares, siempre se tendrá una zona supercrítica antes de la formación del resalto, y aguas abajo se tienen dos opciones, que el flujo siga a superficie libre o que la tubería se presurice.

Por lo tanto, partiendo de las Ecuaciones de Momentum y diversos experimentos, se encuentran las siguientes ecuaciones para encontrar las profundidades subsecuentes:

La primera ecuación fue calculada por Silvester en 1964 a partir de los datos obtenidos en el experimento de Kindsvater. La Ecuación 12 funciona para tuberías fluyendo parcialmente llenas:

$$k'_2 \frac{d_2 m_2}{d_1 m_1} - k'_1 = F_1^2 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_2} \right]$$

**Ecuación 12.** Profundidades subsecuentes para tuberías parcialmente llenas (Silvester, 1964).

La Ecuación 14 se utiliza en tuberías presurizadas:

$$\frac{m_2 d_2}{m_1 d_1} - \frac{1}{2} \frac{m_2 D}{m_1 d_1} - k'_1 = F_1^2 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_2} \right]$$

**Ecuación 14.** Profundidades subsecuentes para tuberías llenas.

En 1978, Straub plantea ecuaciones para determinar la profundidad subsecuente del resalto hidráulico a partir de una aproximación en el cálculo del Número de Froude:

$$F_1 = \left( \frac{Y_c}{Y_1} \right)^{1.93}$$

**Ecuación 21.** Aproximación Número de Froude (French, 2007).

Cuando el Número de Froude es menor a 1.7:

$$y_2 = \frac{y_c^2}{y_1}$$

**Ecuación 22.** Cálculo profundidad subsecuente para Números de Froude menores a 1.7 (French, 2007).

Y cuando el Número de Froude es mayor a 1.7:

$$y_2 = \frac{y_c^{1.8}}{y_1^{0.73}}$$

**Ecuación 23.** Cálculo profundidad subsecuente para Números de Froude mayores a 1.7 (French, 2007).

En 1999 Stahl y Hager plantearon dos ecuaciones a partir de sus resultados experimentales, la primera calculada para Números de Froude generales:

$$1 + 2F_1^2 = Y^{2.5} + 2F_1^2 Y^{-1.5}$$

**Ecuación 59.** Profundidad subsecuente en el resalto hidráulico (Stahl & Hager, 1999).

donde

$$Y = y_2/y_1$$

Y la siguiente para Números de Froude mayores a 2:

$$Y = 1.16F^{0.85}$$

**Ecuación 60.** Profundidad subsecuente con Números de Froude mayores a 2 (Stahl & Hager, 1999).

Y por último, en la Circular 14 de Ingeniería Hidráulica del Departamento de Transporte de Estados Unidos se establecen las siguientes ecuaciones para encontrar las profundidades subsecuentes:

Cuando la profundidad aguas abajo es menor al diámetro se tiene que:

$$\frac{K_2 y_2 C_2}{y_1 C_1} - K_1 = Fr_1^2 \left( 1 - \frac{C_1}{C_2} \right)$$

**Ecuación 53.** Cálculo profundidad subsecuente para profundidades subsecuentes menores al diámetro (FHWA, 2006).

donde:

$y_2$ : Profundidad aguas abajo del resalto

$y_1$ : Profundidad aguas arriba del resalto

$Fr_1$ : Número de Froude aguas arriba del resalto

$C$  y  $K$ : Funciones de  $y/D$ , y sus valores se encuentran en la Tabla 2

Cuando la profundidad aguas abajo es mayor al diámetro, se realizan los cálculos con la Ecuación 54:

$$\frac{y_2 C_2}{y_1 C_1} - 0.5 \left( \frac{C_2 D}{C_1 y_1} \right) - K_1 = Fr_1^2 \left( 1 - \frac{C_1}{C_2} \right)$$

**Ecuación 54.** Cálculo profundidad subsecuente para profundidades subsecuentes mayores al diámetro (FHWA, 2006).  
 donde:

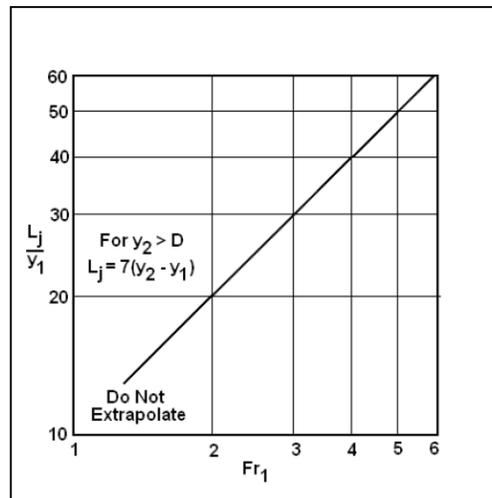
$y_2$ : Profundidad aguas abajo del resalto

$y_1$ : Profundidad aguas arriba del resalto

$Fr_1$ : Número de Froude aguas arriba del resalto

$C$  y  $K$ : Funciones de  $y/D$ , y sus valores se encuentran en la Tabla 2

Adicionalmente, la longitud del resalto (medida desde el punto donde inicia la turbulencia hasta el lugar donde la profundidad aguas abajo alcanza el máximo) cuando la profundidad aguas abajo es menor al diámetro se puede determinar mediante la Gráfica 13:



**Gráfica 13.** Determinación de la longitud del resalto para profundidades subsecuentes menores al diámetro (FHWA, 2006).

### 3.1.4. Análisis del comportamiento del resalto hidráulico

El comportamiento del resalto hidráulico es inestable y no se puede medir, salvo por análisis probabilísticos; sin embargo, se puede evaluar la variación de la turbulencia en diferentes zonas del resalto hidráulico, mediante la medición de velocidad y presión.

Para medir la intensidad de la turbulencia isotrópica, se usa la siguiente ecuación:

$$I_t = \frac{\sqrt{u'^2}}{U}$$

**Ecuación 61.** Cálculo de la intensidad de la turbulencia (**Lopardo, 2012**).

donde:

$u$ : Velocidad de fluctuación

$U$ : Velocidad media en el punto considerado

Ésta intensidad también puede ser calculada mediante un parámetro adimensional ( $C'_p$ ):

$$c'_p = \frac{\sqrt{p'^2}}{\rho \frac{U_1^2}{2}}$$

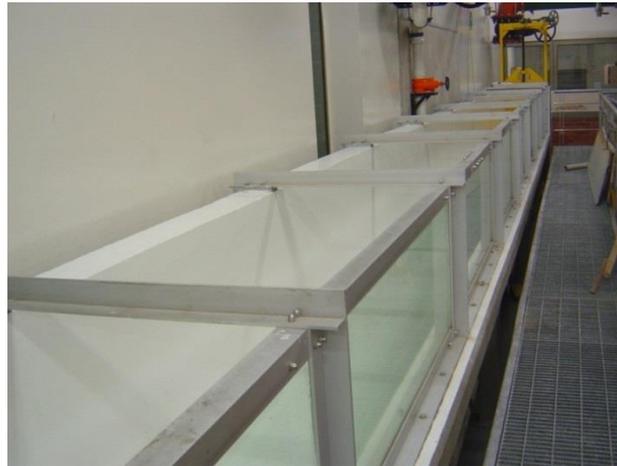
**Ecuación 62.** Cálculo del parámetro adimensional para determinar la turbulencia del resalto hidráulico (**Lopardo, 2012**).

## 4. Diseño del modelo

---

### 4.1. Ubicación

El montaje se realizó en el laboratorio de Hidráulica de la Universidad de los Andes, sobre el canal rectangular ubicado en el extremo derecho del laboratorio (Ver plano anexo).



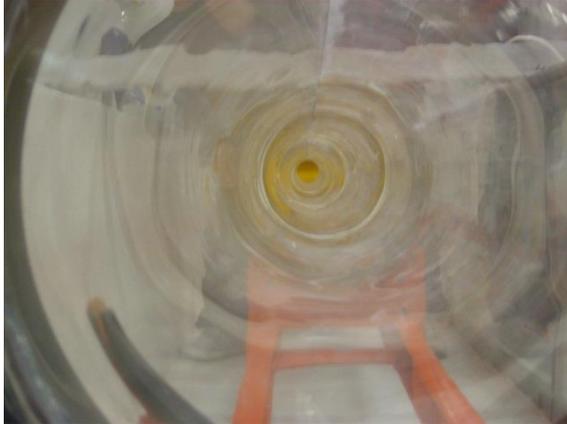
**Ilustración 12.** Canal donde se ubicó el montaje.

### 4.2. Proceso de diseño

El proceso ampliado de construcción del montaje se encuentra en la Tesis “Diseño y Construcción de un modelo para estudiar el comportamiento de resaltos hidráulicos en tuberías parcialmente llenas de sección circular, con Números de Froude supercríticos menores a 4 (Montaño Luna, 2012)”.

En general, el montaje consta de 6 tuberías de 2 m de longitud, y una tubería de 1 m de longitud, la cual cuenta con una compuerta para controlar la ubicación del resalto hidráulico. Para sostener la tubería, se realizó un soporte de acero dividido en 4 secciones de 3 m, el cual permite variar la pendiente de la tubería sin poner en riesgo la estructura de la misma.

El montaje final realizado en la tesis de Montaño se muestra a continuación:



**Ilustración 13.** Vista dentro de la tubería.



**Ilustración 14.** Vista de la compuerta con el neumático.



**Ilustración 15.** Vista de la compuerta en el montaje.



**Ilustración 16.** Vista perfil de la compuerta.

Posteriormente, para la lectura de los diferentes parámetros, se adaptaron en la tubería soportes y adiciones para colocar los sensores de nivel y caudal, lo cual se puede observar en el Numeral 4.3.

#### 4.3. Aparatos de medición

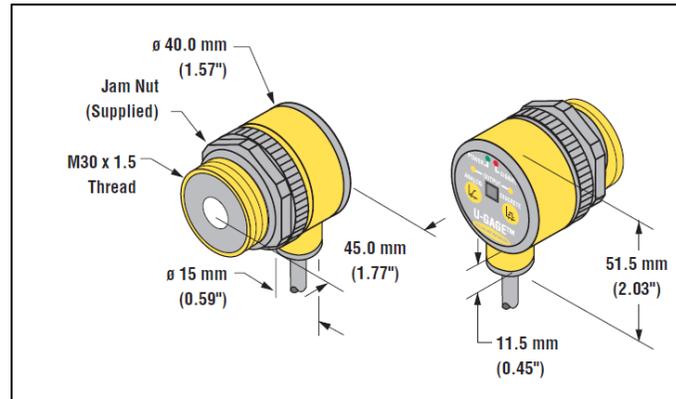
##### 4.3.1. Sensor Ultrasónico U – GAGE T30

El medidor ultrasónico de nivel U – GAGE T30, es un medidor de fácil manejo y programación. Su funcionamiento consiste en lanzar un pulso de ultrasonido sobre una superficie, cuando el pulso encuentra la superficie se refleja y emite la señal al receptor.

Las características del equipo son:

- Su rango de acción se encuentra entre los 15 cm hasta 1 m.
- El rango de temperatura varía entre  $-20^{\circ}\text{C}$  y  $70^{\circ}\text{C}$ .

- El tiempo de respuesta es de 48 milisegundos para la salida discreta y la análoga.



**Ilustración 17.** Características del U - GAGE T30 (Banner Engineering).

Sin embargo, como el sensor tiene una zona muerta de 15 cm, se requirió una adaptación de la tubería para colocar los sensores, la cual consistió en adaptar un tubo en cada tubería donde se requiriera el sensor; y en los casos en los cuales la tubería se presurice aguas abajo, el sensor será retirado y el nivel del flujo se medirá con los piezómetros.



**Ilustración 18.** U - GAGE T30.

#### 4.3.2. ADV (Velocímetro Doppler acústico)

El velocímetro Doppler acústico, es un instrumento que permite medir con alta precisión el comportamiento de la velocidad en las 3 dimensiones.

Consta de 3 elementos para ejecutar la medición: una sonda, un módulo de acondicionamiento de la señal y un procesador. El área muerta de medición del equipo es de 5 cm, por lo cual todas las mediciones que se realizan en el resalto deben superar dicha altura. El rango de velocidad de medición posible está entre  $\pm 3$  cm/s a  $\pm 250$  cm/s.



**Ilustración 19.** ADV (SonTek, 2012).

Para adaptar el ADV en la tubería, se realizó un montaje que permite el movimiento tridimensional del equipo, así poder medir el comportamiento de la velocidad en determinados puntos.



**Ilustración 20.** Adaptación del ADV en la tubería.

#### 4.3.3. Piezómetros

Para medir el nivel de la tubería aguas abajo del resalto, cuando la tubería se encuentre presurizada, se adaptaron unos piezómetros aguas abajo del sensor ADV. Estos piezómetros se encuentran a una distancia de 20 cm entre ellos, dando lugar a 17 piezómetros de medición.



**Ilustración 21.** Piezómetros en la tubería.

#### 4.3.4. Caudalímetro

El caudal que pasa por la tubería es medido por un Caudalímetro Electromagnético ABB, el cual funciona bajo la Ley de inducción de Faraday. El caudal máximo que puede pasar por el tanque de abastecimiento es de 110 L/s, sin embargo, debido a las condiciones del canal, de la tubería y los tanques aguas arriba y aguas abajo del montaje, el caudal máximo que pasará por la tubería fue de 80 L/s.



**Ilustración 22.** Caudalímetro ABB.

### 4.4. Metodología y proceso de medición

#### 4.4.1. Profundidad del flujo

##### 4.4.1.1. Parámetros de medición

Los parámetros a medir en la tubería son:

- Altura del nivel del flujo aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico.
- Longitud del resalto hidráulico (Longitud de la formación de las burbujas y del resalto hidráulico como tal).
- Temperatura del resalto hidráulico.

- Temperatura del flujo aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico.

#### 4.4.1.2. Metodología de medición

1. Variación de las pendientes<sup>4</sup>.
2. Abertura de la válvula.
3. Purga de piezómetros.
4. Variación de los caudales.
5. Toma de datos de niveles, caudal y velocidad.
6. Medición de la temperatura aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico.
7. Medición de la longitud de las burbujas y la longitud del resalto.

#### 4.1.1.3. Lista de caudales y pendientes

Teniendo en cuenta el caudal y la pendiente máxima permitidos en el montaje, se realizó la siguiente lista, en la cual también se muestra el valor del Número de Froude, ya que con este valor se puede estimar la fuerza del resalto hidráulico:

**Tabla 4.** Lista de caudales y pendientes.<sup>5</sup>

# Escenario	S (-)	Q (m <sup>3</sup> /s)	y <sub>n</sub> (m)	y <sub>n</sub> /d (-)	Número de Froude (-)
1	0.005	0.005	0.048	0.198	0.241
2	0.005	0.015	0.084	0.346	0.699
3	0.005	0.025	0.111	0.458	1.137
4	0.005	0.035	0.135	0.559	1.555
5	0.005	0.045	0.160	0.661	1.956
6	0.005	0.055	0.188	0.776	2.331
7	0.007	0.005	0.044	0.181	0.242
8	0.007	0.015	0.076	0.314	0.705
9	0.007	0.025	0.100	0.412	1.148
10	0.007	0.035	0.121	0.500	1.576
11	0.007	0.045	0.141	0.583	1.989
12	0.007	0.055	0.162	0.668	2.386
13	0.007	0.065	0.185	0.763	2.762
14	0.007	0.075	0.222	0.919	3.082
15	0.009	0.005	0.041	0.169	0.243
16	0.009	0.015	0.071	0.292	0.708
17	0.009	0.025	0.093	0.382	1.156
18	0.009	0.035	0.112	0.461	1.590

<sup>4</sup> Las pendientes y los caudales variarán de acuerdo con la lista presentada en el Numeral 4.1.1.3.

<sup>5</sup> La convención (-) indica que la variable es adimensional.

**Continuación Tabla 4.** Lista de caudales y pendientes.

# Escenario	S (-)	Q (m <sup>3</sup> /s)	y <sub>n</sub> (m)	y <sub>n</sub> /d (-)	Número de Froude (-)
19	0.009	0.045	0.129	0.535	2.011
20	0.009	0.055	0.147	0.608	2.418
21	0.009	0.065	0.165	0.683	2.811
22	0.009	0.075	0.186	0.767	3.185
23	0.011	0.005	0.039	0.160	0.243
24	0.011	0.015	0.067	0.276	0.711
25	0.011	0.025	0.087	0.360	1.162
26	0.011	0.035	0.105	0.433	1.600
27	0.011	0.045	0.121	0.501	2.026
28	0.011	0.055	0.137	0.566	2.441
29	0.011	0.065	0.153	0.631	2.843
30	0.011	0.075	0.169	0.700	3.231
31	0.013	0.005	0.037	0.153	0.244
32	0.013	0.015	0.064	0.263	0.713
33	0.013	0.025	0.083	0.343	1.166
34	0.013	0.035	0.100	0.411	1.608
35	0.013	0.045	0.115	0.474	2.038
36	0.013	0.055	0.129	0.535	2.458
37	0.013	0.065	0.144	0.594	2.867
38	0.013	0.075	0.158	0.655	3.264
39	0.015	0.005	0.036	0.147	0.244
40	0.015	0.015	0.061	0.253	0.715
41	0.015	0.025	0.080	0.329	1.170
42	0.015	0.035	0.095	0.394	1.614
43	0.015	0.045	0.110	0.453	2.048
44	0.015	0.055	0.123	0.510	2.471
45	0.015	0.065	0.137	0.565	2.885
46	0.015	0.075	0.150	0.620	3.289
47	0.017	0.005	0.034	0.142	0.244
48	0.017	0.015	0.059	0.244	0.716
49	0.017	0.025	0.077	0.317	1.173
50	0.017	0.035	0.092	0.380	1.620
51	0.017	0.045	0.106	0.436	2.056
52	0.017	0.055	0.118	0.489	2.483
53	0.017	0.065	0.131	0.541	2.900
54	0.017	0.075	0.143	0.593	3.309

**Continuación Tabla 4.** Lista de caudales y pendientes.

# Escenario	S (-)	Q (m <sup>3</sup> /s)	y <sub>n</sub> (m)	y <sub>n</sub> /d (-)	Número de Froude (-)
55	0.019	0.005	0.033	0.138	0.245
56	0.019	0.015	0.057	0.237	0.717
57	0.019	0.025	0.074	0.307	1.176
58	0.019	0.035	0.089	0.367	1.624
59	0.019	0.045	0.102	0.421	2.063
60	0.019	0.055	0.114	0.472	2.492
61	0.019	0.065	0.126	0.521	2.913
62	0.019	0.075	0.138	0.570	3.325
63	0.021	0.005	0.033	0.134	0.245
64	0.021	0.015	0.056	0.230	0.718
65	0.021	0.025	0.072	0.299	1.178
66	0.021	0.035	0.086	0.356	1.628
67	0.021	0.045	0.099	0.409	2.069
68	0.021	0.055	0.111	0.458	2.500
69	0.021	0.065	0.122	0.505	2.924
70	0.021	0.075	0.133	0.550	3.340
71	0.023	0.005	0.032	0.131	0.245
72	0.023	0.015	0.054	0.224	0.719
73	0.023	0.025	0.070	0.291	1.180
74	0.023	0.035	0.084	0.347	1.632
75	0.023	0.045	0.096	0.398	2.074
76	0.023	0.055	0.108	0.445	2.508
77	0.023	0.065	0.119	0.490	2.934
78	0.023	0.075	0.129	0.534	3.352
79	0.025	0.005	0.031	0.128	0.245
80	0.025	0.015	0.053	0.219	0.720
81	0.025	0.025	0.069	0.284	1.182
82	0.025	0.035	0.082	0.339	1.635
83	0.025	0.045	0.094	0.388	2.078
84	0.025	0.055	0.105	0.433	2.514
85	0.025	0.065	0.115	0.477	2.942
86	0.025	0.075	0.126	0.519	3.363
87	0.027	0.005	0.030	0.126	0.245
88	0.027	0.015	0.052	0.215	0.721
89	0.027	0.025	0.067	0.278	1.184
90	0.027	0.035	0.080	0.331	1.637

**Continuación Tabla 4.** Lista de caudales y pendientes.

# Escenario	S (-)	Q (m <sup>3</sup> /s)	y <sub>n</sub> (m)	y <sub>n</sub> /d (-)	Número de Froude (-)
91	0.027	0.045	0.092	0.379	2.083
92	0.027	0.055	0.102	0.423	2.520
93	0.027	0.065	0.113	0.465	2.950
94	0.027	0.075	0.123	0.506	3.373
95	0.029	0.005	0.030	0.123	0.245
96	0.029	0.015	0.051	0.211	0.722
97	0.029	0.025	0.066	0.272	1.185
98	0.029	0.035	0.079	0.324	1.640
99	0.029	0.045	0.090	0.371	2.086
100	0.029	0.055	0.100	0.414	2.525
101	0.029	0.065	0.110	0.455	2.957
102	0.029	0.075	0.120	0.495	3.382
103	0.031	0.005	0.029	0.121	0.246
104	0.031	0.015	0.050	0.207	0.722
105	0.031	0.025	0.065	0.267	1.187
106	0.031	0.035	0.077	0.318	1.642
107	0.031	0.045	0.088	0.364	2.090
108	0.031	0.055	0.098	0.406	2.530
109	0.031	0.065	0.108	0.446	2.963
110	0.031	0.075	0.117	0.484	3.390

#### 4.4.2. Distribución de velocidades

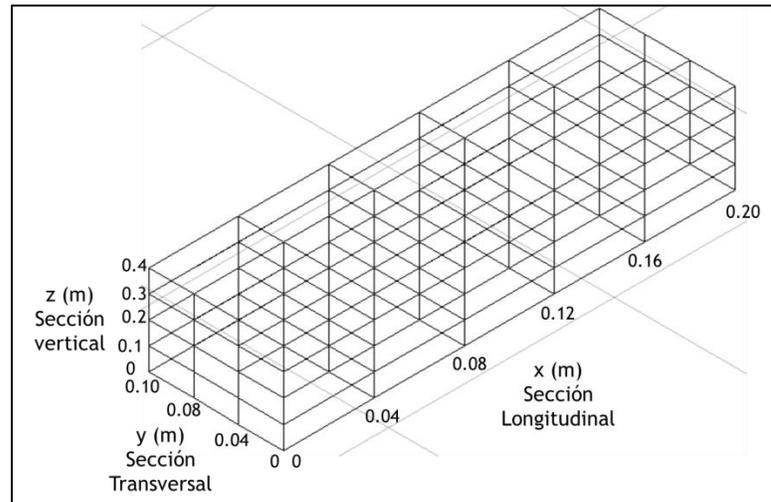
##### 4.4.2.1. Parámetros de medición

Los parámetros necesarios para entender el comportamiento de la distribución de la velocidad del flujo son:

- Velocidad en cada uno de los puntos de medición.
- Profundidad del flujo aguas arriba del resalto.
- Caudal de entrada en la tubería.

##### 4.4.2.2. Metodología de medición

La medición de los datos está organizada de acuerdo con la siguiente matriz geométrica:



**Ilustración 23.** Matriz geométrica de medición de la Distribución de Velocidades.

Con la matriz de medición establecida, se variaba la ubicación del ADV para cubrir cada uno de los puntos deseados, mediante el montaje expuesto en el Numeral 4.3.2.

##### 4.4.2.3. Lista de caudales y pendientes

El listado de caudales y pendientes que se evaluarán, cumplirán con la condición de generar un resalto hidráulico estable, es decir, solo se tomarán caudales y pendientes tales que el caudal sea mayor a 10 L/s y menor a 50 L/s, y pendientes mayores al 1.1%.

**Tabla 5.** Lista de caudales y pendientes para el análisis del comportamiento de la velocidad.

# Escenario	Pendiente (-)	Caudal (m <sup>3</sup> /s)
1	0.012	0.024
2	0.012	0.030

---

# Escenario	Pendiente (-)	Caudal (m <sup>3</sup> /s)
3	0.016	0.019
4	0.016	0.024
5	0.017	0.019
6	0.017	0.026
7	0.020	0.020
8	0.020	0.025
9	0.021	0.019
10	0.021	0.025
11	0.022	0.021
12	0.022	0.026

## 5. Pruebas de verificación de los parámetros hidráulicos de la tubería

Los Numerales 5.1, 5.2 y 5.3 se encuentran en la tesis de pregrado denominada “Diseño y construcción de un modelo para estudiar el comportamiento de resaltos hidráulicos en tuberías fluyendo parcialmente llenas de sección circular, con Números de Froude supercríticos menores a 4” (Montaño Luna, 2012).

### 5.1. Comprobación de Diseño

El proceso de comprobación de diseño se realizó para determinar cuál era el diámetro que se debía elegir para transportar el caudal de 77.6 L/s, evitando tener una relación de llenado muy baja, y alturas menores a 48 cm (altura máxima permitida por el canal en la compuerta aguas arriba).

Por lo tanto, se realizó un análisis para relaciones de llenado del 50%, 85 % y 92.9% con una pendiente del 1.88%, y una variación del diámetro cada 0.05 m.

A continuación se presentan los cálculos realizados para la primera iteración, la cual se llevó a cabo para un diámetro de 0.2 m:

1. Cálculo de la profundidad normal:

$$y_n = (\% \text{llenado}) * d = 0.5 * 0.2 = 0.1 \text{ m}$$

**Ecuación 63.** Cálculo de la relación de llenado.

2. Cálculo de  $\theta$ :

$$\theta = \pi + 2\text{sen}^{-1}\left(\frac{y_n - \frac{d}{2}}{\frac{d}{2}}\right) = \pi + 2\text{sen}^{-1}\left(\frac{0.1 - \frac{0.2}{2}}{\frac{0.2}{2}}\right) = 3.1416$$

**Ecuación 64.** Cálculo de  $\theta$ .

3. Cálculo del área

$$A = \frac{d^2}{8}(\theta - \text{sen}(\theta)) = \frac{0.2^2}{8}(3.142 - \text{sen}(3.142)) = 0.016 \text{ m}^2$$

**Ecuación 65.** Cálculo del área mojada.

4. Cálculo del perímetro

$$P = \theta \cdot \frac{d}{2} = 3.142 \cdot \frac{0.2}{2} = 0.314 \text{ m}$$

**Ecuación 66.** Cálculo del perímetro mojado.

5. Cálculo del radio hidráulico

$$R = \frac{A}{P} = \frac{0.016 \text{ m}^2}{0.314 \text{ m}} = 0.05 \text{ m}$$

**Ecuación 67.** Cálculo del radio hidráulico.

6. Cálculo de la velocidad

$$v = -2\sqrt{8gRS} \log_{10} \left( \left( \frac{ks}{14.8R} \right) + \frac{(2.51v)}{4R\sqrt{8gRS}} \right) = 2.315 \text{ m/s}$$

**Ecuación 68.** Cálculo de la velocidad.

7. Cálculo del caudal

$$Q = A \cdot v = 0.016 \cdot 2.315 = 0.036 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Ecuación 69.** Cálculo del caudal.

8. Cálculo del Número de Reynolds

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{2.315 \cdot 0.2}{1.14 \cdot 10^{-6}} = 406173.5$$

**Ecuación 70.** Cálculo del Número de Reynodls.

9. Cálculo del ancho de la superficie

$$T = d \cos \left( \arcsen \left( \frac{y_n - \frac{d}{2}}{\frac{d}{2}} \right) \right) = 0.2 \text{ m}$$

**Ecuación 71.** Cálculo del ancho de la superficie.

10. Cálculo de la profundidad hidráulica

$$D = \frac{A}{T} = \frac{0.016}{0.2} = 0.079 \text{ m}$$

**Ecuación 72.** Cálculo de la profundidad hidráulica.

11. Cálculo del Número de Froude

$$\text{Número de Froude} = \frac{v}{\sqrt{gD}} = \frac{2.315}{\sqrt{9.81 \cdot 0.079}} = 2.638$$

**Ecuación 73.** Cálculo del Número de Froude.

12. Altura total del soporte y el diámetro de la tubería

$$H_t = d + h_{\text{soporte}} = 0.2 + 0.1 = 0.3 \text{ m}$$

**Ecuación 74.** Cálculo de la altura total del soporte.

Siguiendo el procedimiento planteado, se obtienen las siguientes tablas:

**Tabla 6.** Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 50 %.

d (m)	yn (m)	$\theta$ (-)	Á (m <sup>2</sup> )	P (m)	R (m)	V (m)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Re (-)	T (m)	D (m)	Número de Froude (-)	h soporte (m)	d + soporte (m)
0,2	0,1	3,142	0,016	0,314	0,050	2,315	0,036	406173,515	0,200	0,079	2,638	0,100	0,300
0,25	0,125	3,142	0,025	0,393	0,063	2,676	0,066	586753,110	0,250	0,098	2,726	0,100	0,350
0,3	0,15	3,142	0,035	0,471	0,075	3,009	0,106	791802,752	0,300	0,118	2,799	0,100	0,400
0,35	0,175	3,142	0,048	0,550	0,088	3,321	0,160	1019595,837	0,350	0,137	2,860	0,100	0,450
0,4	0,2	3,142	0,063	0,628	0,100	3,616	0,227	1268764,140	0,400	0,157	2,913	0,100	0,500
0,45	0,225	3,142	0,080	0,707	0,113	3,897	0,310	1538186,062	0,450	0,177	2,960	0,100	0,550
0,5	0,25	3,142	0,098	0,785	0,125	4,165	0,409	1826918,772	0,500	0,196	3,001	0,100	0,600
0,55	0,275	3,142	0,119	0,864	0,138	4,424	0,525	2134154,161	0,550	0,216	3,039	0,100	0,650

En la Tabla 6 se resaltan los diámetros que cumplen con caudales cercanos al caudal máximo permitido en el montaje y no superan los 48 cm de la compuerta. Cabe destacar, que las tuberías con diámetros de 200 mm y 250 mm mueven un caudal menor que el caudal máximo con una relación de llenado del 50%, lo que indica que se puede realizar una variación mayor de las relaciones de llenado en éstos diámetros respecto a los diámetros de 300 mm.

**Tabla 7.** Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 85 %.

d (m)	yn (m)	$\theta$ (-)	Á (m <sup>2</sup> )	P (m)	R (m)	V (m)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Re (-)	T (m)	D (m)	Número de Froude (-)	h soporte (m)	d + soporte (m)
0.1	0.085	4.692	0.007	0.235	0.030	2.158	0.015	229631.7	0.071	0.100	2.183	0.1	0.200
0.15	0.128	4.692	0.016	0.352	0.045	2.814	0.045	449084.9	0.107	0.149	2.324	0.1	0.250
0.2	0.17	4.692	0.028	0.469	0.061	3.388	0.096	721077.9	0.143	0.199	2.423	0.1	0.300
0.25	0.213	4.692	0.044	0.587	0.076	3.909	0.174	1039829.5	0.179	0.249	2.501	0.1	0.350
0.3	0.255	4.692	0.064	0.704	0.091	4.390	0.281	1401297.5	0.214	0.299	2.563	0.1	0.400
0.35	0.298	4.692	0.087	0.821	0.106	4.840	0.422	1802433.9	0.250	0.349	2.617	0.1	0.450
0.4	0.34	4.692	0.114	0.938	0.121	5.265	0.599	2240825.9	0.286	0.399	2.663	0.1	0.500
0.45	0.383	4.692	0.144	1.056	0.136	5.669	0.817	2714497.0	0.321	0.448	2.703	0.1	0.550
0.5	0.425	4.692	0.178	1.173	0.152	6.055	1.077	3221787.4	0.357	0.498	2.739	0.1	0.600
0.55	0.468	4.692	0.215	1.290	0.167	6.427	1.383	3761274.8	0.393	0.548	2.772	0.1	0.650

En la Tabla 7 se puede observar que con relaciones de llenado del 85 % (relación de llenado máxima permitida por el RAS), los diámetros cercanos al caudal máximo son los de 200 mm, 250 mm y 300

mm; pero al igual que con la relación de llenado del 50 %, los diámetros de 200 mm y 250 mm permiten análisis con relaciones de llenado más altas dado que el caudal que transportan sigue siendo menor que el caudal máximo que puede transportar el montaje.

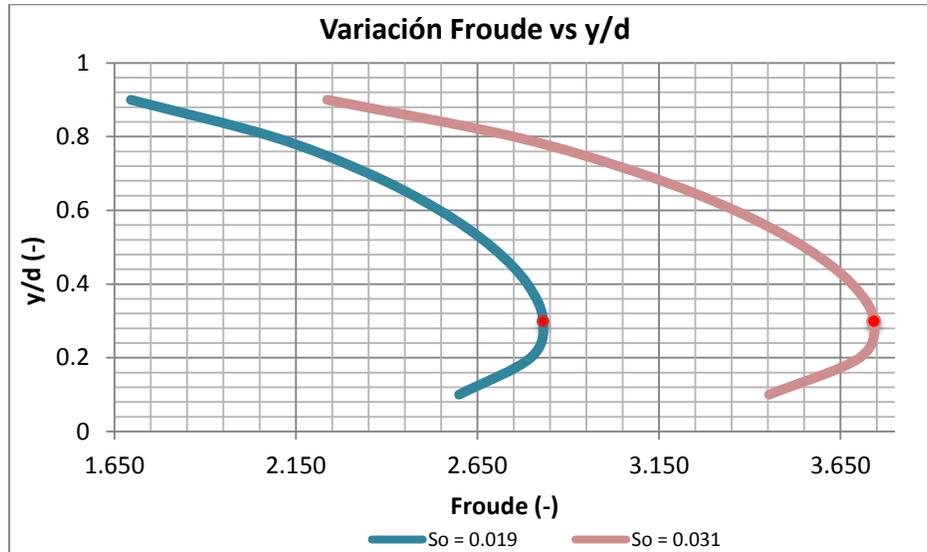
**Tabla 8.** Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 92.9 %.

<b>d</b> (m)	<b>yn</b> (m)	<b>(-)</b>	<b>A</b> (m <sup>2</sup> )	<b>P</b> (m)	<b>R</b> (m)	<b>V</b> (m/s)	<b>Q</b> (m <sup>3</sup> /s)	<b>Re</b> (-)	<b>h</b> (m)	<b>d + soporte</b> (m)
0,1	0,093	5,204	0,008	0,260	0,029	1,627	0,012	166855,528	0,100	0,200
0,15	0,139	5,204	0,017	0,390	0,044	2,125	0,036	326990,425	0,100	0,250
0,2	0,186	5,204	0,030	0,520	0,058	2,563	0,078	525738,360	0,100	0,300
0,25	0,232	5,204	0,048	0,651	0,073	2,959	0,141	758879,656	0,100	0,350
0,3	0,279	5,204	0,068	0,781	0,088	3,326	0,228	1023461,122	0,100	0,400
0,35	0,325	5,204	0,093	0,911	0,102	3,669	0,342	1317254,232	0,100	0,450
0,4	0,372	5,204	0,122	1,041	0,117	3,993	0,486	1638493,834	0,100	0,500
0,45	0,418	5,204	0,154	1,171	0,132	4,302	0,663	1985733,499	0,100	0,550
0,5	0,465	5,204	0,190	1,301	0,146	4,597	0,874	2357757,724	0,100	0,600
0,55	0,511	5,204	0,230	1,431	0,161	4,881	1,123	2753524,982	0,100	0,650

En la Tabla 8 se está realizando el mismo análisis pero con la relación de llenado que produce el máximo caudal posible que puede transportar la tubería; por lo tanto, como supera la normatividad, se esperaba que no se encuentren relaciones de llenado del 92.9 % en los alcantarillados del país. Sin embargo, para analizar un ejemplo extremo, se realiza éste análisis, el cual muestra que el único diámetro que cumple con el caudal cercano al caudal máximo que puede pasar por la tubería es el de 200 mm, mientras que el diámetro de 250 mm ya se ha alejado 70 L/s del caudal máximo, por lo cual el único diámetro que permitiría realizar un análisis con todas las posibles relaciones de llenado sería el de 200 mm, pero con base en la norma y en la capacidad de visualizar el resalto, se elige el diámetro de 250 mm.

## 5.2. Análisis caudales máximos para diferentes pendientes

Luego de elegir el diámetro, se realizó un análisis con dos tipos de pendientes y diferentes relaciones de llenado para observar la variación del Número de Froude obteniendo los siguientes resultados:



**Gráfica 14.** Variación del Número de Froude respecto a la relación de llenado para diferentes pendientes.

La línea azul se calculó con la pendiente original del canal (1.9%), el coeficiente de rugosidad del PVC, la viscosidad del agua de  $1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  y con relaciones de llenado variantes entre el 10% y el 100% y la línea rosada se calculó con una pendiente de 3.1 % (pendiente máxima que podrá tomar el montaje) y los demás valores idénticos a la línea azul.

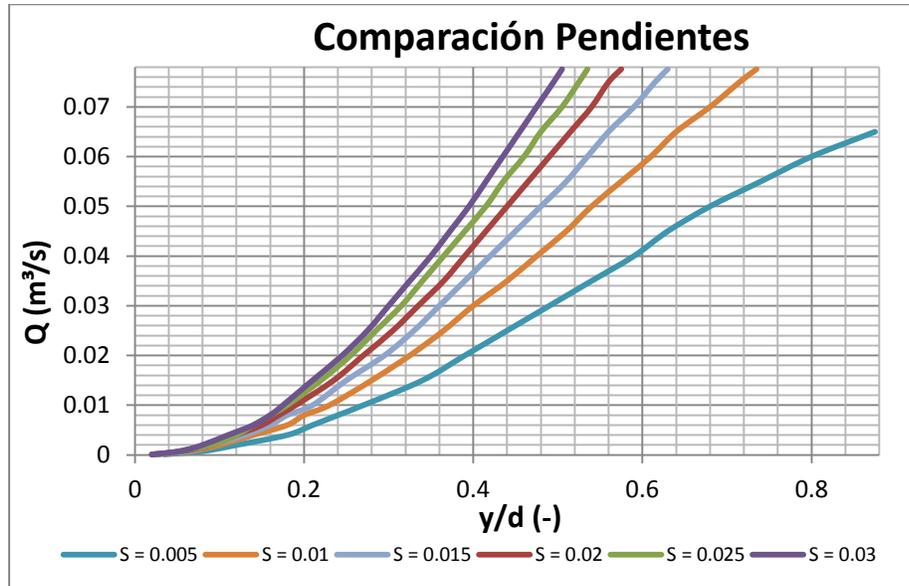
Por lo tanto, observando la Gráfica 14, se puede observar que para relaciones de llenado menores al 30%, el Número de Froude aumenta a medida que aumenta la relación de llenado; para relaciones de llenado mayores al 30%, el Número de Froude disminuye a medida que aumenta la relación de llenado y cuando la relación de llenado es aproximadamente del 30%, se observa el valor máximo del Número de Froude. También se observa que el rango de variación del Número de Froude es mayor en la línea rosada que en la línea azul, debido a que el aumento de la pendiente aumenta la variación en la velocidad del flujo.

Para corroborar el valor máximo del Número de Froude, se realizó un análisis más detallado de diferentes pendientes y diferentes caudales para encontrar la curva que representa la variación del Número de Froude respecto a las relaciones de llenado.

### 5.3. Análisis del valor máximo del Número de Froude

Para encontrar la curva que describiría en qué relaciones de llenado se encuentran los valores máximos del Número de Froude, se realizó un análisis con diferentes pendientes (las cuales variaban entre el 0.5% al 2.5%) para encontrar las relaciones de llenado que cumplían con un rango de caudales entre 0.01 L/s hasta 77.6 L/s. El proceso del análisis se describirá mediante las gráficas mostradas posteriormente.

La primera gráfica refleja la forma como varía el caudal  $Q$  respecto a la relación de llenado (Ver Gráfica 15):

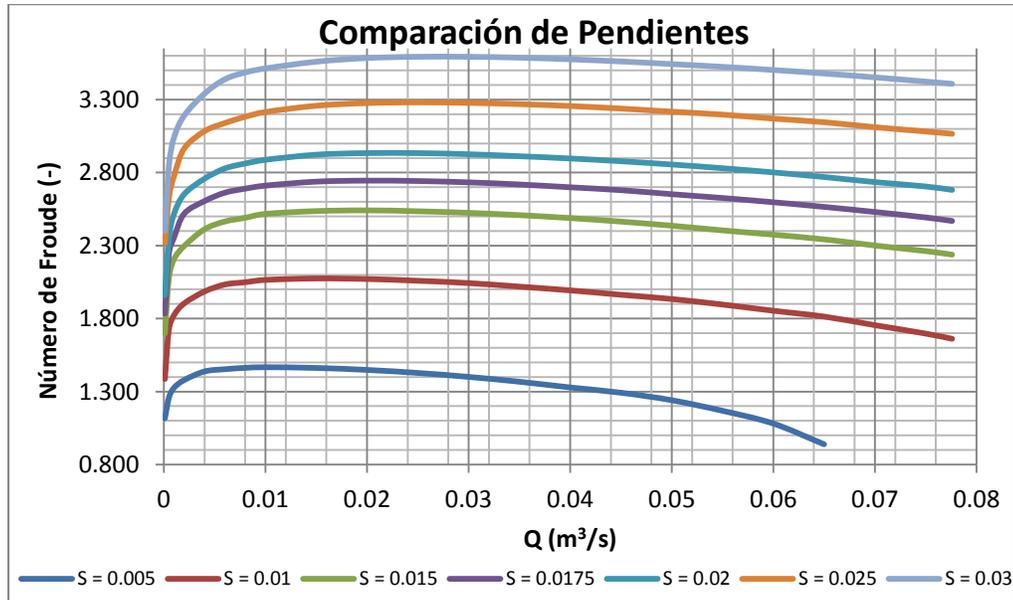


**Gráfica 15.** Variación del caudal respecto a la relación de llenado.

La Gráfica 15 permite observar que cuando la pendiente es más baja, la variación de la relación de llenado mueve un rango de caudales más bajo que las pendientes más altas. Ésta afirmación se explicaba también con la Gráfica 14, puesto que en la pendiente más alta (3.1%), el Número de Froude tenía mayor rango de variación, y como el Número de Froude y el caudal son proporcionales a la velocidad, se concluye que cuando aumenta la pendiente, el rango de variación de la velocidad aumenta.

También se observa que cuando las pendientes aumentan, las curvas se van acercando entre sí, lo que indica que el comportamiento del flujo empieza a ser similar.

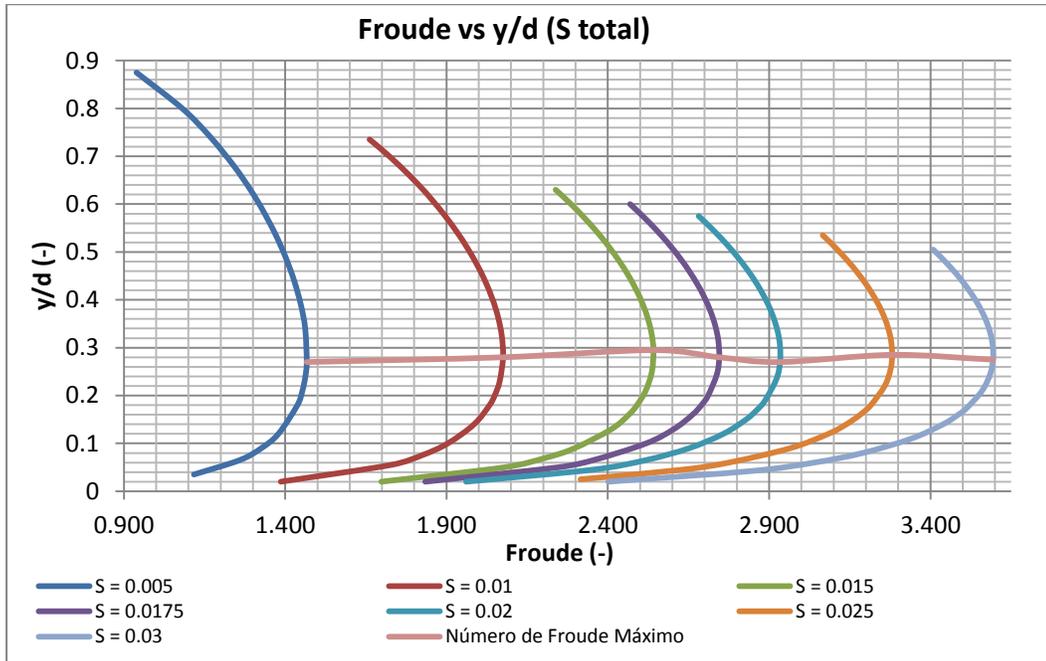
Posteriormente, se compara la variación del Número de Froude para diversos caudales (Ver Gráfica 16):



**Gráfica 16.** Variación del Número de Froude para diversos caudales.

En la Gráfica 16 se observa un valor del Número de Froude máximo para diferentes caudales, el cual se va desplazando hacia la derecha a medida que aumenta la pendiente, lo que permite concluir que a mayor pendiente, el máximo valor del Número de Froude se encuentra en caudales más altos. Además los rangos del Número de Froude aumentan con el incremento de la pendiente, lo que sustenta las afirmaciones expuestas en las anteriores gráficas, donde a mayor pendiente, mayor velocidad, es decir, mayor Número de Froude.

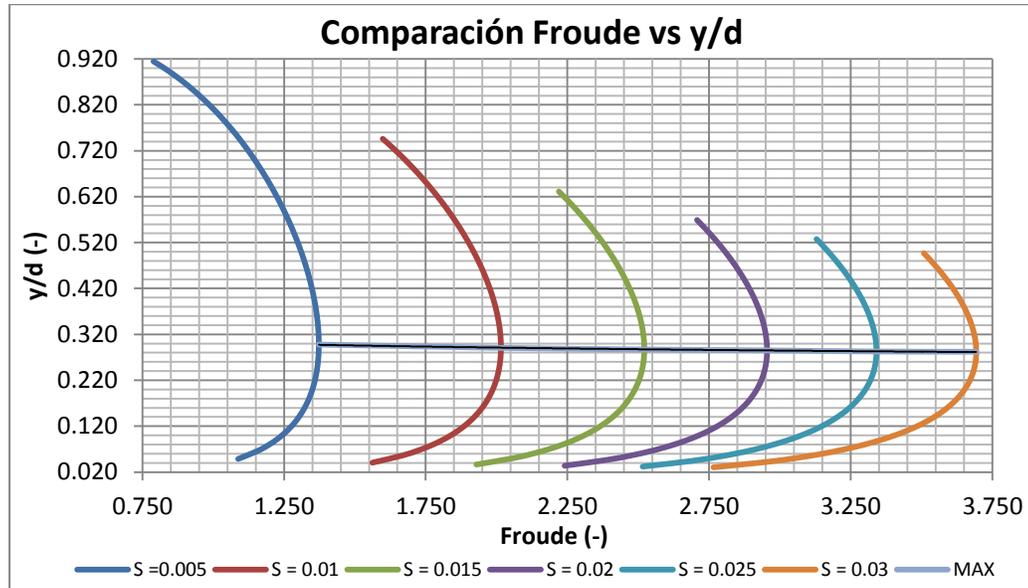
Luego, se realiza una gráfica similar a la Gráfica 16 pero para los caudales expuestos en éste análisis, lo cual se observa en la siguiente ilustración:



**Gráfica 17.** Variación del Número de Froude para diferentes relaciones de llenado.

La Gráfica 17 muestra nuevamente que el Número de Froude máximo se encuentra con relaciones de llenado cercanas al 30%, pero la ilustración no permite obtener una ecuación coherente de la recta; por lo tanto, se requiere otro tipo de análisis para encontrar una curva que pueda representar el máximo en el Número de Froude para el montaje.

El análisis requiere aumentar el número de caudales elegidos para el análisis, puesto que con los caudales analizados, se está parcializando el valor de las relaciones de llenado; por lo tanto, para encontrar ésta curva se hizo uso de una macro en Excel con el lenguaje VBA (Anexo 1), la cual converge mediante el método de la bisección (Ver Gráfica 18), en la cual el caudal aumenta cada 0.25 L/s:



**Gráfica 18.** Comparación Número de Froude respecto a diferentes relaciones de llenado.

La Gráfica 18 permite demostrar que la curva que describe mejor en qué relación de llenado se encuentran los Números de Froude máximos se ajusta a una curva potencial, la cual se calcula mediante la Ecuación 75:

$$y = 0.3026x^{-0.055}$$

**Ecuación 75.** Curva que describe el Número de Froude máximo.

Por lo cual, en el montaje que se realizará, los Números de Froude máximos se encontrarán entre las relaciones de llenado de 0.28 y 0.30, es decir, que el resalto hidráulico más fuerte se presentará cuando la profundidad aguas arriba del resalto se encuentre entre 0.28 a 0.30 veces el diámetro.

## 5.4 Análisis Comparativo con otros autores para el cálculo de la profundidad subsecuente al resalto hidráulico

El análisis comparativo que se mostrará a continuación para el cálculo de la profundidad subsecuente al resalto hidráulico, se realizará con los datos del montaje realizado; es decir, el material de la tubería es acrílico, con una rugosidad de  $1.5 \times 10^{-6}$  m, una longitud de 13 m, diámetro interno de 0.242 m, viscosidad dinámica de  $1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  y con dos pendientes posibles del canal: 0.019 y 0.031.

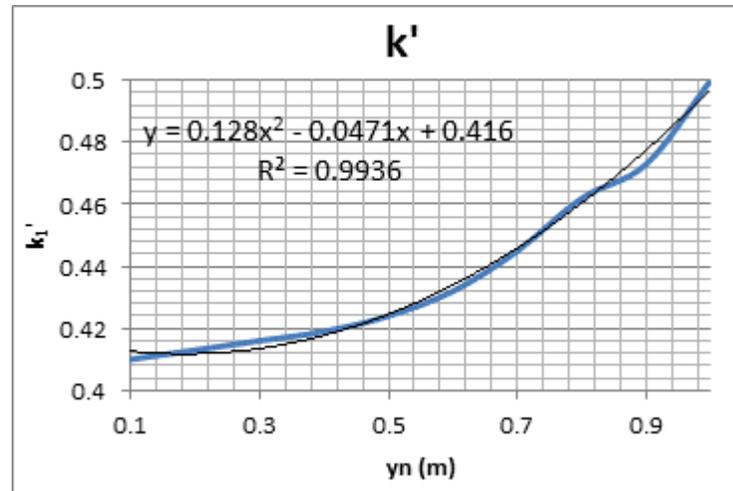
A continuación se presentan los cálculos realizados con las ecuaciones mostradas en el Numeral 2.

### 5.4.1 Silvester

De acuerdo con lo establecido por Silvester, se graficó una curva para determinar el  $k'$ :

**Tabla 9.** Valores de  $k'$  dependiendo de la relación de llenado (Silvester, 1964).

d/D	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$k'$	0.41	0.413	0.416	0.419	0.424	0.432	0.445	0.462	0.473	0.5



**Gráfica 19.** Curva para determinar  $k'$ .

Teniendo el  $k'$ , entonces se calcula la profundidad subsecuente del resalto hidráulico teniendo en cuenta la variación de las ecuaciones cuando la profundidad subsecuente es menor o mayor al diámetro. Para tal fin, se desarrolló una macro (Anexo 2) que calculara la profundidad subsecuente para dos pendientes: la primera corresponde a 0.019, la cual corresponde a la pendiente promedio que se presentará en el montaje, y la segunda corresponde a 0.031 que correspondería a la pendiente máxima.

Así se obtuvieron los siguientes resultados:

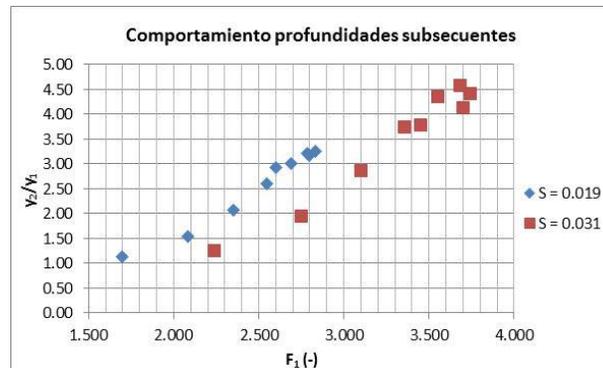
**Tabla 10.** Cálculo de la profundidad subsecuente para una pendiente del 1.9%.

d (m)	y/d (-)	$y_1$ (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	$k_1'$ (-)	$y_2$ (m)	$y_2/y_1$ (-)
0.242	0.1	0.024	1.287	0.002	0.156	0.015	1.045	0.003	56377.905	0.145	0.016	2.599	0.413	0.071	2.942
0.242	0.2	0.048	1.855	0.007	0.224	0.029	1.611	0.011	164939.800	0.194	0.034	2.796	0.412	0.154	3.182
0.242	0.3	0.073	2.319	0.012	0.281	0.041	2.028	0.024	294376.898	0.222	0.052	2.831	0.413	0.238	3.280
0.242	0.4	0.097	2.739	0.017	0.331	0.052	2.350	0.040	427500.511	0.237	0.072	2.787	0.418	0.312	3.224
0.242	0.5	0.121	3.142	0.023	0.380	0.061	2.598	0.060	551433.772	0.242	0.095	2.690	0.424	0.366	3.022
0.242	0.6	0.145	3.544	0.029	0.429	0.067	2.780	0.080	655306.625	0.237	0.122	2.546	0.434	0.381	2.622
0.242	0.7	0.169	3.965	0.034	0.480	0.072	2.898	0.100	728969.002	0.222	0.155	2.350	0.446	0.354	2.089
0.242	0.8	0.194	4.429	0.039	0.536	0.074	2.948	0.116	761416.848	0.194	0.204	2.085	0.460	0.300	1.551
0.242	0.9	0.218	4.996	0.044	0.605	0.072	2.909	0.127	736268.556	0.145	0.300	1.695	0.477	0.250	1.150

**Tabla 11.** Cálculo de la profundidad subsecuente para una pendiente del 3.1%.

d (m)	y/d (-)	y <sub>1</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	k <sub>1</sub> ' (-)	y <sub>2</sub> (m)	y <sub>2</sub> /y <sub>1</sub> (-)
0.242	0.1	0.024	1.287	0.002	0.156	0.015	1.389	0.003	74903.831	0.145	0.016	3.453	0.413	0.092	3.792
0.242	0.2	0.048	1.855	0.007	0.224	0.029	2.133	0.014	218395.095	0.194	0.034	3.702	0.412	0.200	4.131
0.242	0.3	0.073	2.319	0.012	0.281	0.041	2.681	0.031	389159.110	0.222	0.052	3.742	0.413	0.320	4.413
0.242	0.4	0.097	2.739	0.017	0.331	0.052	3.104	0.053	564604.302	0.237	0.072	3.681	0.418	0.443	4.578
0.242	0.5	0.121	3.142	0.023	0.380	0.061	3.429	0.079	727829.080	0.242	0.095	3.551	0.424	0.528	4.365
0.242	0.6	0.145	3.544	0.029	0.429	0.067	3.667	0.106	864573.169	0.237	0.122	3.359	0.434	0.544	3.745
0.242	0.7	0.169	3.965	0.034	0.480	0.072	3.823	0.131	961518.952	0.222	0.155	3.099	0.446	0.484	2.860
0.242	0.8	0.194	4.429	0.039	0.536	0.074	3.888	0.153	1004216.549	0.194	0.204	2.750	0.460	0.376	1.943
0.242	0.9	0.218	4.996	0.044	0.605	0.072	3.837	0.167	971124.647	0.145	0.300	2.236	0.477	0.273	1.255

En las Tabla 10 y Tabla 11 se observa que mientras el flujo sea más supercrítico, la relación entre las profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto será más alta, por lo tanto, para los valores obtenidos en la pendiente más alta, la relación entre las alturas del resalto son mayores, lo cual se confirma con la siguiente gráfica:



**Gráfica 20.** Comportamiento de las profundidades subsecuentes.

En la Gráfica 20 también se observa para un mismo Número de Froude, la relación entre las profundidades del resalto se ven afectadas por la pendiente de la tubería, en donde a mayor pendiente, se tienen valores menores en la relación entre las profundidades.

Por otra parte, se realizó otro análisis en el cual se establecieron dos caudales fijos y se variaba la pendiente para cada uno de ellos. El primer caudal es de 0.01 m<sup>3</sup>/s, y el segundo de 0.1 m<sup>3</sup>/s. Los resultados se observan en las siguientes tablas:

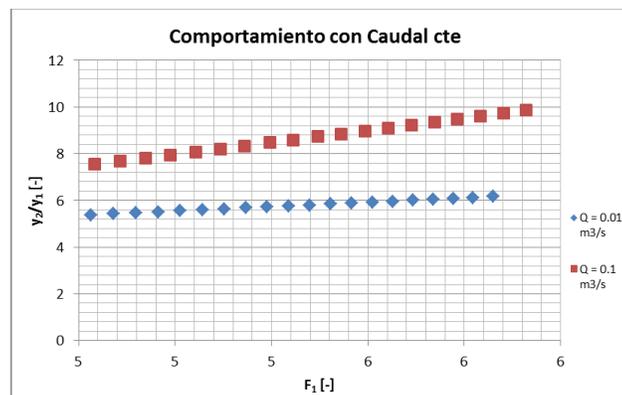
**Tabla 12.** Cálculo de la profundidad subsecuente para un caudal de  $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ .

s (-)	y/d (-)	$y_n$ (m)	teta (-)	Área ( $\text{m}^2$ )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Caudal ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	Re (-)	T (m)	D (m)	F (-)	$k_1'$ (-)	$y_2$ (m)	$y_2/y_1$ (-)
0.050	0.149	0.036	1.583	0.004	0.192	0.022	2.334	0.01	495567.5	0.172	0.025	4.733	0.412	0.183	5.097
0.051	0.148	0.036	1.579	0.004	0.191	0.022	2.354	0.01	499633.3	0.172	0.025	4.783	0.412	0.184	5.144
0.052	0.147	0.036	1.576	0.004	0.191	0.022	2.372	0.01	503618.2	0.172	0.025	4.832	0.412	0.185	5.192
0.053	0.147	0.035	1.571	0.004	0.190	0.022	2.389	0.01	507048.2	0.171	0.024	4.881	0.412	0.186	5.238
0.054	0.146	0.035	1.567	0.004	0.190	0.022	2.407	0.01	510870.2	0.171	0.024	4.929	0.412	0.186	5.284
0.055	0.145	0.035	1.563	0.004	0.189	0.022	2.424	0.01	514615.9	0.170	0.024	4.977	0.412	0.187	5.330
0.056	0.144	0.035	1.559	0.004	0.189	0.022	2.442	0.01	518286.8	0.170	0.024	5.025	0.412	0.188	5.375
0.057	0.144	0.035	1.555	0.004	0.188	0.022	2.458	0.01	521884.1	0.170	0.024	5.072	0.412	0.188	5.420
0.058	0.143	0.035	1.551	0.004	0.188	0.022	2.475	0.01	525409.2	0.169	0.024	5.119	0.412	0.189	5.463
0.059	0.142	0.034	1.548	0.004	0.187	0.021	2.491	0.01	528863.3	0.169	0.024	5.165	0.412	0.190	5.507
0.060	0.142	0.034	1.544	0.004	0.187	0.021	2.507	0.01	532247.5	0.169	0.024	5.211	0.412	0.190	5.550
0.061	0.141	0.034	1.540	0.004	0.186	0.021	2.523	0.01	535563.0	0.168	0.023	5.256	0.412	0.191	5.593
0.062	0.140	0.034	1.536	0.004	0.186	0.021	2.538	0.01	538810.8	0.168	0.023	5.301	0.412	0.191	5.636
0.063	0.140	0.034	1.533	0.004	0.186	0.021	2.556	0.01	542526.7	0.168	0.023	5.347	0.412	0.192	5.679
0.064	0.139	0.034	1.530	0.004	0.185	0.021	2.570	0.01	545648.1	0.168	0.023	5.391	0.412	0.193	5.720
0.065	0.139	0.034	1.527	0.004	0.185	0.021	2.587	0.01	549250.8	0.167	0.023	5.436	0.412	0.194	5.762
0.066	0.138	0.033	1.523	0.004	0.184	0.021	2.602	0.01	552249.6	0.167	0.023	5.479	0.412	0.194	5.803
0.067	0.138	0.033	1.520	0.004	0.184	0.021	2.618	0.01	555742.8	0.167	0.023	5.523	0.412	0.195	5.844
0.068	0.137	0.033	1.517	0.004	0.184	0.021	2.632	0.01	558622.5	0.166	0.023	5.566	0.412	0.195	5.884
0.069	0.137	0.033	1.514	0.004	0.183	0.021	2.647	0.01	562009.4	0.166	0.023	5.609	0.412	0.196	5.924
0.070	0.136	0.033	1.510	0.004	0.183	0.021	2.661	0.01	564773.1	0.166	0.023	5.651	0.412	0.196	5.963
0.071	0.136	0.033	1.507	0.004	0.182	0.020	2.676	0.01	568056.9	0.166	0.023	5.694	0.412	0.197	6.003
0.072	0.135	0.033	1.505	0.004	0.182	0.020	2.691	0.01	571292.8	0.165	0.022	5.736	0.412	0.197	6.043
0.073	0.135	0.033	1.502	0.004	0.182	0.020	2.706	0.01	574481.7	0.165	0.022	5.778	0.412	0.198	6.083
0.074	0.134	0.032	1.498	0.004	0.181	0.020	2.718	0.01	577028.3	0.165	0.022	5.818	0.412	0.198	6.119
0.075	0.134	0.032	1.496	0.004	0.181	0.020	2.733	0.01	580119.5	0.165	0.022	5.860	0.412	0.199	6.158

**Tabla 13.** Cálculo de la profundidad subsecuente para un caudal de 0.1 m<sup>3</sup>/s.

s (-)	y/d (-)	y <sub>n</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Caudal (m <sup>3</sup> /s)	Re (-)	T (m)	D (m)	F (-)	k <sub>1</sub> ' (-)	y <sub>2</sub> (m)	y <sub>2</sub> /y <sub>1</sub> (-)
0.050	0.492	0.119	3.109	0.023	0.376	0.060	4.439	0.100	942370.7	0.242	0.093	4.645	0.424	0.788	6.617
0.051	0.489	0.118	3.095	0.022	0.374	0.060	4.474	0.100	949699.2	0.242	0.092	4.703	0.424	0.798	6.754
0.052	0.486	0.118	3.084	0.022	0.373	0.059	4.511	0.100	957583.8	0.242	0.092	4.759	0.423	0.809	6.887
0.053	0.483	0.117	3.070	0.022	0.371	0.059	4.544	0.100	964563.4	0.242	0.091	4.816	0.423	0.819	7.025
0.054	0.480	0.116	3.059	0.022	0.370	0.059	4.579	0.100	972132.8	0.242	0.090	4.870	0.423	0.830	7.157
0.055	0.477	0.115	3.048	0.022	0.369	0.059	4.614	0.100	979554.8	0.242	0.089	4.925	0.423	0.841	7.290
0.056	0.474	0.115	3.037	0.021	0.368	0.058	4.649	0.100	986831.7	0.242	0.089	4.979	0.423	0.851	7.422
0.057	0.472	0.114	3.027	0.021	0.366	0.058	4.682	0.100	993965.6	0.242	0.088	5.033	0.422	0.862	7.555
0.058	0.469	0.113	3.016	0.021	0.365	0.058	4.715	0.100	1000958.5	0.242	0.088	5.086	0.422	0.872	7.687
0.059	0.466	0.113	3.005	0.021	0.364	0.058	4.748	0.100	1007812.3	0.241	0.087	5.139	0.422	0.882	7.819
0.060	0.464	0.112	2.998	0.021	0.363	0.058	4.783	0.100	1015377.9	0.241	0.087	5.190	0.422	0.893	7.947
0.061	0.461	0.112	2.987	0.021	0.361	0.057	4.814	0.100	1021972.8	0.241	0.086	5.243	0.422	0.902	8.079
0.062	0.459	0.111	2.976	0.021	0.360	0.057	4.845	0.100	1028433.7	0.241	0.085	5.295	0.421	0.911	8.210
0.063	0.457	0.111	2.969	0.020	0.359	0.057	4.879	0.100	1035651.8	0.241	0.085	5.345	0.421	0.922	8.338
0.064	0.455	0.110	2.958	0.020	0.358	0.057	4.908	0.100	1041863.8	0.241	0.084	5.396	0.421	0.931	8.467
0.065	0.452	0.109	2.951	0.020	0.357	0.057	4.941	0.100	1048862.2	0.241	0.084	5.445	0.421	0.941	8.595
0.066	0.450	0.109	2.940	0.020	0.356	0.056	4.969	0.100	1054831.2	0.241	0.083	5.496	0.421	0.950	8.725
0.067	0.448	0.109	2.935	0.020	0.355	0.056	5.003	0.100	1062086.0	0.241	0.083	5.544	0.421	0.960	8.850
0.068	0.446	0.108	2.926	0.020	0.354	0.056	5.032	0.100	1068301.6	0.241	0.083	5.594	0.421	0.969	8.978
0.069	0.444	0.108	2.919	0.020	0.353	0.056	5.064	0.100	1074890.1	0.240	0.082	5.642	0.420	0.979	9.105
0.070	0.442	0.107	2.910	0.020	0.352	0.056	5.092	0.100	1080893.3	0.240	0.082	5.691	0.420	0.988	9.231
0.071	0.440	0.107	2.902	0.020	0.351	0.056	5.122	0.100	1087284.6	0.240	0.081	5.738	0.420	0.997	9.357
0.072	0.439	0.106	2.895	0.019	0.350	0.055	5.152	0.100	1093582.3	0.240	0.081	5.786	0.420	1.006	9.482
0.073	0.437	0.106	2.886	0.019	0.349	0.055	5.178	0.100	1099279.1	0.240	0.080	5.834	0.420	1.014	9.608
0.074	0.435	0.105	2.879	0.019	0.348	0.055	5.207	0.100	1105386.5	0.240	0.080	5.881	0.420	1.023	9.733
0.075	0.433	0.105	2.872	0.019	0.347	0.055	5.236	0.100	1111403.4	0.240	0.080	5.928	0.420	1.032	9.857

El análisis de los datos obtenidos en la Tabla 12 y en la Tabla 13 se presenta en la Gráfica 21:



**Gráfica 21.** Comportamiento de las profundidades subsecuentes con caudal constante.

En la Gráfica 21 se observa que a mayor caudal, aumenta la relación entre las profundidades subsecuentes del resalto, y ésta variación aumenta a medida que aumenta el Número de Froude. También se observa que para el caudal más alto, la pendiente que representa la variación de la relación de llenado es más alta que la pendiente obtenida con el caudal más bajo.

#### 5.4.2 Straub

Siguiendo la metodología planteada por Straub, se calculan las ecuaciones para calcular la profundidad crítica, el Número de Froude, y según el valor de este número se establece la ecuación para calcular la profundidad subsecuente.

A continuación se presenta la iteración para la primera fila calculada:

d (m)	y/d (-)	y <sub>n</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	P (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)
0.242	0.1	0.024	1.287	0.002	0.156	0.015	1.045	0.0025	56377.905	0.145	0.016	2.599

Entonces el primer paso es calcular la profundidad crítica mediante la Ecuación 20:

$$y_c = \left( \frac{1.01}{d_0^{0.26}} \right) \left( \frac{Q^2}{g} \right)^{0.25} = \left( \frac{1.01}{0.242^{0.26}} \right) \left( \frac{0.0025^2}{9.81} \right)^{0.25} = 0.040 \text{ m}$$

**Ecuación 76.** Cálculo de la profundidad crítica.

Luego se comprueba que la Ecuación 20 es válida mediante la siguiente condición:

$$0.02 \leq \frac{y_c}{d} = \frac{0.04}{0.242} = 0.164 \leq 0.85$$

Posteriormente, se calcula el Número de Froude aguas arriba del resalto mediante la Ecuación 21:

$$F_1 = \left( \frac{Y_c}{Y_1} \right)^{1.93} = \left( \frac{0.04}{0.0242} \right)^{1.93} = 2.61$$

**Ecuación 77.** Aproximación Número de Froude (**French, 2007**).

Teniendo el Número de Froude, se procede a calcular la profundidad subsecuente de acuerdo con el valor de este número. Como el Número de Froude es mayor a 1.7 se tiene que:

$$y_2 = \frac{y_c^{1.8}}{y_1^{0.73}} = \frac{0.04^{1.8}}{0.024^{0.73}} = 0.046$$

Realizando el mismo proceso para todas las relaciones de llenado en la tubería se tiene que:

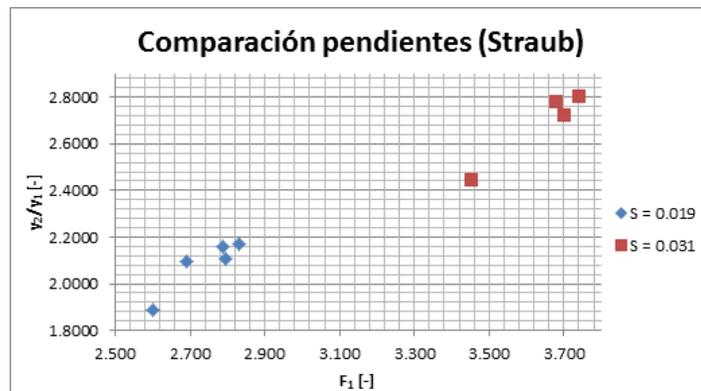
**Tabla 14.** Cálculo de la profundidad subsecuente para una pendiente de 0.019 mediante la metodología planteada por Straub.

d (m)	y/d (-)	y <sub>n</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	P (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	y <sub>c</sub> (m)	y <sub>c</sub> /d (-)	y <sub>2</sub> (m)	y <sub>2</sub> /y <sub>1</sub> (-)
0.242	0.1	0.024	1.287	0.002	0.156	0.015	1.045	0.003	56377.9	0.145	0.016	2.599	0.040	0.164	0.046	1.885
0.242	0.2	0.048	1.855	0.007	0.224	0.029	1.611	0.011	164939.8	0.194	0.034	2.796	0.085	0.340	0.102	2.107
0.242	0.3	0.073	2.319	0.012	0.281	0.041	2.028	0.024	294376.9	0.222	0.052	2.831	0.124	0.511	0.158	2.170
0.242	0.4	0.097	2.739	0.017	0.331	0.052	2.350	0.040	427500.5	0.237	0.072	2.787	0.162	0.671	0.209	2.157
0.242	0.5	0.121	3.142	0.023	0.380	0.061	2.598	0.060	551433.8	0.242	0.095	2.690	0.198	0.819	0.254	2.095
0.242	0.6	0.145	3.544	0.029	0.429	0.067	2.780	0.080	655306.6	0.237	0.122	2.546	0.230	0.950	No cumple	
0.242	0.7	0.169	3.965	0.034	0.480	0.072	2.898	0.100	728969.0	0.222	0.155	2.350	0.257	1.061	No cumple	
0.242	0.8	0.194	4.429	0.039	0.536	0.074	2.948	0.113	761416.8	0.194	0.204	2.085	0.277	1.147	No cumple	
0.242	0.9	0.218	4.996	0.044	0.605	0.072	2.909	0.127	736268.6	0.145	0.300	1.695	0.290	1.198	No cumple	

**Tabla 15.** Cálculo de la profundidad subsecuente para una pendiente de 0.031 mediante la metodología planteada por Straub.

d (m)	y/d (-)	y <sub>n</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	P (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	y <sub>c</sub> (m)	y <sub>c</sub> /d (-)	y <sub>2</sub> (m)	y <sub>2</sub> /y <sub>1</sub> (-)
0.242	0.1	0.024	1.287	0.002	0.156	0.015	1.389	0.003	74903.831	0.145	0.016	3.453	0.046	0.190	0.046	1.885
0.242	0.2	0.048	1.855	0.007	0.224	0.029	2.133	0.014	218395.095	0.194	0.034	3.702	0.095	0.392	0.102	2.107
0.242	0.3	0.073	2.319	0.012	0.281	0.041	2.681	0.031	389159.110	0.222	0.052	3.742	0.142	0.588	0.158	2.170
0.242	0.4	0.097	2.739	0.017	0.331	0.052	3.104	0.053	564604.302	0.237	0.072	3.681	0.187	0.773	0.209	2.157
0.242	0.5	0.121	3.142	0.023	0.380	0.061	3.429	0.079	727829.080	0.242	0.095	3.551	0.228	0.942	0.254	2.095
0.242	0.6	0.145	3.544	0.029	0.429	0.067	3.667	0.106	864573.169	0.237	0.122	3.359	0.264	1.092	No cumple	
0.242	0.7	0.169	3.965	0.034	0.480	0.072	3.823	0.131	961518.952	0.222	0.155	3.099	0.295	1.220	No cumple	
0.242	0.8	0.194	4.429	0.039	0.536	0.074	3.888	0.153	1004216.549	0.194	0.204	2.750	0.319	1.319	No cumple	
0.242	0.9	0.218	4.996	0.044	0.605	0.072	3.837	0.167	971124.647	0.145	0.300	2.236	0.334	1.378	No cumple	

El análisis de los resultados obtenidos en las Tabla 14 y Tabla 15 se presenta en la Gráfica 22:



**Gráfica 22.** Comparación de los valores obtenidos en las dos pendientes.

La Gráfica 22 muestra que la pendiente más alta presenta valores más altos del Número de Froude, y para valores más altos de este número, la relación entre las profundidades del resalto es mayor. También se observa que para cada pendiente, en los valores más altos del Número de Froude, existe un dato atípico en el valor de la relación de las profundidades subsecuentes.

### 5.4.3 French

De acuerdo con lo establecido por French, se calcula la posición del centroide del flujo y se calcula el Momentum respectivo aguas arriba, para posteriormente despejar por métodos iterativos, la profundidad subsecuente del resalto hidráulico aguas abajo.

A continuación se presentarán los cálculos realizados para una pendiente de 0.019, y una relación de llenado de 0.1, y con las siguientes características hidráulicas:

d (m)	y/d (-)	$y_n$ (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	P (m)	Radio (m)	v (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Número de Froude (-)
0.242	0.1	0.024	1.287	0.002	0.156	0.015	1.045	0.0025	56377.905	0.145	0.016	2.599

1. Calcular el radio de la tubería (r).

$$r = \frac{d}{2} = \frac{0.242}{2} = 0.121 \text{ m}$$

2. Calcular la distancia del centro de la tubería a la superficie de agua (z)

$$z = y - \frac{d}{2} = 0.024 - 0.121 = -0.097 \text{ m}$$

3. Calcular la distancia desde el centro de la tubería al centroide de masa del agua ( $\hat{z}$ ).

$$\hat{z} = -\frac{2(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{3A} = -\frac{2(0.121^2 - (-0.097)^2)^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot 0.002} = -0.107 \text{ m}$$

4. Calcular la distancia desde la superficie de agua hasta el centroide de la masa de agua ( $\bar{z}$ ).

$$\bar{z} = y - (r + \hat{z}) = 0.024 - (0.121 + (-0.107)) = 0.01 \text{ m}$$

5. Calcular el Momento para el flujo aguas arriba del resalto:

$$M = \left( \frac{0.0025^2}{9.81 \cdot 0.002} \right) + 0.01 \cdot 0.002 = 2.9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

6. Calcular la altura del flujo aguas abajo mediante un método iterativo, el cual se logra mediante el método de la bisección (Ver Anexo 3), en este caso, la altura de flujo subsecuente que satisface la condición en la cual el Momentum aguas arriba sea igual al Momentum aguas abajo es  $y_2 = 0.06 \text{ m}$ .

Finalmente, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 16 y la Tabla 17:

**Tabla 16.** Resultados obtenidos mediante la metodología de French para una  $S = 0.019$ .

d (m)	y/d (-)	$y_n$ (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	P (m)	Radio (m)	v (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	$z_1$ (m)	$\hat{z}_1$ (m)	$\bar{z}_1$ (m)	$M_1$ (m <sup>3</sup> )	$y_2$ (m)	$\bar{z}_2$ (m)	Área <sub>2</sub> (m <sup>2</sup> )	Prueba M (m <sup>3</sup> )
0.242	0.1	0.024	1.287	0.002	0.156	0.015	1.045	0.003	56362.599	0.145	0.016	2.598	-0.097	-0.107	0.010	0.0003	0.054	0.022	0.008	0.0003
0.242	0.2	0.048	1.855	0.007	0.224	0.029	1.610	0.011	164895.568	0.194	0.034	2.795	-0.073	-0.092	0.020	0.0019	0.117	0.050	0.022	0.0016
0.242	0.3	0.073	2.319	0.012	0.281	0.041	2.028	0.024	294298.411	0.222	0.052	2.830	-0.048	-0.078	0.030	0.0052	0.181	0.081	0.037	0.0045
0.242	0.4	0.097	2.739	0.017	0.331	0.052	2.350	0.040	427386.929	0.237	0.072	2.787	-0.024	-0.065	0.040	0.0104	0.241	0.120	0.046	0.0091
0.242	0.5	0.121	3.142	0.023	0.380	0.061	2.597	0.060	551287.595	0.242	0.095	2.690	0.000	-0.051	0.051	0.0170	0.187	0.084	0.038	0.0128
0.242	0.6	0.145	3.544	0.029	0.429	0.067	2.779	0.080	655133.174	0.237	0.122	2.545	0.024	-0.039	0.063	0.0245	0.199	0.091	0.040	0.0198
0.242	0.7	0.169	3.965	0.034	0.480	0.072	2.897	0.100	728776.229	0.222	0.155	2.349	0.048	-0.026	0.075	0.0320	0.211	0.098	0.043	0.0280
0.242	0.8	0.194	4.429	0.039	0.536	0.074	2.947	0.116	761215.568	0.194	0.204	2.084	0.073	-0.015	0.088	0.0384	0.223	0.106	0.044	0.0358
0.242	0.9	0.218	4.996	0.044	0.605	0.072	2.909	0.127	736073.869	0.145	0.300	1.695	0.097	-0.006	0.103	0.0421	0.235	0.115	0.046	0.0412

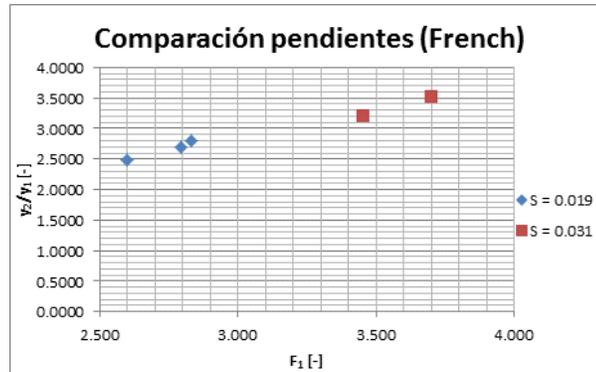
En la Tabla 16 se observa que los valores resaltados indican los puntos donde la altura subsecuente del resalto cumple con el Momentum aguas arriba, mientras que las filas que no se encuentran resaltadas, encuentran alturas del flujo subsecuentes que no satisfacen el Momentum, es decir, que con las alturas aguas arriba ( $y_1$ ) no se alcanza a formar un resalto hidráulico.

También se observan los resultados obtenidos para una pendiente  $S = 0.031$ .

**Tabla 17.** Resultados obtenidos mediante la metodología de French para una  $S = 0.031$ .

d (m)	y/d (-)	$y_n$ (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	P (m)	Radio (m)	v (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	$z_1$ (m)	$\hat{z}_1$ (m)	$\bar{z}_1$ (m)	$M_1$ (m <sup>3</sup> )	$y_2$ (m)	$\bar{z}_2$ (m)	Área <sub>2</sub> (m <sup>2</sup> )	Prueba M (m <sup>3</sup> )
0.242	0.1	0.024	1.287	0.002	0.156	0.015	1.389	0.003	74903.83	0.145	0.016	3.453	-0.097	-0.107	0.010	0.0005	0.077	0.032	0.013	0.0005
0.242	0.2	0.048	1.855	0.007	0.224	0.029	2.133	0.014	218395.10	0.194	0.034	3.702	-0.073	-0.092	0.020	0.0032	0.170	0.075	0.034	0.0032
0.242	0.3	0.073	2.319	0.012	0.281	0.041	2.681	0.031	389159.11	0.222	0.052	3.742	-0.048	-0.078	0.030	0.0089	0.162	0.071	0.033	0.0053
0.242	0.4	0.097	2.739	0.017	0.331	0.052	3.104	0.053	564604.30	0.237	0.072	3.681	-0.024	-0.065	0.040	0.0176	0.174	0.077	0.035	0.0109
0.242	0.5	0.121	3.142	0.023	0.380	0.061	3.429	0.079	727829.08	0.242	0.095	3.551	0.000	-0.051	0.051	0.0287	0.187	0.084	0.038	0.0199
0.242	0.6	0.145	3.544	0.029	0.429	0.067	3.667	0.106	864573.17	0.237	0.122	3.359	0.024	-0.039	0.063	0.0413	0.199	0.091	0.04	0.0318
0.242	0.7	0.169	3.965	0.034	0.480	0.072	3.823	0.131	961518.95	0.222	0.155	3.099	0.048	-0.026	0.075	0.0538	0.211	0.098	0.043	0.0456
0.242	0.8	0.194	4.429	0.039	0.536	0.074	3.888	0.153	1004216.55	0.194	0.204	2.750	0.073	-0.015	0.088	0.0642	0.223	0.106	0.044	0.0588
0.242	0.9	0.218	4.996	0.044	0.605	0.072	3.837	0.167	971124.65	0.145	0.300	2.236	0.097	-0.006	0.103	0.0699	0.235	0.115	0.046	0.0678

En la Tabla 17 se observa que tan solo dos alturas aguas arriba satisfacen la condición de generar un resalto hidráulico para una pendiente del 3.1%. Las otras alturas no satisfacen la condición en la cual el Momentum aguas arriba del resalto sea igual al Momentum aguas abajo.



**Gráfica 23.** Comportamiento de las profundidades subsecuentes.

En la Gráfica 23 se tiene que para pendientes más altas, la relación entre las profundidades subsecuentes del resalto es más alta y con Números de Froude mayores.

#### 5.4.4 Hager

Hager plantea tres ecuaciones para el cálculo de la profundidad subsecuente al resalto hidráulico. La primera ecuación planteada, se basa en igualar los Momentos aguas arriba y aguas abajo del resalto, y la forma de resolverla es por un método iterativo:

$$1 + 2F_1^2 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{2.5} + 2F_1^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{-1.5}$$

**Ecuación 78.** Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico por un método iterativo de acuerdo con la metodología planteada por Hager.

El método iterativo que se usó, fue el método de la bisección, el cuál se encuentra en el Anexo 4, y los resultados obtenidos se presentan en las Tabla 18 y

Tabla 19:

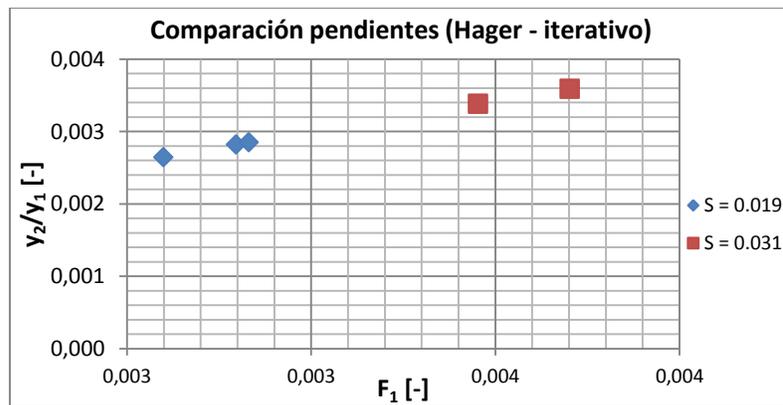
**Tabla 18.** Resultados obtenidos para una pendiente de 0.019 con la metodología planteada por Hager.

d (m)	y/d (-)	y <sub>1</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	A	y <sub>2</sub> (m)
0.242	0.1	0.0242	1.287	0.00239	0.156	0.015	1.045	0.003	56377.905	0.145	0.016	2.599	14.511	0.064
0.242	0.2	0.0484	1.855	0.00655	0.224	0.029	1.611	0.011	164939.800	0.194	0.034	2.796	16.638	0.136
0.242	0.3	0.0726	2.319	0.01161	0.281	0.041	2.028	0.024	294376.898	0.222	0.052	2.831	17.026	0.207
0.242	0.4	0.0968	2.739	0.01718	0.331	0.052	2.350	0.040	427500.511	0.237	0.072	2.787	16.540	Presurizado
0.242	0.5	0.1210	3.142	0.02300	0.380	0.061	2.598	0.060	551433.772	0.242	0.095	2.690	15.476	Presurizado
0.242	0.6	0.1452	3.544	0.02882	0.429	0.067	2.780	0.080	655306.625	0.237	0.122	2.546	13.962	Presurizado
0.242	0.7	0.1694	3.965	0.03439	0.480	0.072	2.898	0.100	728969.002	0.222	0.155	2.350	12.043	Presurizado
0.242	0.8	0.1936	4.429	0.03945	0.536	0.074	2.948	0.116	761416.848	0.194	0.204	2.085	9.695	Presurizado
0.242	0.9	0.2178	4.996	0.04360	0.605	0.072	2.909	0.127	736268.556	0.145	0.300	1.695	6.747	Presurizado

**Tabla 19.** Resultados obtenidos para una pendiente de 0.031 con la metodología planteada por Hager.

d (m)	y/d (-)	y <sub>1</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	A	y <sub>2</sub> (m)
0.242	0.1	0.02420	1.287	0.00239	0.156	0.015	1.389	0.003	74903.831	0.145	0.016	3.453	24.850	0.082
0.242	0.2	0.04840	1.855	0.00655	0.224	0.029	2.133	0.014	218395.095	0.194	0.034	3.702	28.417	0.174
0.242	0.3	0.07260	2.319	0.01161	0.281	0.041	2.681	0.031	389159.110	0.222	0.052	3.742	29.007	Presurizado
0.242	0.4	0.09680	2.739	0.01718	0.331	0.052	3.104	0.053	564604.302	0.237	0.072	3.681	28.106	Presurizado
0.242	0.5	0.12100	3.142	0.02300	0.380	0.061	3.429	0.079	727829.080	0.242	0.095	3.551	26.219	Presurizado
0.242	0.6	0.14520	3.544	0.02882	0.429	0.067	3.667	0.106	864573.169	0.237	0.122	3.359	23.562	Presurizado
0.242	0.7	0.16940	3.965	0.03439	0.480	0.072	3.823	0.131	961518.952	0.222	0.155	3.099	20.212	Presurizado
0.242	0.8	0.19360	4.429	0.03945	0.536	0.074	3.888	0.153	1004216.549	0.194	0.204	2.750	16.124	Presurizado
0.242	0.9	0.21780	4.996	0.04360	0.605	0.072	3.837	0.167	971124.647	0.145	0.300	2.236	10.997	Presurizado

De acuerdo con los resultados obtenidos, se observa que con la pendiente más alta, los valores de la profundidad subsecuente al resalto son mayores. Por lo mismo, en la pendiente de 3.1%, la tubería se presuriza más rápido. Adicionalmente, para ver el comportamiento de la variación del Número de Froude con respecto a la relación de llenado, se realiza la Gráfica 24.



**Gráfica 24.** Comparación de la variación de las pendientes con el método iterativo de Hager

La Gráfica 24 muestra que para Números de Froude mayores, se presenta mayor relación entre las profundidades de flujo, al igual que en todas las comparaciones anteriores.

La segunda ecuación planteada por Hager, resulta en una aproximación que corresponde a un error de  $\pm 2\%$ , y solo aplica para valores del Número de Froude mayores a 2:

$$\frac{y_{2a}}{y_1} = 1.16F_1^{0.856}$$

**Ecuación 79.** Aproximación teórica para cálculos de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico.

<sup>6</sup>  $y_{2a}$  se refiere a la altura subsecuente aguas abajo del resalto, y se le adiciona el subíndice “a” para diferenciar el  $y_2$  de las otras ecuaciones planteadas por Hager.

Y luego de realizar los experimentos, Hager observó que podía corregir la Ecuación 79 a una mejor aproximación:

$$\frac{y_{2b}}{y_1} = 1.00F_1^{0.907}$$

**Ecuación 80.** Aproximación empírica para el cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico.

Los valores obtenidos aplicando la Ecuación 79 y Ecuación 80 se encuentran en las siguientes tablas:

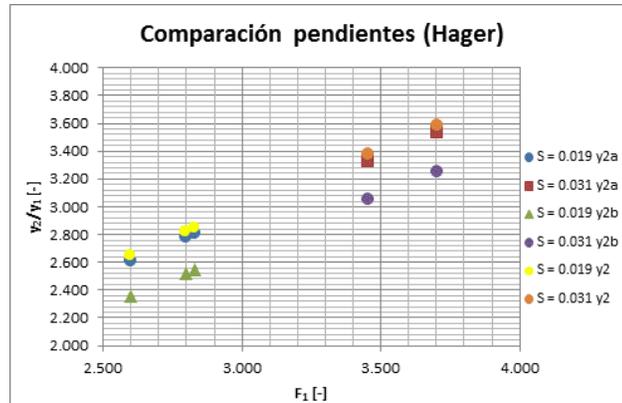
**Tabla 20.** Resultados de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico para la aproximación teórica con una pendiente de 0.019.

d (m)	y/d (-)	y <sub>1</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	P (m)	Radio (m)	v (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	y <sub>2</sub> (m)	y <sub>2a</sub> (m)	y <sub>2b</sub> (m)
0.242	0.1	0.0242	1.287	0.00239	0.156	0.015	1.045	0.003	56377.905	0.145	0.016	2.599	0.064	0.063	0.057
0.242	0.2	0.0484	1.855	0.00655	0.224	0.029	1.611	0.011	164939.800	0.194	0.034	2.796	0.136	0.135	0.122
0.242	0.3	0.0726	2.319	0.01161	0.281	0.041	2.028	0.024	294376.898	0.222	0.052	2.831	0.207	0.204	0.185
0.242	0.4	0.0968	2.739	0.01718	0.331	0.052	2.350	0.040	427500.511	0.237	0.072	2.787	Presurizado	0.268	0.244
0.242	0.5	0.1210	3.142	0.02300	0.380	0.061	2.598	0.060	551433.772	0.242	0.095	2.690	Presurizado	0.326	0.295
0.242	0.6	0.1452	3.544	0.02882	0.429	0.067	2.780	0.080	655306.625	0.237	0.122	2.546	Presurizado	0.373	0.337
0.242	0.7	0.1694	3.965	0.03439	0.480	0.072	2.898	0.100	728969.002	0.222	0.155	2.350	Presurizado	0.406	0.365
0.242	0.8	0.1936	4.429	0.03945	0.536	0.074	2.948	0.116	761416.848	0.194	0.204	2.085	Presurizado	0.419	0.375
0.242	0.9	0.2178	4.996	0.04360	0.605	0.072	2.909	0.127	736268.556	0.145	0.300	1.695	Presurizado	0.396	0.350

**Tabla 21.** Resultados de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico para la aproximación teórica con una pendiente de 0.031.

d (m)	y/d (-)	y <sub>1</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	P (m)	Radio (m)	v (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	y <sub>2</sub> (m)	y <sub>2a</sub> (m)	y <sub>2b</sub> (m)
0.242	0.1	0.024	1.287	0.002	0.156	0.015	1.389	0.003	74903.831	0.145	0.016	3.453	0.082	0.080	0.074
0.242	0.2	0.048	1.855	0.007	0.224	0.029	2.133	0.014	218395.095	0.194	0.034	3.702	0.174	0.171	0.157
0.242	0.3	0.073	2.319	0.012	0.281	0.041	2.681	0.031	389159.110	0.222	0.052	3.742	Presurizado	0.259	0.238
0.242	0.4	0.097	2.739	0.017	0.331	0.052	3.104	0.053	564604.302	0.237	0.072	3.681	Presurizado	0.340	0.313
0.242	0.5	0.121	3.142	0.023	0.380	0.061	3.429	0.079	727829.080	0.242	0.095	3.551	Presurizado	0.412	0.379
0.242	0.6	0.145	3.544	0.029	0.429	0.067	3.667	0.106	864573.169	0.237	0.122	3.359	Presurizado	0.472	0.432
0.242	0.7	0.169	3.965	0.034	0.480	0.072	3.823	0.131	961518.952	0.222	0.155	3.099	Presurizado	0.514	0.469
0.242	0.8	0.194	4.429	0.039	0.536	0.074	3.888	0.153	1004216.549	0.194	0.204	2.750	Presurizado	0.531	0.481
0.242	0.9	0.218	4.996	0.044	0.605	0.072	3.837	0.167	971124.647	0.145	0.300	2.236	Presurizado	0.501	0.449

<sup>7</sup> y<sub>2b</sub> se refiere a la altura subsecuente aguas abajo del resalto, y se le adiciona el subíndice “b” para diferenciar el y<sub>2</sub> de las otras ecuaciones planteadas por Hager.

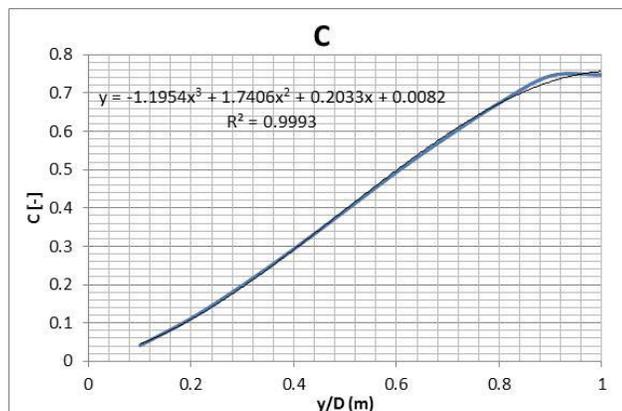


**Gráfica 25.** Comparación de las pendientes para los tres métodos propuestos por Hager.

En la Gráfica 25 se observan los resultados para los tres métodos propuestos por Hager. Se puede observar que los dos métodos teóricos tienen la misma tendencia, y solo difieren por un error de 1.43 %, mientras que al comparar el método teórico iterativo con el método empírico, el error sube a 10.15 %, y al comparar el método aproximado y el método empírico el error es de 8.85 %. Con estos resultados se podría inferir que se deben revisar los datos obtenidos en el método empírico, para acercarlos más a los resultados de los métodos teóricos.

### 5.4.5 FHWA

El Departamento de Transporte de Estados Unidos establece una metodología muy parecida a la planteada por Silvester, es decir, plantean una ecuación basada en el coeficiente  $k'$ , y también usan dos ecuaciones diferentes para calcular la profundidad subsecuente del resalto hidráulico. Sin embargo, a diferencia de Silvester, no usan el área como una variable a calcular en las ecuaciones, sino que se basan en un nuevo coeficiente “C”, el cual es un número fijo para relaciones de llenado definidas:



**Gráfica 26.** Coeficiente para determinar la profundidad subsecuente en el resalto hidráulico en tuberías.

Entonces, las ecuaciones establecidas son:

Para profundidades subsecuentes del resalto hidráulico menores al diámetro:

$$\frac{k_2 y_2 C_2}{y_1 C_1} + \frac{F_1^2 C_1}{C_2} = F_1^2 + k_1'$$

**Ecuación 81.** Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico menor al diámetro.

Para profundidades subsecuentes del resalto hidráulico mayores al diámetro:

$$\frac{y_2 C_2}{y_1 C_1} - 0.5 \left( \frac{C_2 D}{C_1 y_1} \right) + F_1^2 \frac{C_1}{C_2} = F_1^2 + k_1$$

**Ecuación 82.** Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico mayor al diámetro.

Por lo cual, mediante el método de la bisección (Anexo 5), se obtienen los siguientes resultados:

**Tabla 22.** Resultados para el cálculo de la profundidad subsecuente del resalto mediante la metodología planteada por la FHWA, para una pendiente de 0.019.

d (m)	y/d (-)	y <sub>1</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	y <sub>2</sub> (m)	y <sub>2</sub> /y <sub>1</sub> (-)
0.242	0.1	0.024	1.287	0.002	0.156	0.015	1.045	0.003	56377.905	0.145	0.016	2.599	0.074	3.065
0.242	0.2	0.048	1.855	0.007	0.224	0.029	1.611	0.011	164939.800	0.194	0.034	2.796	0.152	3.136
0.242	0.3	0.073	2.319	0.012	0.281	0.041	2.028	0.024	294376.898	0.222	0.052	2.831	0.240	3.300
0.242	0.4	0.097	2.739	0.017	0.331	0.052	2.350	0.040	427500.511	0.237	0.072	2.787	0.328	3.388
0.242	0.5	0.121	3.142	0.023	0.380	0.061	2.598	0.060	551433.772	0.242	0.095	2.690	0.324	2.681
0.242	0.6	0.145	3.544	0.029	0.429	0.067	2.780	0.080	655306.625	0.237	0.122	2.546	0.311	2.142
0.242	0.7	0.169	3.965	0.034	0.480	0.072	2.898	0.100	728969.002	0.222	0.155	2.350	0.293	1.732
0.242	0.8	0.194	4.429	0.039	0.536	0.074	2.948	0.116	761416.848	0.194	0.204	2.085	0.271	1.401
0.242	0.9	0.218	4.996	0.044	0.605	0.072	2.909	0.127	736268.556	0.145	0.300	1.695	0.243	1.116

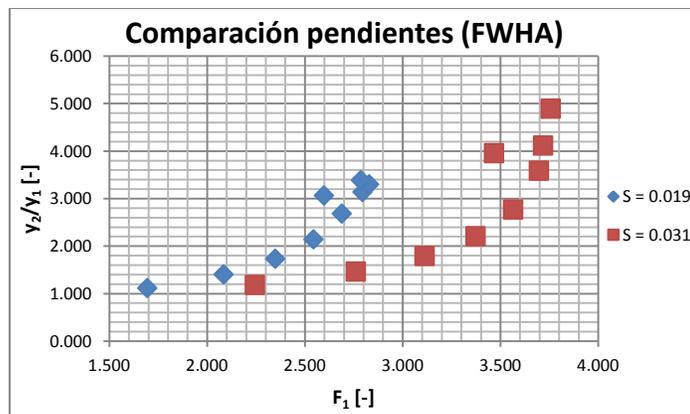
Con el método planteado por la FHWA se observa que al igual que en la metodología de Silvester, para una pendiente de 1.9%, la tubería se presuriza con relaciones de llenado mayores al 30%.

**Tabla 23.** Resultados para el cálculo de la profundidad subsecuente del resalto mediante la metodología planteada por la FHWA, para una pendiente de 0.031.

d (m)	y/d (-)	y <sub>1</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	y <sub>2</sub> (m)	y <sub>2</sub> /y <sub>1</sub> (-)
0.242	0.1	0.024	1.287	0.002	0.156	0.015	1.395	0.003	75243.481	0.145	0.016	3.469	0.096	3.952
0.242	0.2	0.048	1.855	0.007	0.224	0.029	2.142	0.014	219373.764	0.194	0.034	3.719	0.199	4.114

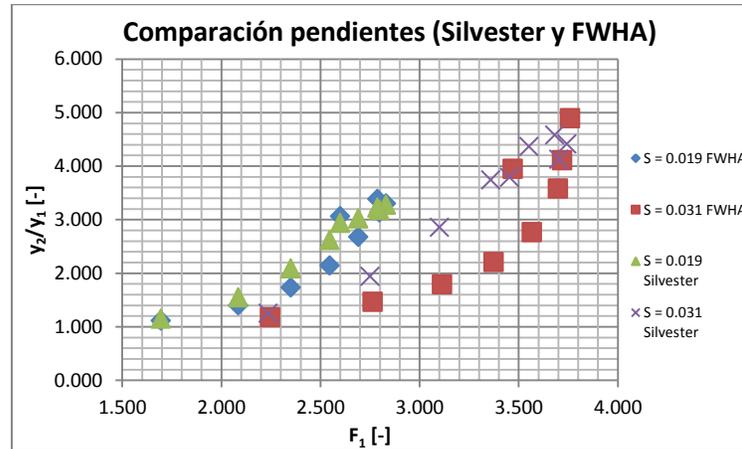
d (m)	y/d (-)	y <sub>1</sub> (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	y <sub>2</sub> (m)	y <sub>2</sub> /y <sub>1</sub> (-)
0.242	0.3	0.073	2.319	0.012	0.281	0.041	2.693	0.031	390893.219	0.222	0.052	3.759	0.355	4.895
0.242	0.4	0.097	2.739	0.017	0.331	0.052	3.118	0.054	567111.670	0.237	0.072	3.698	0.347	3.585
0.242	0.5	0.121	3.142	0.023	0.380	0.061	3.444	0.079	731054.123	0.242	0.095	3.567	0.335	2.770
0.242	0.6	0.145	3.544	0.029	0.429	0.067	3.683	0.106	868398.496	0.237	0.122	3.374	0.321	2.210
0.242	0.7	0.169	3.965	0.034	0.480	0.072	3.839	0.132	965769.414	0.222	0.155	3.113	0.304	1.794
0.242	0.8	0.194	4.429	0.039	0.536	0.074	3.905	0.154	1008654.150	0.194	0.204	2.762	0.284	1.465
0.242	0.9	0.218	4.996	0.044	0.605	0.072	3.854	0.168	975417.216	0.145	0.300	2.246	0.257	1.182

En cambio, para pendientes del 3.1%, la tubería se presuriza con relaciones de llenado mayores al 20%.



Gráfica 27. Comparación de las pendientes con el método de la FWHA.

El comportamiento de las profundidades subsecuentes con el método planteado por la FWHA presenta un comportamiento similar al observado en la metodología de Silvester, ya que para pendientes más altas se presentan Números de Froude más altos y valores más altos de las relaciones entre las profundidades de llenado.

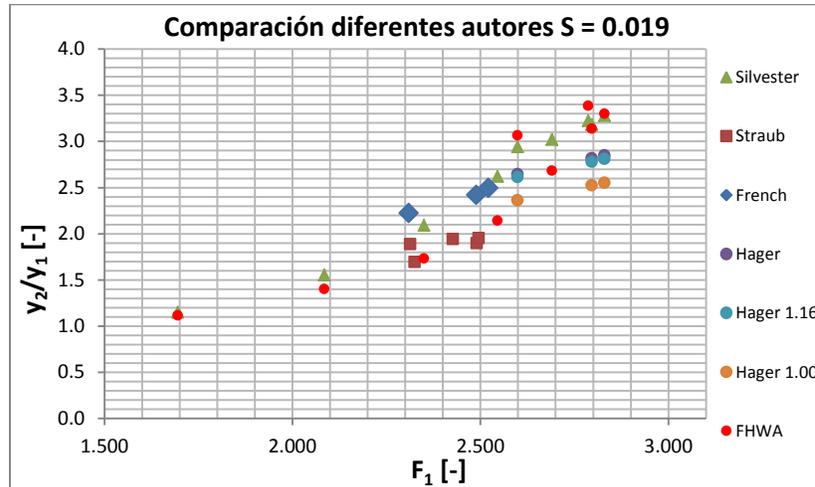


**Gráfica 28.** Comparación entre la metodología de Silvester y la metodología planteada por la FWHA.

En la Gráfica 28 se observa que en general la metodología planteada por la FWHA presenta un comportamiento más uniforme que el observado en la metodología planteada por Silvester. Para la pendiente de 1.9%, los valores obtenidos por las dos metodologías son muy similares y no se presenta ninguna tendencia a tener valores mayores o menores en ninguna de las dos metodologías, mientras que para la pendiente de 3.1%, los valores obtenidos por Silvester para la relación entre las relaciones de llenado son mayores, mientras que la metodología planteada por la FWHA presenta una curva más uniforme y con menores valores, ya que no se está evaluando el área mojada de la tubería para hallar la profundidad subsecuente sino un coeficiente que varía con la profundidad de llenado. Por lo tanto, se considera conveniente que en el montaje realizado se evalúe cuál de los dos parámetros representa mayor influencia en el cálculo de la profundidad de llenado.

### 5.4.5 Conclusiones

Finalmente, se obtiene la siguiente gráfica en la cual se observa el comportamiento de las profundidades subsecuentes según las ecuaciones de los diferentes autores:



Gráfica 29. Comparación entre los diferentes autores para el cálculo de las profundidades subsecuentes.

En la Gráfica 29 se observa que a medida que aumenta el Número de Froude aumenta la relación entre las profundidades subsecuentes para todos los autores. El comportamiento entre las ecuaciones de Silvester y la FHWA es muy similar, mientras que las ecuaciones de Hager y de Straub sobrestiman el aumento de la relación entre las profundidades subsecuentes.

## 5.5 Análisis comparativo con otros autores para el cálculo de la longitud del resalto hidráulico

### 5.5.1 Silvester

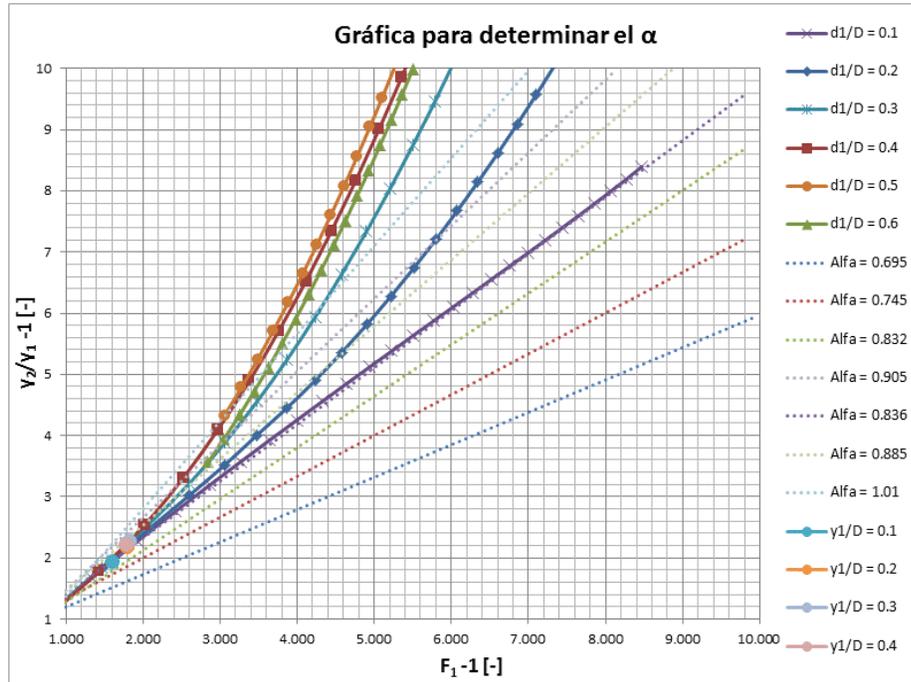
Tal como se explicó en el Numeral 2, Silvester estableció la Ecuación 15 para el cálculo de la Longitud del Resalto Hidráulico:

$$\frac{L}{d_1} = K (F_1 - 1)^\alpha$$

**Ecuación 15.** Longitud de un resalto hidráulico para cualquier tipo de sección (Silvester, 1964).

Ahora bien, Silvester a partir de la Gráfica 3 establece los valores de  $k$  y  $\alpha$ , con los cuales se puede estimar la longitud del resalto hidráulico, dependiendo de los valores del Número de Froude y la relación entre las profundidades subsecuentes en el resalto.

Para entender la gráfica y aplicarla a los valores obtenidos en los análisis de las profundidades subsecuentes realizados anteriormente, se realizó un programa que permitió ilustrar la gráfica planteada por Silvester, y colocar los obtenidos en los anteriores análisis. La gráfica se muestra a continuación:

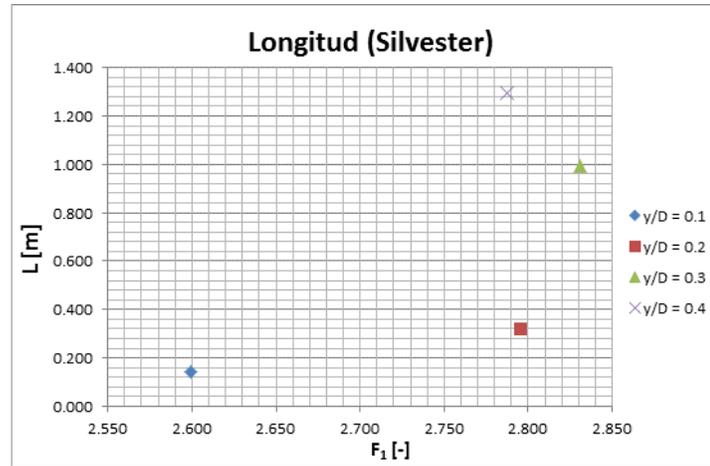


**Gráfica 30.** Datos obtenidos para calcular los coeficientes que permiten calcular la longitud del resalto hidráulico.

Con la Gráfica 30 se estableció el valor de  $\alpha$ , obteniendo así los siguientes valores de longitud:

**Tabla 24.** Cálculo de la longitud mediante la metodología planteada por Silvester.

$F_1-1$ (-)	$(y_2/y_1) - 1$ (-)	$\alpha$ (-)	$K$ (-)	$L$ (m)
1.599	1.942	0.836	4.000	0.143
1.796	2.182	0.836	4.000	0.316
1.831	2.280	0.885	8.000	0.992
1.787	2.224	0.885	8.000	1.295



**Gráfica 31.** Longitud del resalto mediante la metodología planteada por Silvester.

En la Gráfica 31, se observa que para mayores Números de Froude, la longitud del resalto hidráulico es mayor; hasta que se alcanza la profundidad de llenado que genera el resalto hidráulico más fuerte ( $y/D = 0.30$ ). Para las demás profundidades de llenado, empieza a disminuir la longitud.

### 5.5.2 Hager

De acuerdo con la Ecuación 39 y la Ecuación 41, se calcula la longitud de aireación y de recirculación en el resalto hidráulico, a partir de las profundidades subsecuentes calculadas con la metodología iterativa de Hager:

**Tabla 25.** Cálculo longitudes en el resalto hidráulico de acuerdo con la metodología planteada por Hager.

Froude (-)	$y_2$ (m)	$\lambda_r$ (-)	$L_r$ (m)	$\lambda_a$ (-)	$L_a$ (m)
2.599	0.064	3.224	0.206	6.449	0.413
2.796	0.136	3.344	0.456	6.689	0.912
2.831	0.207	3.365	0.696	6.730	1.392

En la Tabla 25 se observa que a mayor Número de Froude, tanto la longitud de aireación, como la longitud de recirculación aumentan. No se puede realizar el análisis para relaciones de llenado mayores al 30%, ya que la tubería en estos casos se encuentra presurizada.

### 5.5.3 FWHA

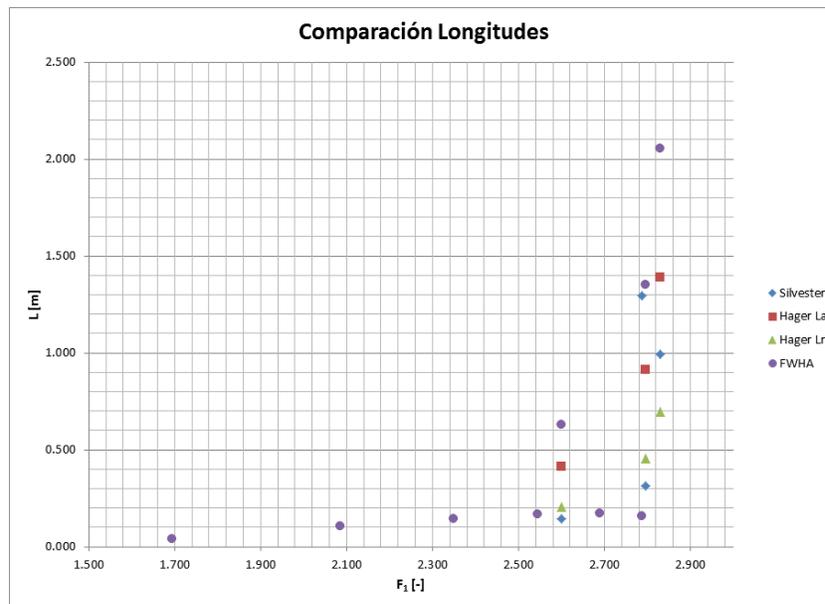
La FWHA dice que para calcular la longitud del resalto hidráulico, se use la Gráfica 10 y la Ecuación 56, con lo cual se obtiene que:

**Tabla 26.** Cálculo de la longitud del resalto con la metodología de FWHA.

Froude (-)	$y_2$ (m)	$y_2/y_1$ (-)	L (m)
2.599	0.074	3.065	0.629
2.796	0.152	3.136	1.353
2.831	0.240	3.300	2.055
2.787	0.328	3.388	0.157
2.690	0.324	2.681	0.172
2.546	0.311	2.142	0.168
2.350	0.293	1.732	0.147
2.085	0.271	1.401	0.105
1.695	0.243	1.116	0.039

En la Tabla 26 se observa que cuando la tubería no está presurizada (sin sombreado), la longitud del resalto aumenta a medida que aumenta el Número de Froude, mientras que cuando la tubería se encuentra presurizada, el comportamiento del valor de la longitud del resalto hidráulico varía sin ninguna tendencia.

A continuación se presenta la gráfica con todos los resultados obtenidos para el cálculo de la longitud en las diferentes metodologías:



**Gráfica 32.** Comparación entre las diferentes metodologías para el cálculo de las longitudes.

En la Gráfica 32 se observa que todas las metodologías presentan un aumento de la longitud a medida que aumenta el Número de Froude; sin embargo presentan puntos en los cuales los valores para un mismo Número de Froude tienen como resultado valores diferentes en la longitud, como sucede en el caso de un Número de Froude igual a 2.599.

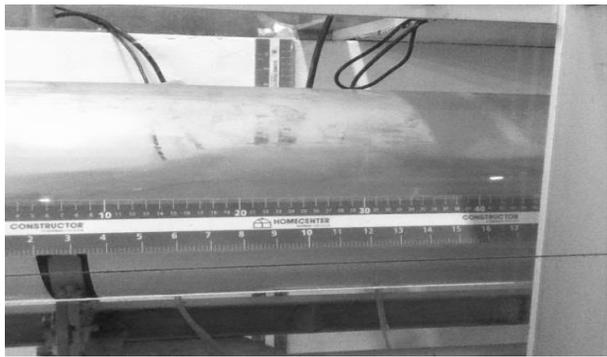
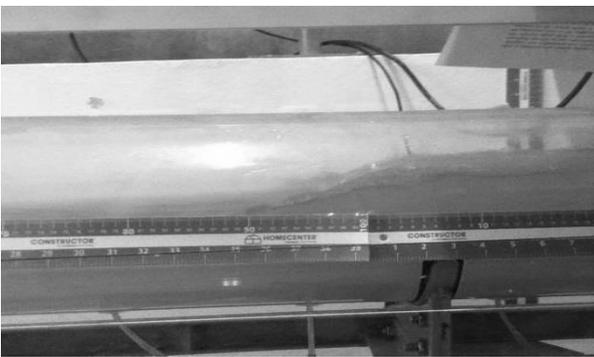
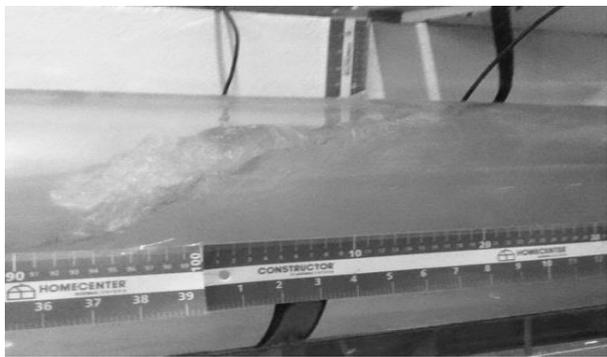
## 6. Resultados y Análisis de Resultados

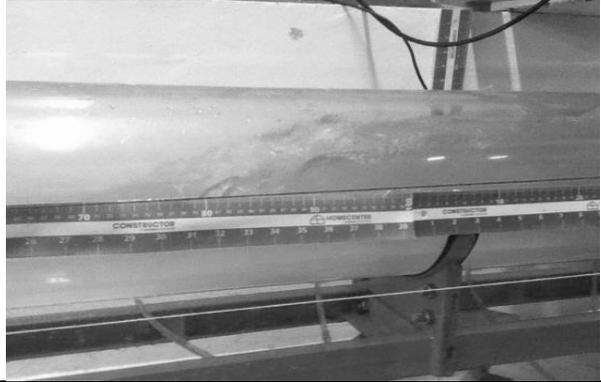
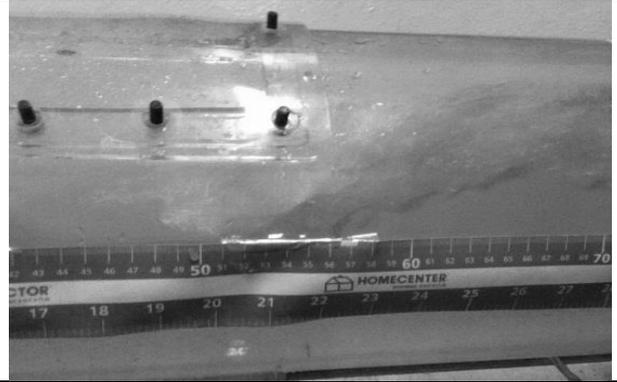
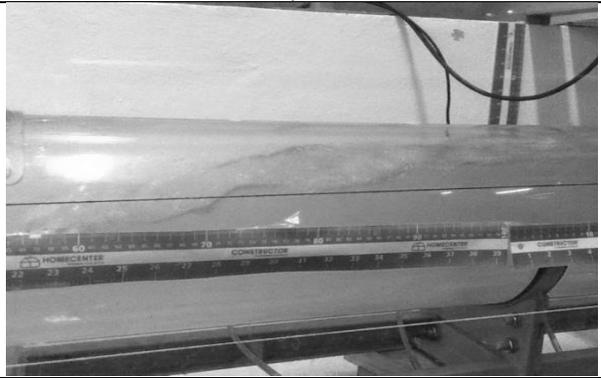
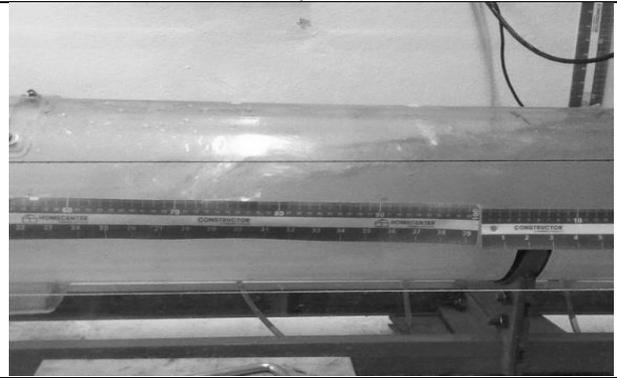
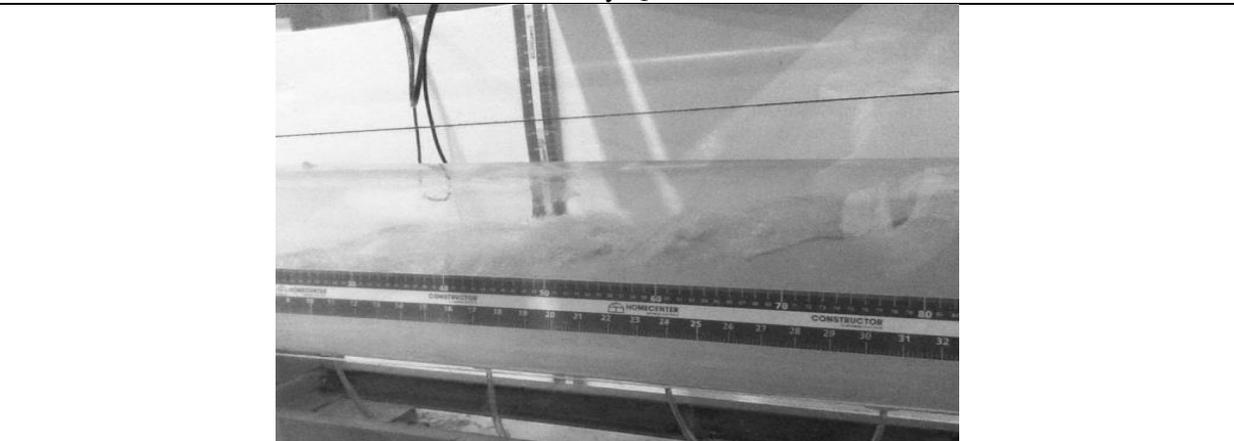
### 6.1. Resultados

#### 6.1.1. Registro Fotográfico

A continuación se presenta un registro fotográfico de algunos escenarios medidos con caudales cercanos a 30 L/s.

**Tabla 27.** Registro fotográfico del resalto hidráulico para caudales cercanos a 30 L/s.

REGISTRO FOTOGRAFICO PARA CAUDALES CERCANOS A 30 L/s	
S = 0.7 % y Q = 34 L/s	S = 0.9 % y Q = 30 L/s
	
S = 1.1 % y Q = 30 L/s	S = 1.3 % y Q = 40 L/s
	

REGISTRO FOTOGRÁFICO PARA CAUDALES CERCANOS A 30 L/s	
S = 1.5 % y Q = 30 L/s	S = 1.7 % y Q = 30 L/s
	
S = 1.9 % y Q = 30 L/s	S = 2.1 % y Q = 40 L/s
	
S = 2.5 % y Q = 30 L/s	
	

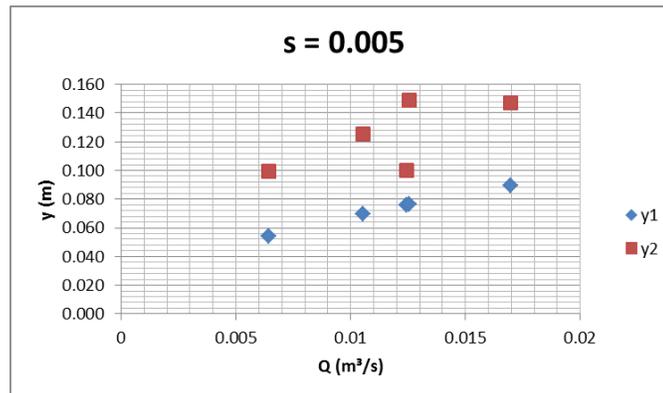
Se puede observar que aunque se esté midiendo el mismo caudal, a medida que aumenta la pendiente, la profundidad subsecuente aguas abajo del resalto hidráulico es más alta; y esto ocurre dado que el flujo aguas arriba del resalto es más supercrítico en las pendientes altas que en las pendientes bajas.

### 6.1.2. Profundidad de flujo

Los resultados presentados en el presente informe se realizaron para diferentes pendientes, cada una, con su respectiva variación de caudales, de acuerdo con el análisis mostrado en la Tabla 4.

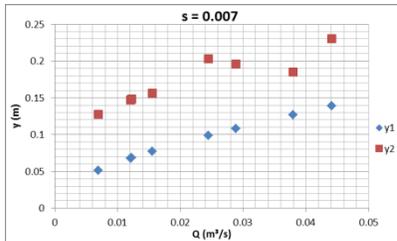
El primer ensayo se realizó para una pendiente del 0.5%, la cual presentó en general resaltos muy débiles, los cuales no permitían inferir fácilmente ni la longitud total de recirculación, ni la longitud de aireación ya que no existía formación de burbujas en el resalto. Por otra parte, se hicieron mediciones de temperatura aguas arriba y aguas abajo del resalto para comprobar si existía algún tipo de variación por la formación del resalto hidráulico; sin embargo, no se obtuvo variación alguna en estas temperaturas.

Los datos obtenidos de medición de profundidades de flujo se muestran a continuación:

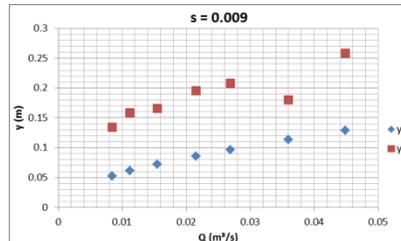


**Gráfica 33.** Profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para  $S = 0.005$ .

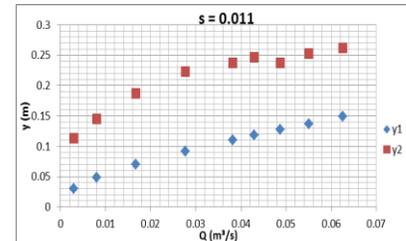
En la Gráfica 33 se observa que salvo la primera medición ( $Q = 0.0124 \text{ m}^3/\text{s}$ ), a mayor caudal, aumenta el nivel medido en los dos sensores. Es importante observar que el comportamiento en general para las dos profundidades (aguas arriba y aguas abajo del resalto), es similar y presentan la misma tendencia. A continuación se presenta el resultado para los otros escenarios medidos:



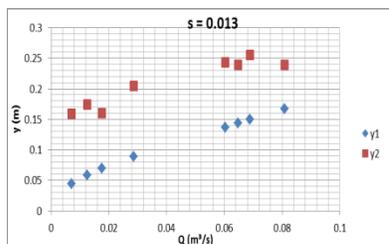
**Gráfica 34.** Profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para  $S = 0.007$ .



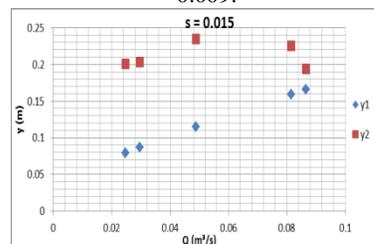
**Gráfica 35.** Profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para  $S = 0.009$ .



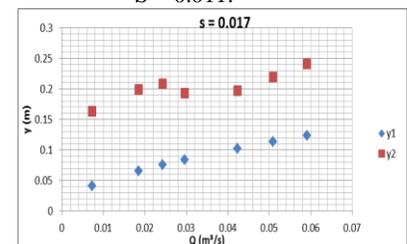
**Gráfica 36.** Profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para  $S = 0.011$ .



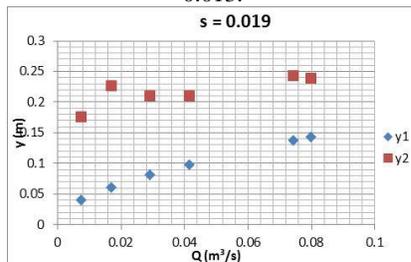
**Gráfica 37.** Profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para  $S = 0.013$ .



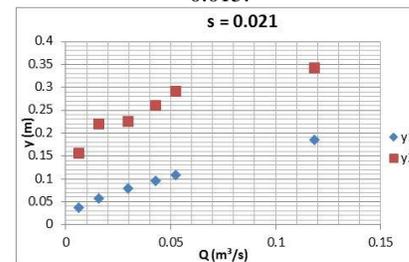
**Gráfica 38.** Profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para  $S = 0.015$ .



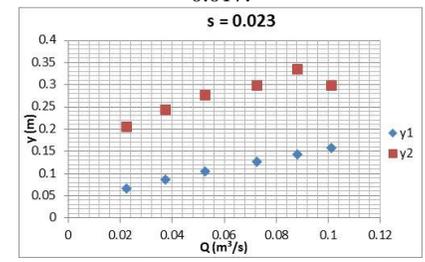
**Gráfica 39.** Profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para  $S = 0.017$ .



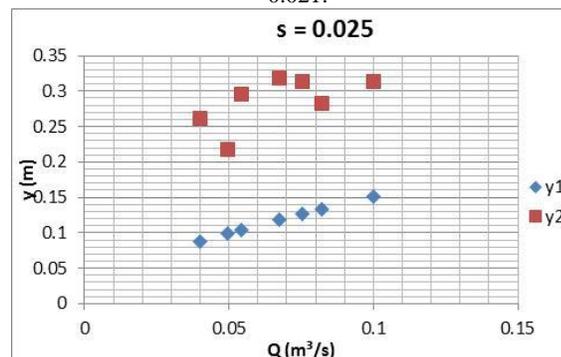
**Gráfica 40.** Profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para  $S = 0.019$ .



**Gráfica 41.** Profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para  $S = 0.021$ .



**Gráfica 42.** Profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para  $S = 0.023$ .



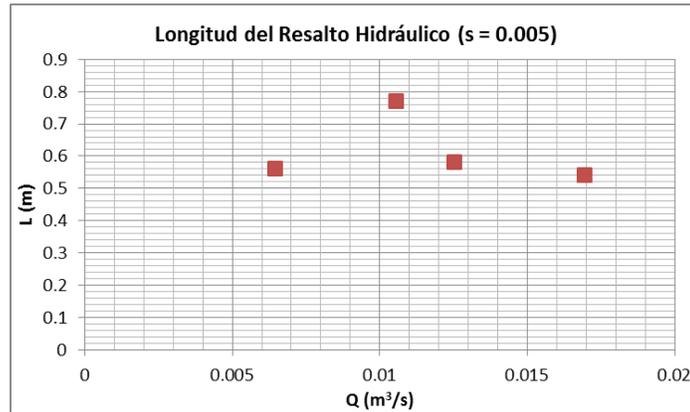
**Gráfica 43.** Profundidades aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para  $S = 0.025$ .

De acuerdo con las gráficas anteriores, se puede observar que para  $S \geq 1.1\%$ , se presenta un comportamiento más estable, con lo cual se puede identificar de manera más clara, los niveles aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico. Vale la pena mencionar que existieron varios

comportamientos inusuales en el flujo, ya que como se estaba manejando una pendiente tan baja, el flujo tiende a ser cuasicrítico, y no es estable. Por ejemplo, para  $S = 0.7\%$  y  $Q = 0.012 \text{ m}^3/\text{s}$ , se presentaron dos resaltos hidráulicos en una longitud menor a 7 m, y los dos presentaban características muy similares, con resaltos hidráulicos muy débiles y poca formación de burbujas.

### 6.1.3. Longitud del resalto hidráulico

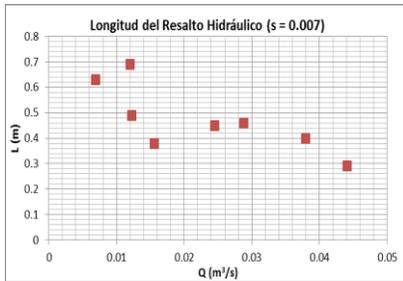
La longitud del resalto hidráulico se midió por medio de fotografías, y está definida como la distancia que comprende el final de la profundidad aguas arriba del resalto y el inicio de la profundidad aguas abajo. A continuación se muestra el comportamiento de la longitud del resalto hidráulico para una pendiente de 0.005:



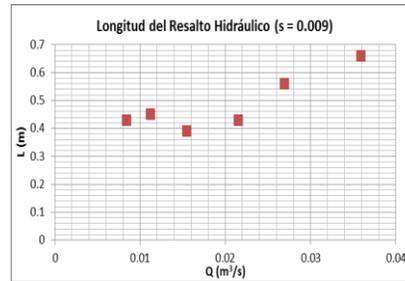
**Gráfica 44.** Longitud del Resalto Hidráulico para  $S = 0.005$ .

En la Gráfica 44 no se observa ninguna tendencia en el aumento de longitud cuando aumenta el caudal o el Número de Froude. Es importante mencionar que la medida de la longitud tiene alta incertidumbre dado que el resalto hidráulico es muy débil e inestable, y la magnitud de la medición anotada puede tener un error aproximado de 10 cm.

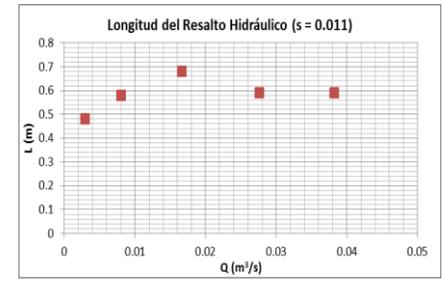
A continuación se muestran todos los escenarios medidos:



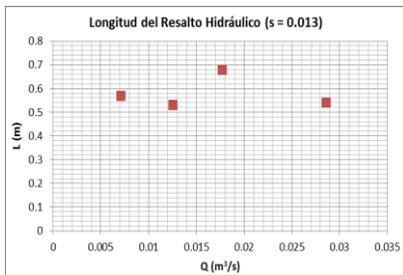
**Gráfica 45.** Longitud del Resalto Hidráulico para S = 0.007.



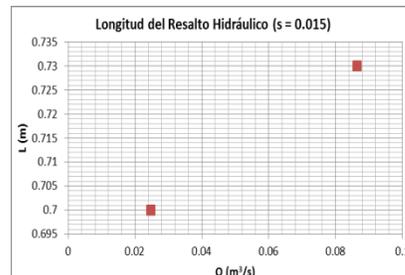
**Gráfica 46.** Longitud del Resalto Hidráulico para S = 0.009.



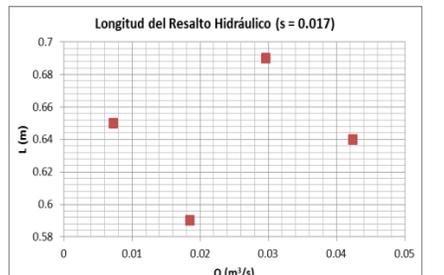
**Gráfica 47.** Longitud del Resalto Hidráulico para S = 0.011.



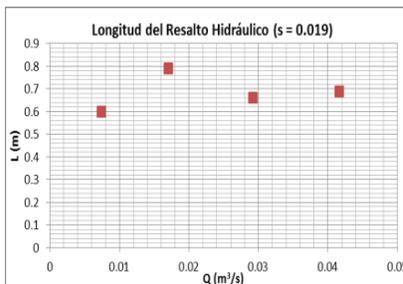
**Gráfica 48.** Longitud del Resalto Hidráulico para S = 0.013.



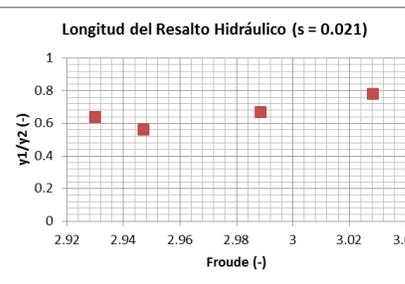
**Gráfica 49.** Longitud del Resalto Hidráulico para S = 0.015.



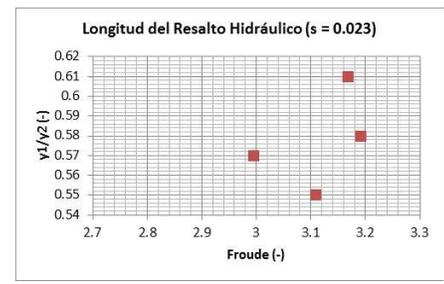
**Gráfica 50.** Longitud del Resalto Hidráulico para S = 0.017.



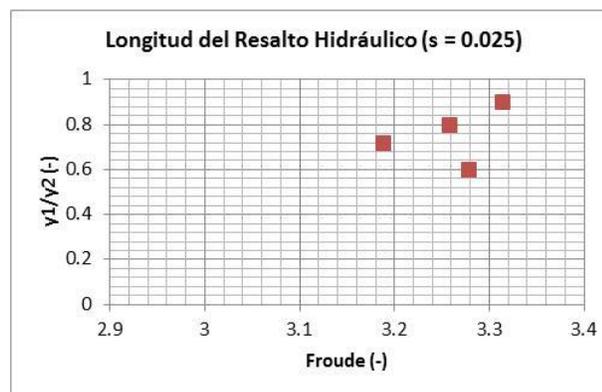
**Gráfica 51.** Longitud del Resalto Hidráulico para S = 0.019.



**Gráfica 52.** Longitud del Resalto Hidráulico para S = 0.021.



**Gráfica 53.** Longitud del Resalto Hidráulico para S = 0.023.

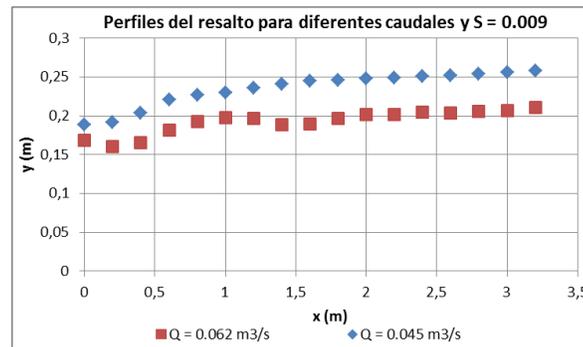


**Gráfica 54.** Longitud del Resalto Hidráulico para S = 0.025.

Para  $S = 0.7\%$  y  $Q = 0.029 \text{ m}^3/\text{s}$ , el resalto hidráulico no logró ubicarse en un solo sitio, y su movimiento variaba longitudinalmente 10 cm aproximadamente. En general, el comportamiento de la longitud es variable y no aumenta proporcionalmente con el caudal, es decir, no aumenta con el aumento de la profundidad subsecuente aguas arriba del resalto hidráulico.

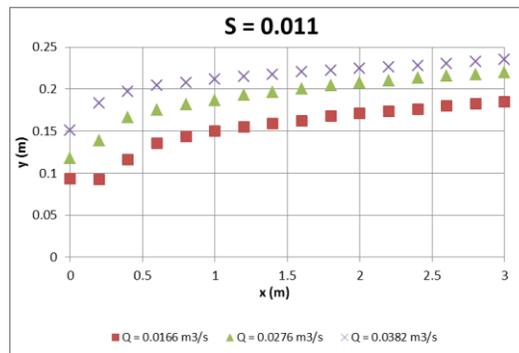
Es importante aclarar que, de los datos tomados, únicamente para los resaltos hidráulicos generados con pendientes mayores a 1.1% y con caudales mayores a  $0.3 \text{ m}^3/\text{s}$ , se generó claramente la región de burbujas mencionada por Hager; para las otras mediciones había formación de burbujas, pero la zona no podía ser medida dada la inestabilidad del resalto.

Por otra parte, para  $S \geq 0.9\%$ , la profundidad subsecuente aguas abajo del resalto hidráulico superó el diámetro de la tubería, por lo cual, se midió la profundidad del flujo con los piezómetros. De acuerdo con lo anterior, se presentan los resultados en la siguiente gráfica:



**Gráfica 55.** Perfil del resalto hidráulico para  $S = 0.009$ .

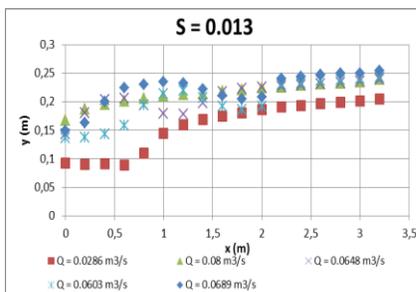
En la Gráfica 55 se puede observar que el resalto hidráulico es inestable y presenta dos curvas en el nivel del flujo. Sin embargo, para  $Q = 0.045 \text{ m}^3/\text{s}$ , el perfil del flujo es más estable, e incluso se puede inferir rápidamente cuál es la profundidad subsecuente aguas abajo del resalto hidráulico; por otro lado la profundidad subsecuente para  $Q = 0.062 \text{ m}^3/\text{s}$ , no se puede determinar claramente.



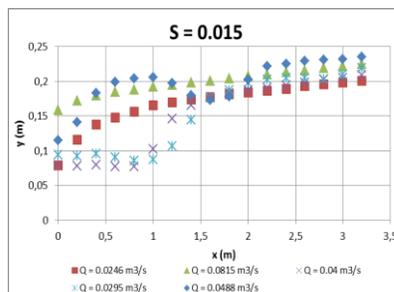
**Gráfica 56.** Perfil del resalto hidráulico para  $S = 0.011$ .

Para  $S = 0.011$ , los perfiles de flujo medidos son mucho más estables, y como es de esperarse, a mayor caudal, mayor nivel en el flujo. Es importante resaltar, que a pesar de que la variación entre los 3 caudales mostrados es la misma, existe mayor distancia entre los datos tomados con el caudal más bajo ( $0.0166 \text{ m}^3/\text{s}$ ) con respecto al caudal medio, que la distancia existente entre el caudal medio y el caudal más alto medido ( $0.0382 \text{ m}^3/\text{s}$ ). Con éste resultado se podría inferir que a medida que aumenta el caudal, las profundidades subsecuentes aguas abajo del resalto se van pareciendo entre sí. También se puede observar que a mayor caudal, la longitud del resalto hidráulico es mayor.

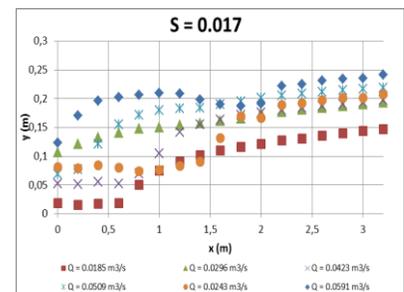
A continuación se presentan los resultados para las pendientes entre 0.013 y 0.025:



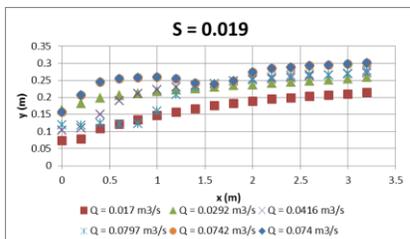
**Gráfica 57.** Perfil del Resalto Hidráulico para  $S = 0.013$ .



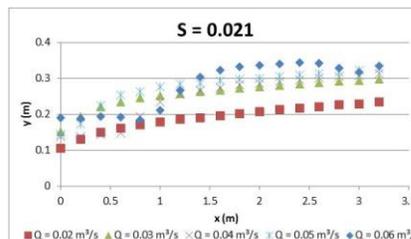
**Gráfica 58.** Perfil del Resalto Hidráulico para  $S = 0.015$ .



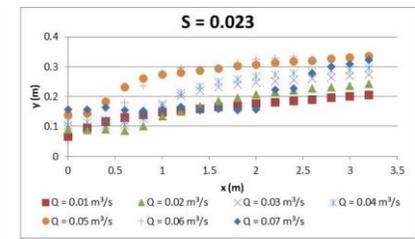
**Gráfica 59.** Perfil del Resalto Hidráulico para  $S = 0.017$ .



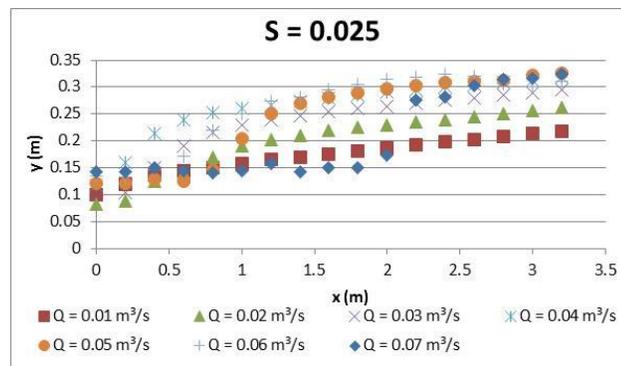
**Gráfica 60.** Perfil del Resalto Hidráulico para  $S = 0.019$ .



**Gráfica 61.** Perfil del Resalto Hidráulico para  $S = 0.021$ .



**Gráfica 62.** Perfil del Resalto Hidráulico para  $S = 0.023$ .



**Gráfica 63.** Perfil del Resalto Hidráulico para  $S = 0.025$ .

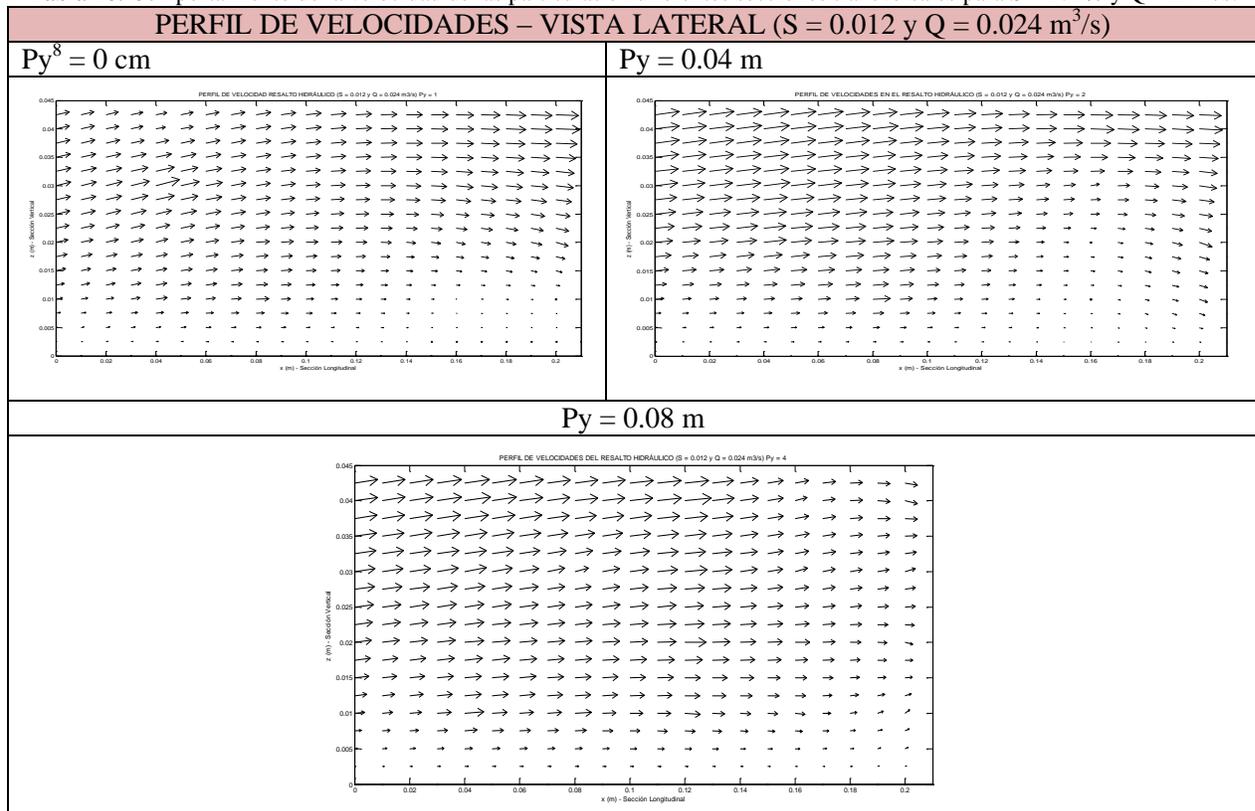
En general, en las anteriores gráficas se observa que para los caudales muy altos, el perfil del flujo es muy inestable, y no se puede observar claramente cuál es la profundidad subsecuente aguas abajo del

resalto hidráulico. También se observa, que a mayor pendiente, la altura del nivel del perfil a lo largo del resalto es mayor.

#### 6.1.4. Distribución de Velocidades

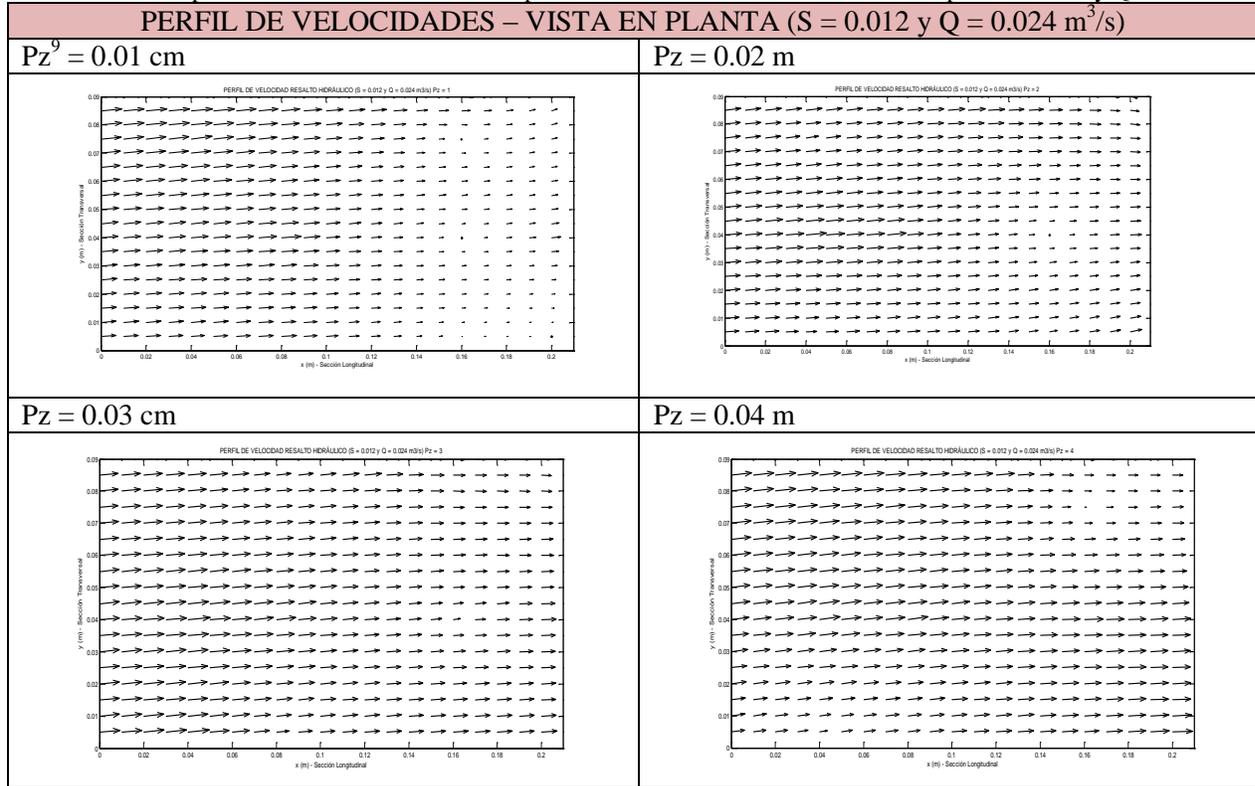
Los datos obtenidos para el análisis de la distribución de velocidades se dividen de acuerdo con los 12 escenarios planteados en el Numeral 4.4.2.3. Sin embargo, solo se mostrarán 2 escenarios en éste capítulo. Los demás escenarios se encuentran en ANEXOS.

**Tabla 28.** Comportamiento de la velocidad de las partículas en diferentes secciones transversales para  $S = 1.2\%$  y  $Q = 24\text{ L/s}$ .



<sup>8</sup>  $Py$  corresponde a la posición medida en la coordenada  $y$ .

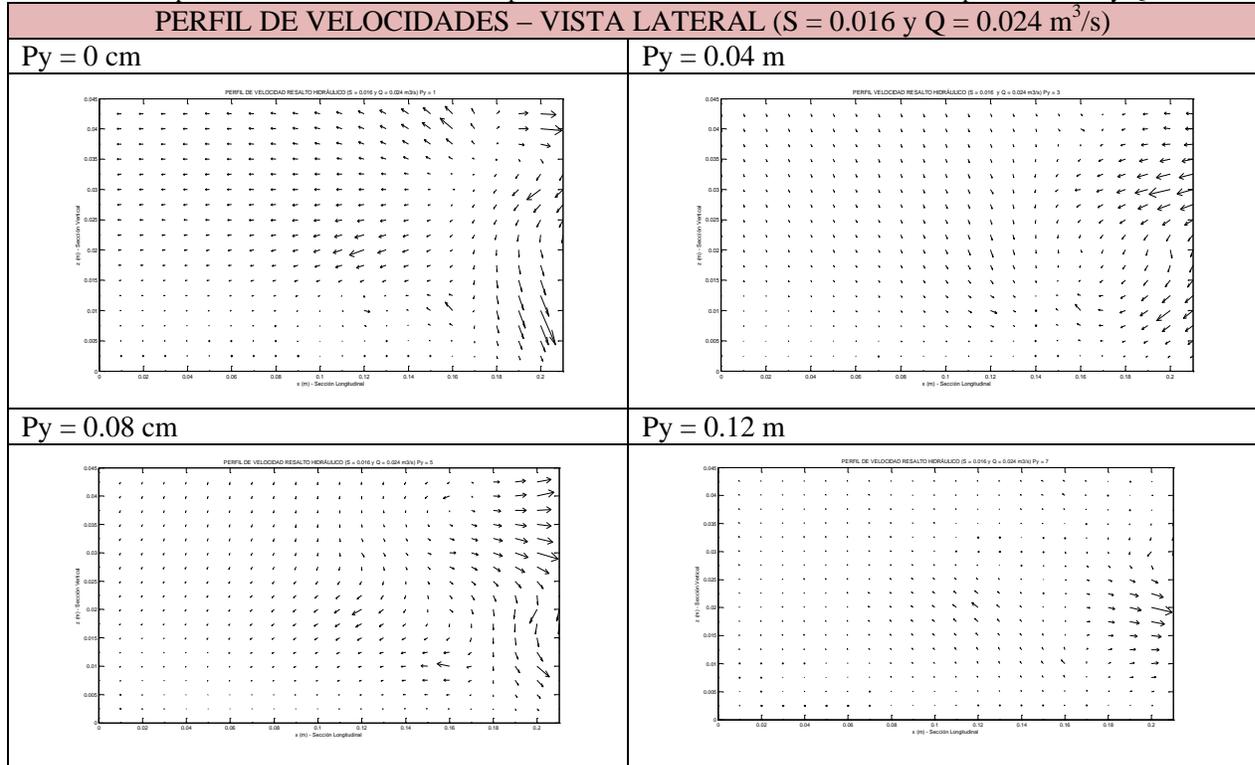
**Tabla 29.** Comportamiento de la velocidad de las partículas en diferentes secciones verticales para  $S = 1.2\%$  y  $Q = 24\text{ L/s}$ .



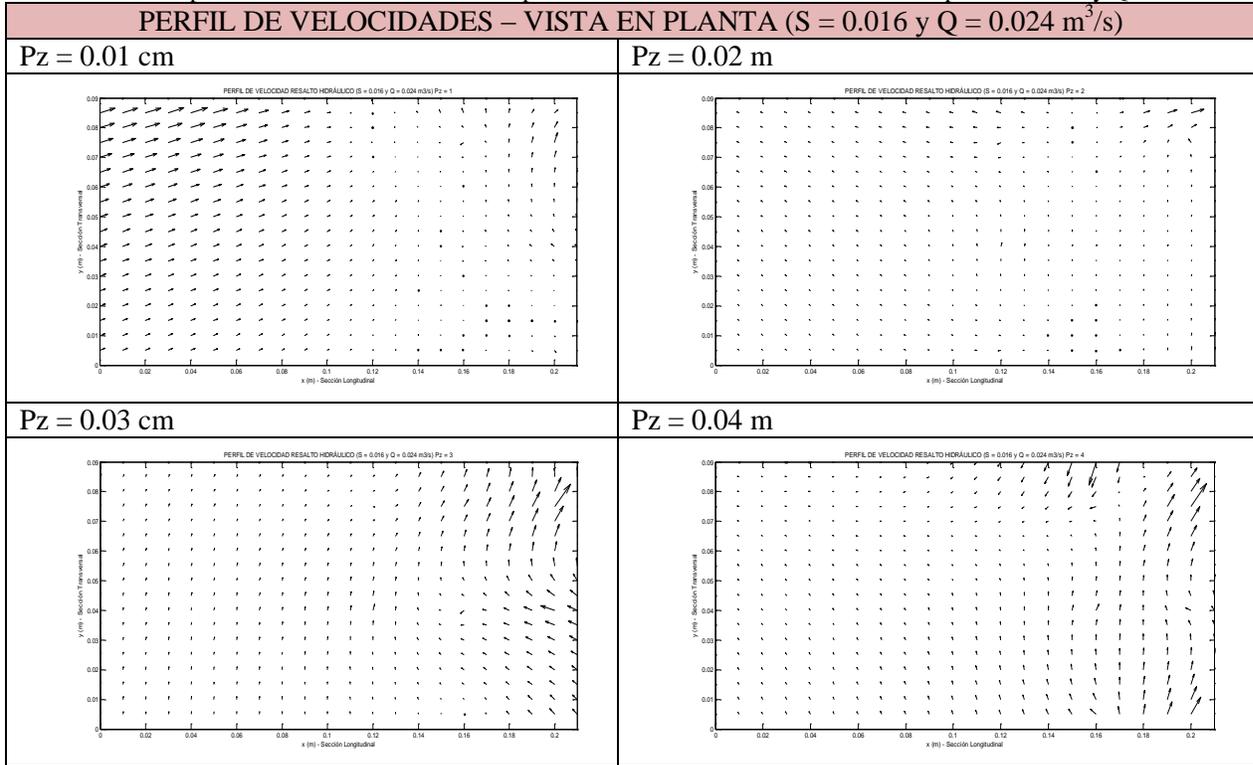
Para el escenario 1, el cual corresponde a una pendiente de  $1.2\%$  y un caudal de  $24\text{ L/s}$ , se observa que en el perfil lateral existen remolinos en la parte central de la medición, sin embargo, la mayoría de las partículas siguen en promedio la velocidad en la dirección  $x$  del flujo. En el perfil lateral no se observa ningún movimiento transversal de las partículas.

<sup>9</sup>  $Pz$  corresponde a la posición medida en la coordenada  $z$ .

**Tabla 30.** Comportamiento de la velocidad de las partículas en diferentes secciones transversales para  $S = 1.6\%$  y  $Q = 24\text{ L/s}$ .



**Tabla 31.** Comportamiento de la velocidad de las partículas en diferentes secciones verticales para  $S = 1.6\%$  y  $Q = 24\text{ L/s}$ .

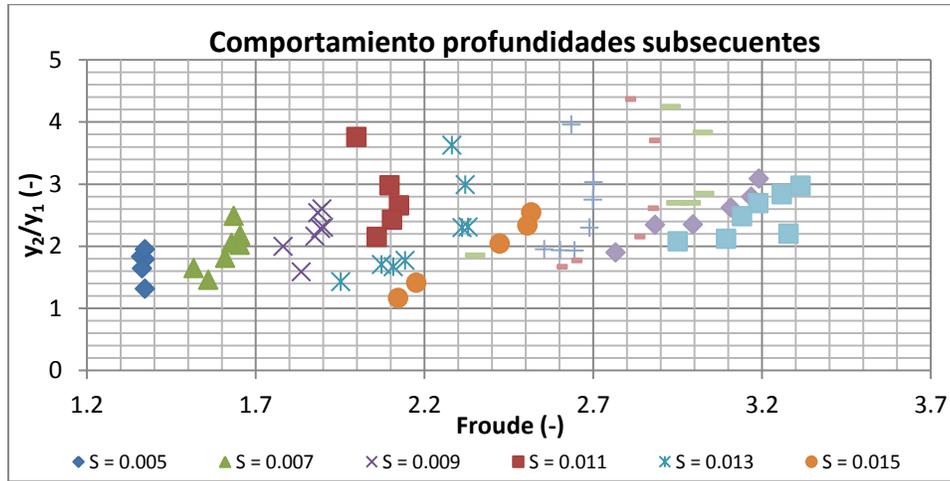


Para el escenario 3 se pueden observar remolinos a lo largo de los perfiles transversales de la tubería. En la zona de los remolinos, la velocidad es mayor que en aquellas zonas donde no existen remolinos, lo cual permite concluir que las partículas requieren mayor velocidad para cambiar la dirección del flujo. En este escenario, las partículas sí varían de dirección respecto a la sección vertical de la tubería. La mayoría de las variaciones se observan en aquellas mediciones medidas en la zona cercana a la superficie del resalto ( $Pz = 0.03\text{ cm}$  y  $Pz = 0.04\text{ cm}$ ).

## 6.2. Análisis de Resultados

### 6.2.1. Análisis profundidades subsecuentes

A partir de los datos obtenidos, se realizarán las comparaciones con los resultados obtenidos por los diferentes autores, los cuales fueron mencionados en el Numeral 5.4.

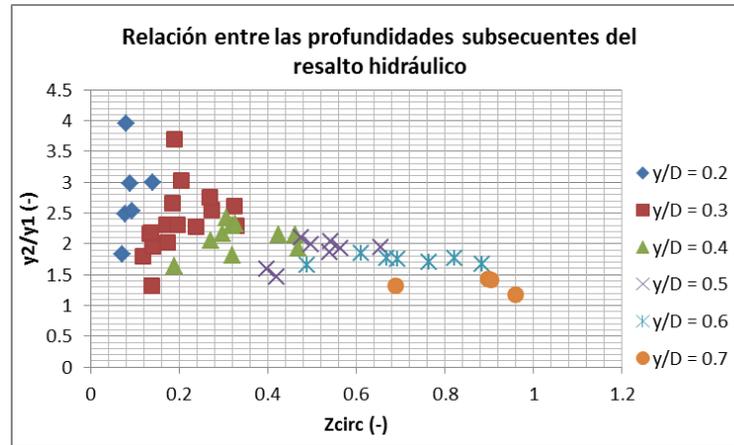


**Gráfica 64.** Resultados empíricos del comportamiento de las profundidades subsecuentes.

Los resultados obtenidos en la Gráfica 64 permiten observar un comportamiento similar para los 8 tipos de pendiente evaluados. Se observa cierta tendencia a que cuando la relación entre las profundidades de flujo alcanza el máximo Número de Froude, la gráfica presenta una variación en el sentido de la curva. Por lo tanto, aquellas relaciones entre las profundidades de flujo que se encuentran por debajo del máximo Número de Froude, se presenta que a mayor Número de Froude, existe mayor diferencia entre la profundidad aguas abajo del resalto y la profundidad aguas arriba; mientras que cuando los valores son superiores al máximo valor del Número de Froude, este disminuye a medida que la relación entre las profundidades subsecuentes del flujo aumenta.

Por otro lado, al observar la Gráfica 18 se puede resaltar que el máximo Número de Froude encontrado en el montaje se encuentra para relaciones de llenado del 30 %, lo cual concuerda con los Números de Froude encontrados en la Gráfica 64, en donde el cambio de curvatura corresponde a un Número de Froude formado con una relación de llenado del 30%.

Otra forma de analizar los datos, de acuerdo con lo planteado por Sturm, es comparar la relación entre las profundidades subsecuentes del resalto hidráulico, clasificando el análisis por relaciones de llenado. Éste análisis se realiza comparando un número parecido al Número de Froude, respecto a la relación entre las profundidades subsecuentes:



**Gráfica 65.** Relación entre las profundidades subsecuentes del resalto hidráulico para tuberías circulares.

El  $Z_{circ}$  presentado en la Gráfica 65 se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$Z_{circ} = \frac{Q}{\frac{1}{g^2 d^2}}$$

**Ecuación 83.** Relación entre el caudal y la gravedad y el diámetro de la tubería. (Sturm, 2010)

En la Gráfica 65 se puede observar una clara tendencia a que cuando aumenta la relación de llenado aguas arriba del resalto, disminuye la diferencia entre las profundidades aguas arriba del resalto y la profundidad aguas abajo.

De acuerdo con el análisis realizado, se puede deducir que la profundidad del flujo aguas abajo del resalto hidráulico depende de la pendiente, del caudal y de la profundidad aguas arriba; por lo cual se desarrolla una regresión lineal por mínimos cuadrados para determinar una ecuación explícita para el cálculo de  $y_2$ .

Después de varios análisis en los cuales se evaluaron diferentes parámetros, se obtuvieron dos ecuaciones para el cálculo de la profundidad subsecuente; la primera ecuación calcula la profundidad subsecuente del resalto hidráulico cuando  $y_2$  este es menor al diámetro, y la segunda cuando  $y_2$  es mayor al diámetro.

A continuación se presentará el procedimiento para el cálculo de  $y_2$  cuando es menor al diámetro<sup>10</sup>.

<sup>10</sup> Los resultados obtenidos por este método matricial se realizaron bajo la suposición de flujo gradualmente variado, por lo cual la velocidad y el Número de Froude no son calculados con  $y_1$  sino con el caudal de entrada medido con el Caudalímetro.

1. Definir las variables independientes

$$\frac{y_2}{y_1} = f\left(\frac{Q}{Q_{max}}, \frac{S}{S_{max}}\right)$$

2. Establecer la ecuación que determinará  $y_2$

$$\frac{y_2}{y_1} = 10^a \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^b \left(\frac{S}{S_{max}}\right)^c$$

Para realizar el análisis por mínimos cuadrados se debe linealizar, por lo tanto:

$$\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = a + b \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) + c \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right)$$

3. Establecer la ecuación que minimiza la suma del error:

$$\min Error = \sum \left[ f\left(\frac{Q}{Q_{max}}, \frac{S}{S_{max}}\right) - \frac{y_2}{y_1} \right]^2$$

4. Determinar las ecuaciones que minimizan el error, las cuales consisten en derivadas parciales de cada una de las constantes que son igualadas a cero:

$$\frac{\delta Error}{\delta a} = \frac{\delta}{\delta a} \left( a + b \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) + c \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right) - \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \right)^2 = 0$$

$$\frac{\delta Error}{\delta a} = 2 \left[ a + b \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) + c \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right) - \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \right] = 0$$

Y aplicando la sumatoria se obtiene que

$$an + b \sum \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) + c \sum \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right) = \sum \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

Las otras ecuaciones son:

$$a \sum \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) + b \sum \left[ \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) \right]^2 + c \sum \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right) \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) = \sum \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)$$

$$a \sum \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right) + b \sum \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right) + c \sum \left[ \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right) \right]^2 = \sum \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right)$$

5. Plantear la matriz

$$\begin{vmatrix}
 n & \sum \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) & \sum \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right) \\
 \sum \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) & \sum \left[\log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)\right]^2 & \sum \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right) \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) \\
 \sum \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right) & \sum \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right) & \sum \left[\log\left(\frac{S}{S_{max}}\right)\right]^2
 \end{vmatrix}
 \begin{matrix}
 a \\
 b \\
 c
 \end{matrix}
 =
 \begin{vmatrix}
 \sum \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \\
 \sum \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \log\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) \\
 \sum \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \log\left(\frac{S}{S_{max}}\right)
 \end{vmatrix}$$

6. Resolver la matriz

Al resolver la matriz planteada en el paso 5 se obtiene que:

$$a = 0.393$$

$$b = -0.371$$

$$c = 0.631$$

Realizando el mismo proceso, se obtiene que las dos ecuaciones que calculan la profundidad subsecuente aguas abajo del resalto hidráulico son:

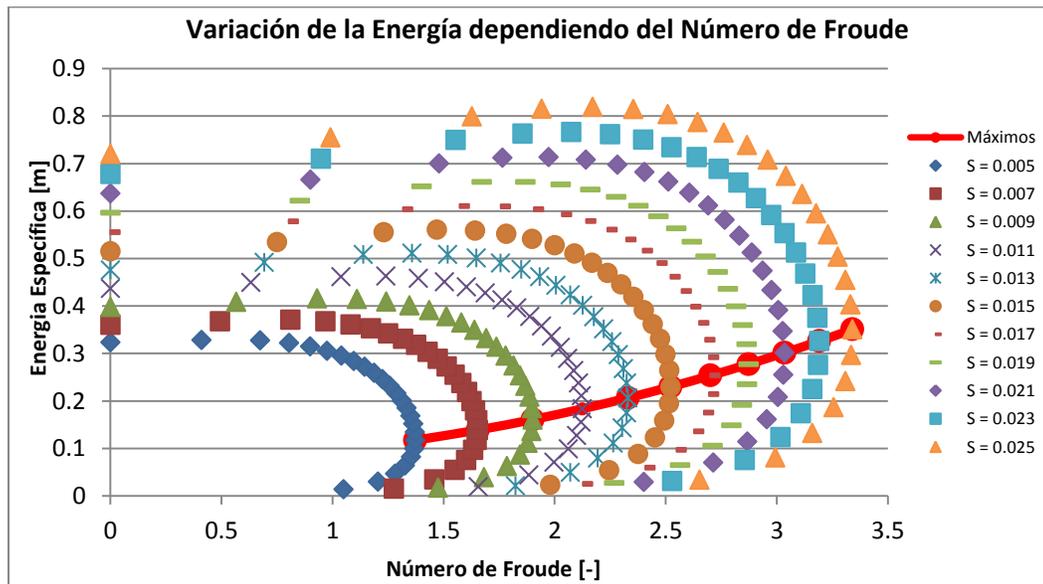
Característica	Ecuación	R <sup>2</sup>	Numeración
$y_2 < D$	$\frac{y_2}{y_1} = 2.473 * \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^{-0.371} \left(\frac{S}{S_{max}}\right)^{0.631}$	85.3 %	<b>Ecuación 84.</b> Ecuación empírica de la profundidad subsecuente para $y_2 < D$ .
$y_2 > D$	$\frac{y_2}{y_1} = 1.819 * \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^{-0.618} \left(\frac{S}{S_{max}}\right)^{0.204}$	90.7 %	<b>Ecuación 85.</b> Ecuación empírica de la profundidad subsecuente para $y_2 > D$ .

Se observa que cuando la profundidad subsecuente aguas abajo del resalto es menor el diámetro, el parámetro más relevante es la pendiente con un porcentaje de 63 %, mientras que el caudal tiene un peso de 37%. Para  $y_2$  mayor al diámetro, el peso del caudal pasa a ser de 75.2% y la pendiente tiene un peso 24.8%, lo que permite inferir la importancia que adquiere el caudal de entrada cuando la altura subsecuente aguas abajo del resalto es mayor al diámetro.

### 6.2.2. Análisis del comportamiento de la Energía en el resalto hidráulico<sup>11</sup>

El concepto de energía específica de un fluido analiza el comportamiento de la energía potencial de presión por unidad de peso y la energía cinética del flujo medidas desde el fondo de la tubería.

Para entender cómo se comporta la energía específica en la tubería, se realizó una gráfica teórica que relaciona la variación del Número de Froude respecto a la energía específica para las diferentes pendientes evaluadas en el laboratorio. Los datos de entrada para el cálculo corresponden a los manejados en el canal:  $d = 242 \text{ mm}$ ,  $k_s = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  y  $v = 1.14 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ . La gráfica obtenida se muestra a continuación:



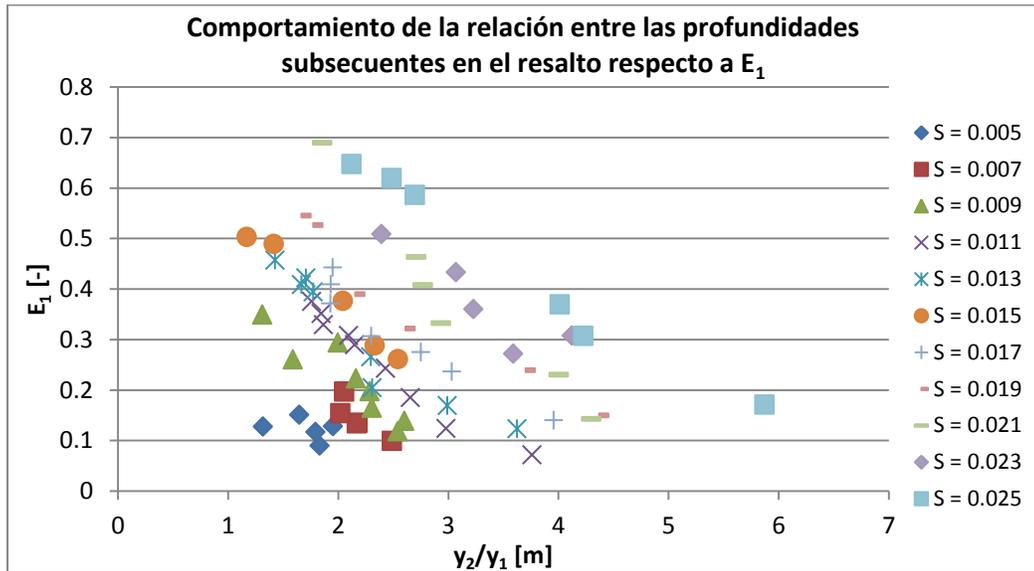
**Gráfica 66.** Comportamiento teórico de la Energía Específica respecto al Número de Froude para las diferentes pendientes evaluadas en el laboratorio.

En la Gráfica 66 se observa que cada pendiente presenta un Número de Froude máximo, para el cual cambia la curvatura de los datos, ya que el flujo empieza el cambio de flujo supercrítico a flujo subcrítico. Los Números de Froude máximos se indican con la línea roja. También se puede observar que a medida que aumenta la pendiente, los Números de Froude y la Energía Específica aumentan.

Ahora bien, retomando la Gráfica 64, se observa que presenta un Número de Froude máximo en el cual inicia el cambio de curvatura en la gráfica para las distintas pendientes evaluadas; y ese Número de

<sup>11</sup> Los resultados y gráficas obtenidos se hicieron bajo la suposición de Flujo Uniforme.

Froude máximo corresponde al máximo encontrado en la Gráfica 66; por lo cual existe una relación entre las profundidades subsecuentes del resalto hidráulico y la energía específica:



**Gráfica 67.** Relación entre las profundidades subsecuentes del resalto hidráulico y la Energía Específica.

En la Gráfica 67 se observa cierta tendencia lineal al evaluar el comportamiento entre las profundidades subsecuentes y la energía específica, y se observa que la pendiente y el punto de corte tienden a aumentar a medida que aumenta la pendiente. Por lo tanto, para identificar las ecuaciones que evalúan éstas variables, se realizó una regresión lineal para cada una de las pendientes evaluadas, las cuales se muestran en la siguiente tabla<sup>12</sup>:

**Tabla 32.** Ecuaciones sin corrección que describen el comportamiento del resalto hidráulico en tuberías.

Pendiente (S)	Ecuación	R <sup>2</sup>
0.007	$E_1 = -0.1935 \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 0.5575$	0.8589
0.009	$E_1 = -0.1422 \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 0.5728$	0.815
0.011	$E_1 = -0.1842 \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 0.689$	0.9626

<sup>12</sup> La regresión lineal se llevó a cabo para los datos que representaran una desviación estándar menor al 3% por cada medición.

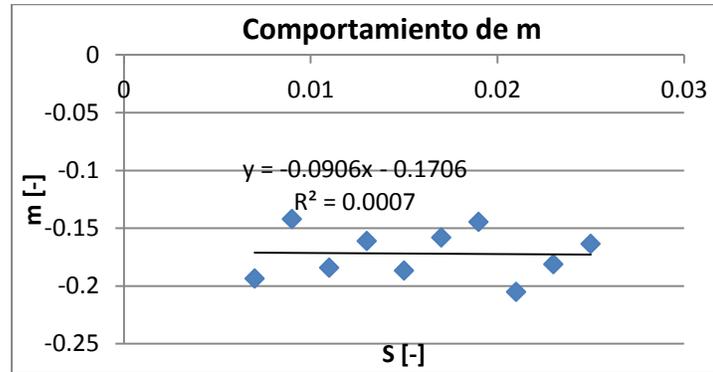
Pendiente (S)	Ecuación	R <sup>2</sup>
0.013	$E_1 = -0.1611 \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 0.6764$	0.9646
0.015	$E_1 = -0.1867 \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 0.7384$	0.9773
0.017	$E_1 = -0.158 \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 0.7135$	0.911
0.019	$E_1 = -0.1445 \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 0.7611$	0.9197
0.021	$E_1 = -0.225 \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 1.0943$	0.9926
0.023	$E_1 = -0.1812 \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 1.0234$	0.9596

Para hallar alguna ecuación global que pueda representar el comportamiento de las profundidades subsecuentes, se toma cada “m” y cada “k” de las ecuaciones presentadas en la Tabla 32, donde m representa la pendiente de cada ecuación y k el punto de corte con el eje de las coordenadas:

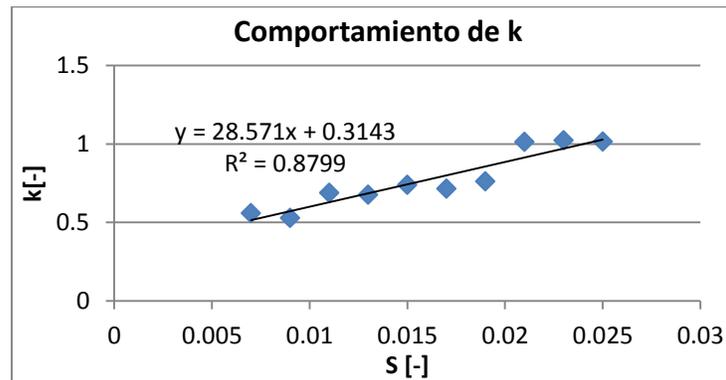
**Tabla 33.** "m" y "k" para cada pendiente.

S [-]	m [-]	k [-]	R <sup>2</sup> [-]
0.007	-0.161	0.4952	0.6942
0.009	-0.163	0.5604	0.851
0.011	-0.158	0.6311	0.9553
0.013	-0.1633	0.6687	0.8944
0.015	-0.1867	0.7384	0.9773
0.017	-0.1335	0.6521	0.9202
0.019	-0.138	0.7365	0.9308
0.021	-0.2117	1.025	0.9331
0.023	-0.3637	1.3591	0.8906
0.025	-0.1283	0.8808	0.326

Para ver el comportamiento de m y k a medida que aumenta la pendiente, se realizaron la Gráfica 68 y la Gráfica 69:



**Gráfica 68.** Comportamiento de "m" a medida que aumenta la pendiente.



**Gráfica 69.** Comportamiento de "k" a medida que aumenta la pendiente.

Por lo cual, la ecuación que relaciona la profundidad subsecuente del resalto hidráulico con la pendiente es:

$$E_1 = m \left( \frac{y_2}{y_1} \right) + k$$

$$m = -0.0906S - 0.1706$$

$$k = 28.571S + 0.3143$$

Por lo tanto,  $y_2$  es:

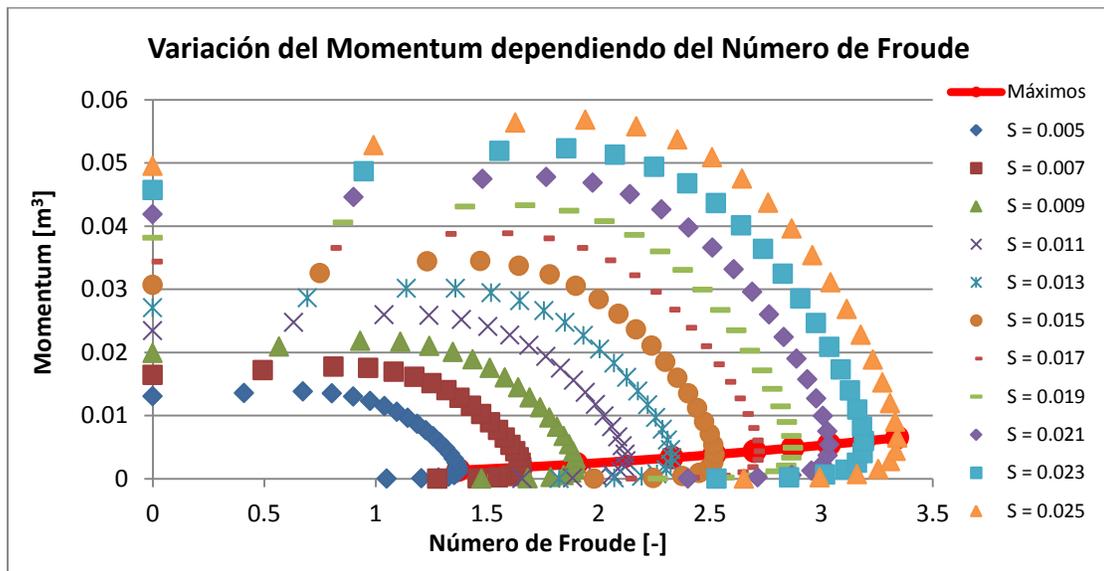
$$y_2 = \frac{(E_1 - k)y_1}{m}$$

**Ecuación 86.** Ecuación empírica de la profundidad subsecuente de acuerdo a la Energía Específica.

Es decir,  $y_2 = f(S, g, y_1, ks, v)$ .

### 6.2.3. Análisis Conservación del Momentum<sup>13</sup>

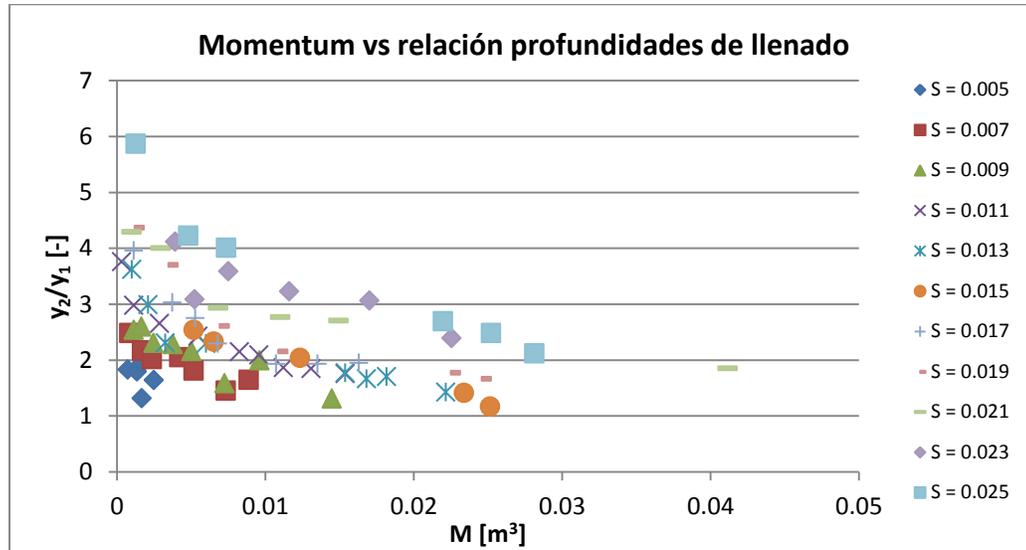
Para entender el comportamiento del Momentum en el resalto, se realiza una gráfica teórica que compara el comportamiento del Momentum respecto a la variación en el Número de Froude para diferentes pendientes. Los cálculos realizados se hicieron de acuerdo con las características iniciales que se encuentran en el montaje realizado:  $d = 242 \text{ mm}$ ,  $ks = 1.5 * 10^{-6} \text{ m}$  y  $v = 1.14 * 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ .



**Gráfica 70.** Comportamiento teórico del Momentum respecto al aumento en el Número de Froude para diferentes tipos de pendientes.

Realizando el mismo proceso realizado en el Numeral 6.2.2, en el cual se observa que el Número de Froude máximo corresponde al máximo encontrado en la Gráfica 64, se realiza la siguiente gráfica:

<sup>13</sup> Los resultados y gráficas obtenidos se hicieron bajo la suposición de Flujo Uniforme.



**Gráfica 71.** Comportamiento del Momentum respecto a la relación entre las profundidades subsecuentes en el resalto.

En la Gráfica 71 también se observa una tendencia lineal para cada tipo de pendiente. Por lo tanto, las ecuaciones que describen el comportamiento de cada una de esas tendencias para cada tipo de pendiente se observan en la siguiente tabla:

**Tabla 34.** Ecuaciones sin corrección que describen el comportamiento del resalto hidráulico en tuberías.

Pendiente (S)	Ecuación	R <sup>2</sup>
0.007	$\frac{y_2}{y_1} = -83.28M_1 + 2.2459$	0.8218
0.009	$\frac{y_2}{y_1} = -91.972M_1 + 2.632$	0.7683
0.011	$\frac{y_2}{y_1} = -68.451M_1 + 2.7423$	0.9326
0.013	$\frac{y_2}{y_1} = -90.6M_1 + 3.2693$	0.8889
0.015	$\frac{y_2}{y_1} = -62.919M_1 + 2.8139$	0.9876
0.017	$\frac{y_2}{y_1} = -91.606M_1 + 3.2273$	0.8495

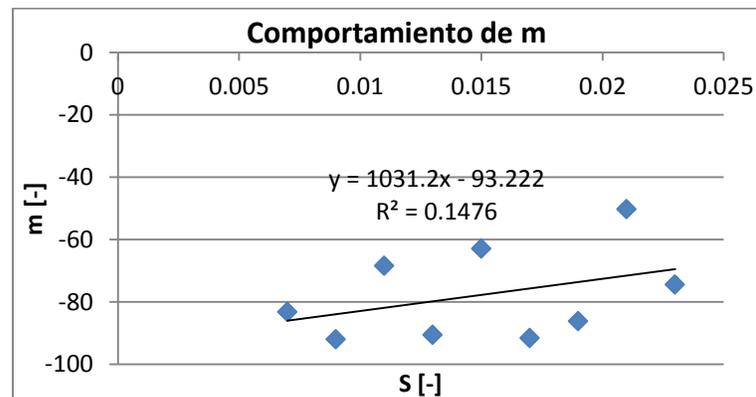
Pendiente (S)	Ecuación	R <sup>2</sup>
0.019	$\frac{y_2}{y_1} = -86.15M_1 + 3.6476$	0.8281
0.021	$\frac{y_2}{y_1} = -50.332M_1 + 3.8838$	0.8951
0.023	$\frac{y_2}{y_1} = -74.473M_1 + 4.1632$	0.9433

De la Tabla 34 se analiza el comportamiento de la pendiente y el punto de corte de cada una de las ecuaciones obtenidas en cada pendiente:

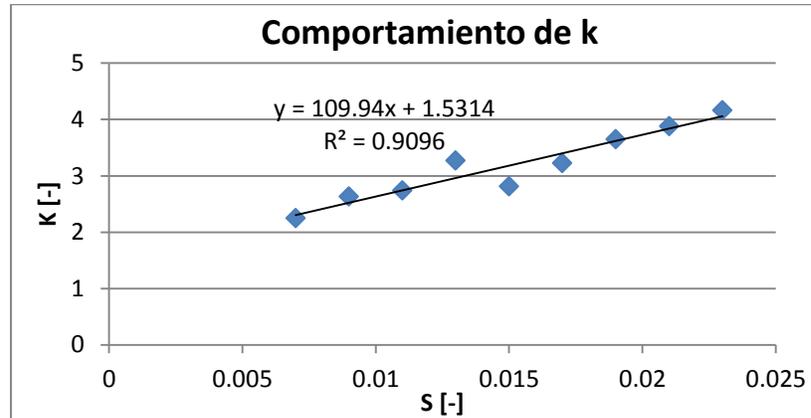
**Tabla 35.** “m” y “k” para cada pendiente.

Corregidos			
S [-]	m [-]	k [-]	R <sup>2</sup> [-]
0.007	-83.28	2.2459	0.8218
0.009	-91.972	2.632	0.7683
0.011	-68.451	2.7423	0.9326
0.013	-90.6	3.2693	0.8889
0.015	-62.919	2.8139	0.9876
0.017	-91.606	3.2273	0.8495
0.019	-86.15	3.6476	0.8281
0.021	-50.332	3.8838	0.8951
0.023	-74.473	4.1632	0.9433

Por lo tanto, realizando el mismo proceso desarrollado en el Numeral 6.2.2 se obtiene que:



**Gráfica 72.** Comportamiento de "m" a medida que aumenta la pendiente.



**Gráfica 73.** Comportamiento de "k" a medida que aumenta la pendiente.

Por lo tanto la ecuación que relaciona el comportamiento de las profundidades subsecuentes teniendo en cuenta el Momentum es:

$$\frac{y_2}{y_1} = m(M_1) + k$$

$$m = 1031.2S - 93.222$$

$$k = 109.94S + 1.5314$$

**Ecuación 87.** Ecuación empírica de la profundidad subsecuente de acuerdo al Momentum Especifico.

#### 6.2.4. Comparación entre los resultados empíricos y teóricos de las profundidades subsecuentes

Para comprobar la validez de las ecuaciones obtenidas se realizó una comparación con los resultados obtenidos en laboratorio y los resultados obtenidos con las ecuaciones planteadas por autores y las obtenidas empíricamente. La comparación se realizó mediante la comparación del error cuadrático medio:

$$ECM = \sum (\bar{y} - y_i)^2$$

**Ecuación 88.** Cálculo del Error Cuadrático Medio.

$$ECM_{prom} = \frac{\sum (\bar{y} - y_i)^2}{n}$$

**Ecuación 89.** Cálculo del Error Cuadrático Medio Promedio.

donde

$\bar{y}$ : Valor calculado con la ecuación.

$y_i$ : Valor real.

$n$ : Número total de datos medidos.

Por lo tanto, los ECM calculados con las ecuaciones de todos los autores se mostrarán en la Tabla 36.

**Tabla 36.** Error cuadrático medio para las diferentes ecuaciones evaluadas.

	Ecuación Silvester [Ecuación 12 y Ecuación 14]	Ecuación FHWA [Ecuación 53 y Ecuación 54]	Ecuación Hager [Ecuación 36]	Ecuación French [Ecuación 28]	Ecuación empírica de acuerdo Potencial. [Ecuación 84 y Ecuación 85]	Ecuación empírica Lineal [Ecuación 87]
$ECM_{prom}$ [m]	0.0011	0.0012	0.0036	0.0022	0.0008	0.0003
$ECM$ [m]	0.3228	0.3601	1.0706	0.6543	0.253	0.0783

En la Tabla 36 se observa que la ecuación empírica que diferencia el cálculo de la profundidad subsecuente cuando  $y_2$  es mayor o menor al diámetro es la que presenta menor error cuadrático medio promedio. Y la ecuación que calcula  $y_2$  como función de la Energía es la que presenta menor error cuadrático medio. Es importante tener en cuenta que la Ecuación 87 se calcula bajo la suposición de flujo uniforme, mientras que las otras ecuaciones empíricas analizadas no trabajan bajo esta suposición.

Sin embargo, al realizar un análisis con diferentes diámetros y pendientes, el error medio cuadrático aumenta, por lo cual, el rango de validez de la ecuación se limita a los siguientes casos:

**Tabla 37.** Rango de validez de la Ecuación 84 y la Ecuación 85.<sup>14</sup>

d (m)	Rango ( $y/d$ )	S (-)
0.150	0.47 - 0.70	0.200
	0.35 - 0.38	0.300
0.200	0.29 - 0.38	0.01
	0.33 - 0.35	0.015
	0.26 - 0.28	0.02
	0.33 - 0.36	0.2
	0.27 - 0.28	0.3
0.250	0.21 - 0.26	0.01
	0.20 - 0.25	0.015
	0.20 - 0.24	0.02
	0.19 - 0.23	0.025
	0.19 - 0.23	0.03
	0.19 - 0.2	0.04

<sup>14</sup> Los rangos de validez se establecieron para aquellos datos que comparados con los valores obtenidos por la ecuación de Silvester correspondieran a una diferencia menor al 10%.

	0.25 - 0.69	0.08
	0.44 - 0.70	0.09
	0.41 - 0.47	0.1
0.300	0.16 - 0.20	0.01
	0.16 - 0.19	0.015
	0.15 - 0.19	0.015
	0.15 - 0.19	0.02
	0.15 - 0.18	0.025
	0.15 - 0.18	0.03
	0.15 - 0.18	0.04
	0.15 - 0.17	0.05
	0.15 - 0.70	0.06
	0.14 - 0.7	0.07
	0.38 - 0.43	0.08
	0.35 - 0.39	0.09
	0.33 - 0.36	0.1
0.350	0.13 - 0.16	0.01
	0.13 - 0.15	0.015
	0.13 - 0.15	0.02
	0.13 - 0.15	0.025
	0.13 - 0.15	0.03
	0.12 - 0.15	0.04
	0.12 - 0.7	0.05
	0.12 - 0.43	0.06
	0.12 - 0.38	0.07
	0.12 - 0.35	0.08
	0.12 - 0.32	0.09
0.12 - 0.30	0.1	

En la Tabla 37 se observa que el rango de validez de los resultados obtenidos con la Ecuación 84 y la Ecuación 85 se encuentra para parámetros de entrada similares a los del montaje evaluado; es decir, diámetros cercanos a 250 mm y pendientes bajas. Sin embargo, para un diámetro de 300 mm, la ecuación se ajusta con una pendiente de 7%, y para un diámetro de 350 mm, la ecuación se ajusta para una pendiente de 5 %.

#### 6.2.5. Ecuación profundidades subsecuentes en el Resalto Hidráulico

De acuerdo con el análisis realizado en el Numeral 6.2.4 se puede concluir que las ecuaciones que definen el comportamiento de la profundidad subsecuente aguas abajo del resalto hidráulico en tuberías son la Ecuación 84 y la Ecuación 85.

$y_2 < D$ :

$$\frac{y_2}{y_1} = 2.473 * \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^{-0.371} \left(\frac{S}{S_{max}}\right)^{0.631}$$

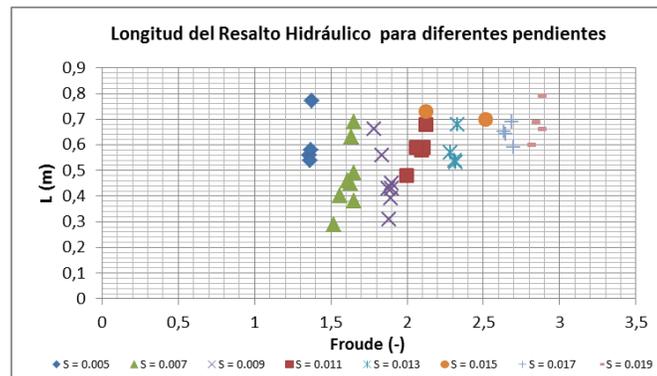
$y_2 > D$ :

$$\frac{y_2}{y_1} = 1.819 * \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^{-0.618} \left(\frac{S}{S_{max}}\right)^{0.204}$$

### 6.2.6. Análisis del comportamiento de la longitud en el Resalto Hidráulico

El análisis de la longitud en el resalto hidráulico se realizará respecto al Número de Froude, a las diferentes pendientes evaluadas y a la relación entre las profundidades subsecuentes.

Respecto al Número de Froude se organizaron los datos de tal forma que para cada pendiente se mostrara el comportamiento de la Longitud respecto al Número de Froude:

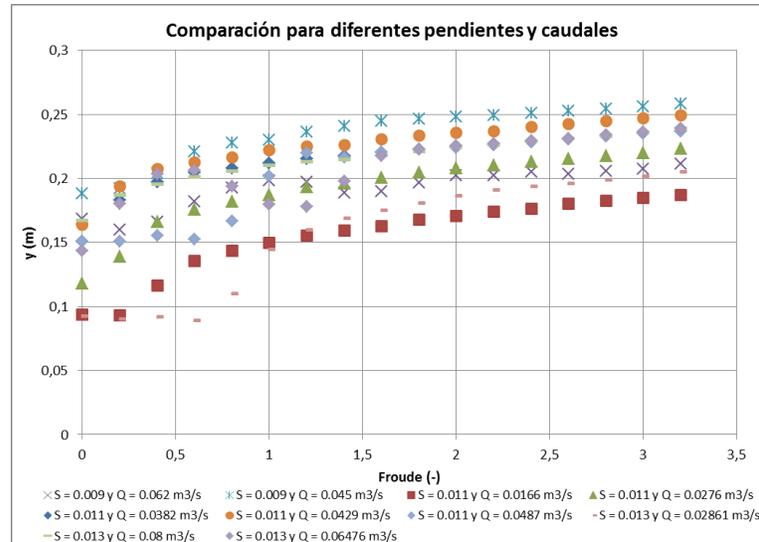


**Gráfica 74.** Longitud del resalto hidráulico para diferentes pendientes.

En la Gráfica 74 se puede observar que existe cierta tendencia entre la variación en la longitud del resalto, el Número de Froude y la pendiente. Primero, se observa que a mayor Número de Froude, existe una leve aumento de la longitud del resalto; también se presenta de manera evidente, que cuando aumenta la pendiente en la tubería, aumenta el valor en el Número de Froude. Sin embargo, las variaciones en la longitud del resalto no son relevantes ni representativas; en general, todos los puntos se encuentran en el mismo rango de datos.

Respecto a los valores evaluados por otros autores (Ver Numeral 5.5), se observa la misma tendencia al crecimiento rápido de la curva (para  $S = 0.019$ ), sin embargo, los valores crecen más rápido que los valores obtenidos experimentalmente.

Con respecto a los perfiles del resalto se tiene que:

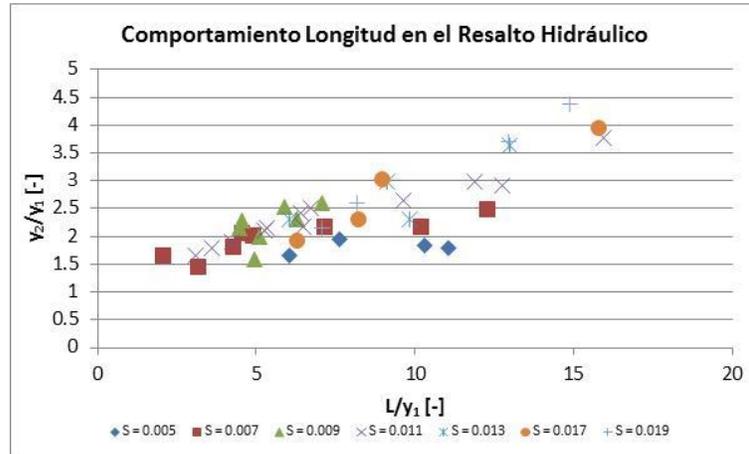


**Gráfica 75.** Comparación para diferentes pendientes y caudales.

En la Gráfica 75 se incluyen los perfiles de los resaltos evaluados con los piezómetros, los cuales corresponden a pendientes mayores a 0.009; sin embargo, para observar más claramente los perfiles, no se añaden en la gráfica todos los perfiles medidos. Se puede observar que el comportamiento para los resaltos evaluados con  $S = 0.011$  es mucho más estable, y no tiene tantas fluctuaciones, como las presentadas en  $S = 0.009$ . Además, aunque no se alcanzó a medir, se puede inferir que la altura subsecuente del resalto para  $S = 0.011$  y  $Q = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ , va a ser más baja, que la obtenida cuando  $S = 0.009$ , sin embargo, la diferencia entre la altura del resalto aguas abajo con respecto a la altura aguas arriba es mayor a mayor pendiente, ya que el flujo adquiere mayor velocidad.

Por otra parte, se realizó un análisis de comparación entre la longitud del resalto hidráulico, la pendiente y la relación entre las profundidades subsecuentes. Éste análisis se realizó también comparando el Número de Froude; sin embargo el coeficiente de determinación calculado no era tan alto respecto a un análisis sin el Número de Froude.

El primer paso para desarrollar el análisis fue comparar el comportamiento de la longitud dividida entre la profundidad aguas arriba del resalto, con respecto a la relación entre las profundidades subsecuentes:



**Gráfica 76.** Comportamiento de la longitud en el Resalto Hidráulico.

En la Gráfica 76 se observa cierta tendencia a que con el aumento de la pendiente en el modelo experimental, la pendiente de cada curva va aumentando. Por lo tanto, se puede establecer que la longitud del resalto hidráulico está relacionada con la relación entre las profundidades subsecuentes y la pendiente. Por lo tanto, se realizan dos análisis diferentes; el primero mediante una regresión lineal y el segundo mediante un análisis de mínimos cuadrados por medio de la función **cftool** de Matlab.

La ecuación lineal analizada es la siguiente:

$$\frac{L}{y_1} = \frac{1}{m} \left( \frac{y_2}{y_1} - k \right)$$

$$m = 14.389S - 0.0169$$

$$k = -8726.8S^2 + 125.41S + 1.0161$$

**Ecuación 90.** Ecuación lineal para determinar la longitud del resalto hidráulico en tuberías.

Por otro lado, la ecuación encontrada por el método **cftool** de Matlab es:

$$\frac{L}{y_1} = 0.2394 * S^{-0.4342} \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^{1.674}$$

**Ecuación 91.** Ecuación potencial para determinar la longitud del resalto hidráulico en tuberías.

la cual tiene un coeficiente de determinación de 70.7% y un EMC de 1.974.

### 6.2.7. Comparación entre los resultados empíricos y teóricos de la longitud del resalto hidráulico

Para comprobar la validez de las ecuaciones obtenidas se realizó una comparación con los resultados obtenidos en laboratorio y los resultados obtenidos con las ecuaciones planteadas por autores y las obtenidas empíricamente. La comparación se realizó mediante la comparación del error cuadrático medio:

**Tabla 38.** Error cuadrático medio para las diferentes ecuaciones evaluadas.

	Ecuación Hager [Ecuación 41]	Ecuación FHWA [Ecuación 55 y Ecuación 56]	Ecuación Empírica Lineal [Ecuación 90]	Ecuación Empírica Potencial [Ecuación 91]
ECM Prom [-]	0.426	1.828	0.025	0.023
ECM [-]	20.026	85.921	1.155	1.072

En la Tabla 38 se observa que la ecuación que presenta el menor error cuadrático medio promedio y normal es la ecuación potencial, ajustándose mucho mejor que las ecuaciones empíricas encontradas anteriormente. Es importante tener en cuenta que las ecuaciones obtenidas por Hager y por la FHWA no tienen en cuenta la pendiente, sino exclusivamente el Número de Froude, y de acuerdo con los resultados obtenidos en el modelo, la pendiente varía el comportamiento de la curva en la recta.

### 6.2.8. Ecuación longitud del resalto hidráulico para tuberías circulares

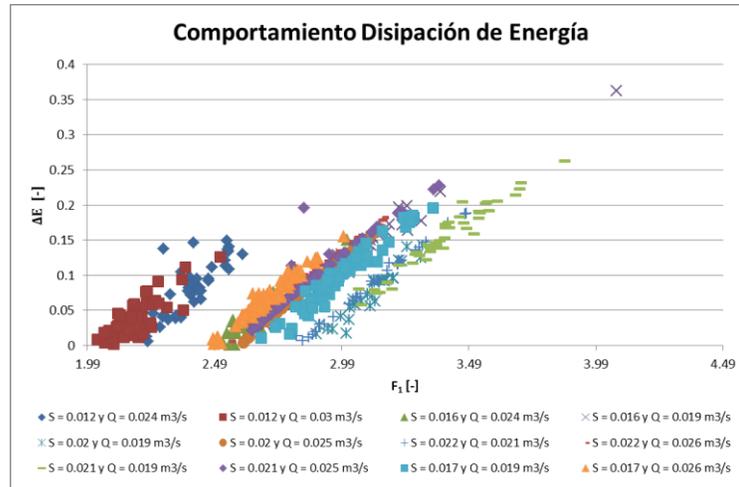
La ecuación que representa mejor el comportamiento de la longitud en el resalto hidráulico es:

$$L = y_1 \left( 0.2394 * S^{-0.4342} \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^{1.674} \right)$$

**Ecuación 91.** Ecuación potencial para determinar la longitud del resalto hidráulico en tuberías.

### 6.2.9. Análisis de disipación de energía en el Resalto Hidráulico

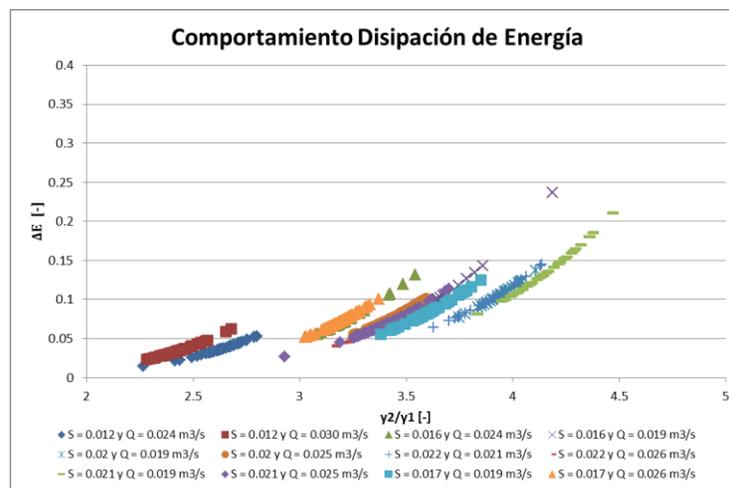
Para analizar la eficiencia del resalto hidráulico, se desarrolla el análisis de disipación de energía, el cual, con los datos obtenidos en laboratorio, se realiza comparando la variación del Número de Froude y de la relación entre las profundidades subsecuentes respecto a la disipación de Energía para diferentes caudales.



**Gráfica 77.** Comportamiento de la disipación de energía respecto al Número de Froude.

En la Gráfica 77 se observa que la relación entre el Número de Froude y la disipación de Energía es lineal y directamente proporcional. El aumento de la pendiente y del caudal afectan el valor del Número de Froude pero no afectan el valor de la disipación de Energía.

Por otra parte, al analizar el comportamiento de la disipación de energía respecto a la relación entre las profundidades subsecuentes se tiene que:



**Gráfica 78.** Comportamiento de la disipación de energía respecto a la relación entre las profundidades subsecuentes.

En la Gráfica 78 se observa que el comportamiento entre la relación de las profundidades subsecuentes y la disipación de energía también es directamente proporcional; sin embargo el crecimiento no es

lineal, sino que tiende a aumentar lento al inicio (para valores de la disipación de energía bajos) y aumentar más rápido para deltas de energía más altos.

Con las gráficas anteriores se puede establecer una clara relación entre la disipación de energía y el Número de Froude y la relación entre las profundidades subsecuentes; por lo tanto usando el método cftool de Matlab se obtiene la siguiente regresión potencial:

$$\Delta E = f\left(F_1, \frac{y_2}{y_1}\right)$$
$$\Delta E = 0.4337 \left(\frac{F_1}{F_{1max}}\right)^{8.289} \left(\frac{\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}{\left(\frac{y_1}{y_2}\right)_{max}}\right)^{-4.848}$$

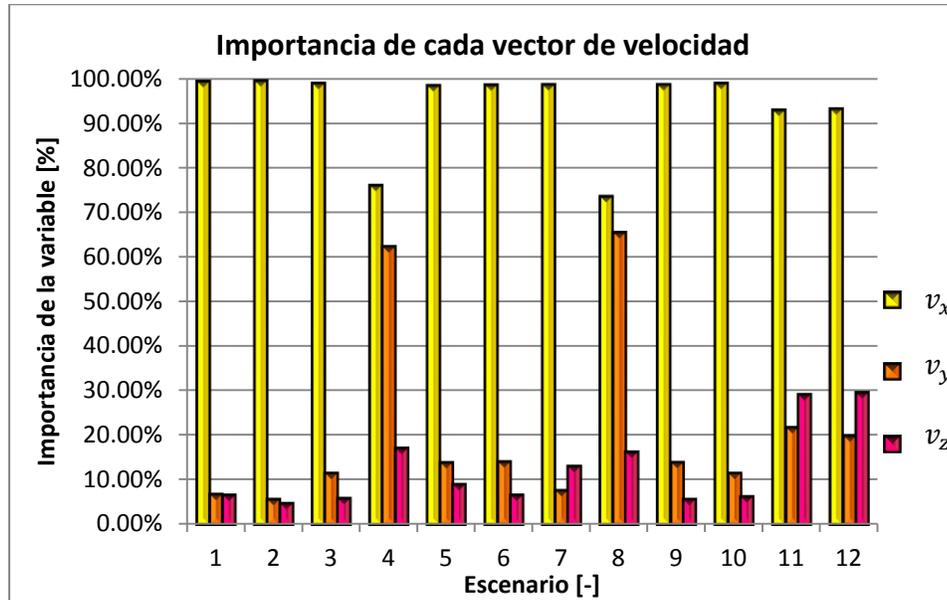
**Ecuación 92.** Ecuación para determinar el valor de la disipación de energía.

La ecuación obtenida tiene un coeficiente de determinación de 84.5%, con lo cual se establece que la Ecuación 92 representa de manera apropiada el comportamiento de la disipación de energía.

#### 6.2.10. Análisis del comportamiento de la distribución de velocidades en el resalto hidráulico

Para entender el comportamiento de la velocidad en la zona de un resalto hidráulico en la tubería, se realizaron dos tipos de análisis; el primer análisis se basa en determinar la importancia de los diferentes componentes de la velocidad ( $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ ) respecto a la magnitud total de la velocidad, con lo cual se puede definir si la dirección de cada partícula se ve afectada por los remolinos generados en el resalto. El segundo análisis evalúa si existe mayor varianza en la toma de datos medidos cerca al fondo del canal o a la superficie del resalto.

La importancia de cada uno de los componentes de la velocidad se observa en la Gráfica 79:



**Gráfica 79.** Importancia de los diferentes componentes de la velocidad.<sup>15</sup>

En la Gráfica 79 se observa que en la mayoría de casos, el vector de la velocidad en el eje x corresponde a más del 90% de la magnitud total de la velocidad, es decir, que a pesar de los remolinos generados en el resalto hidráulico, la velocidad que rige el comportamiento de las partículas es la velocidad en x.

Por otro lado, se realizó un análisis de la varianza de los datos respecto a la posición de los puntos medidos. El análisis se realizó comparando la desviación estándar de cada uno de los puntos de medición en el perfil vertical y en el perfil transversal; sin embargo, la tendencia solo se presentó en el análisis de los datos realizado en el perfil vertical.

**Tabla 39.** Comportamiento de la distribución de la velocidad en el resalto hidráulico.

Escenario	Ubicación puntos de medición	Desviación (cm/s)	Media (cm/s)	Per 20 (cm/s)	Per 80 (cm/s)	Diferencia (cm/s)
S = 0.012 Q = 0.024 m <sup>3</sup> /s	Lejos del fondo de la tubería	70.239	68.447	-9.938	121.156	131.094
	Cerca al fondo de la tubería	23.746	76.977	59.839	95.323	35.484

<sup>15</sup> Cada ID del escenario se explica en la Tabla 5.

Escenario	Ubicación puntos de medición	Desviación (cm/s)	Media (cm/s)	Per 20 (cm/s)	Per 80 (cm/s)	Diferencia (cm/s)
S = 0.016 Q = 0.019 m <sup>3</sup> /s	Lejos del fondo de la tubería	76.985	48.083	15.854	95.668	79.814
	Cerca al fondo de la tubería	54.307	62.608	37.619	100.883	63.264
S = 0.016 Q = 0.024 m <sup>3</sup> /s	Lejos del fondo de la tubería	15.211	-0.651	-21.857	-11.176	10.681
	Cerca al fondo de la tubería	19.424	-3.050	-28.315	-4.230	24.085
S = 0.017 Q = 0.019 m <sup>3</sup> /s	Lejos del fondo de la tubería	71.379	19.675	-37.135	72.133	109.268
	Cerca al fondo de la tubería	30.398	31.046	10.380	54.327	43.947
S = 0.017 Q = 0.026 m <sup>3</sup> /s	Lejos del fondo de la tubería	78.630	44.017	-20.093	94.872	114.965
	Cerca al fondo de la tubería	29.338	32.145	11.914	53.399	41.485
S = 0.020 Q = 0.020 m <sup>3</sup> /s	Lejos del fondo de la tubería	84.401	-4.648	-71.762	66.851	138.613
	Cerca al fondo de la tubería	63.650	56.851	22.004	101.663	79.660
S = 0.020 Q = 0.025 m <sup>3</sup> /s	Lejos del fondo de la tubería	16.622	0.695	-12.204	-0.311	11.894

Escenario	Ubicación puntos de medición	Desviación (cm/s)	Media (cm/s)	Per 20 (cm/s)	Per 80 (cm/s)	Diferencia (cm/s)
	Cerca al fondo de la tubería	19.189	-1.489	-14.882	-0.771	14.111
S = 0.021 Q = 0.019 m <sup>3</sup> /s	Lejos del fondo de la tubería	68.106	49.150	-1.426	100.926	102.352
	Cerca al fondo de la tubería	39.116	37.056	11.976	66.866	54.890
S = 0.021 Q = 0.025 m <sup>3</sup> /s	Lejos del fondo de la tubería	76.832	21.242	-32.576	84.583	117.159
	Cerca al fondo de la tubería	44.714	49.802	23.761	82.661	58.900
S = 0.022 Q = 0.021 m <sup>3</sup> /s	Lejos del fondo de la tubería	80.663	-11.696	-78.252	66.426	144.678
	Cerca al fondo de la tubería	95.946	30.901	-72.795	104.683	177.478
S = 0.022 Q = 0.026 m <sup>3</sup> /s	Lejos del fondo de la tubería	68.747	-14.471	-69.753	45.699	115.452
	Cerca al fondo de la tubería	79.956	30.249	-62.398	102.312	164.709

En la Tabla 39 existen 7 columnas; la primera columna hace referencia a las características del escenario evaluado; la segunda columna indica si los datos presentados en esa fila fueron medidos cerca del fondo del canal o en la parte superior del resalto; la tercera columna muestra la desviación estándar de todos los datos tomados en cada punto de medición; la cuarta columna hace referencia a la media de todos los datos tomados en cada punto de medición; la quinta y sexta columna representan el percentil 20 y 80 de

---

la muestra respectivamente, para lo cual se organizaron los datos de menor a mayor. Por último la séptima columna hace referencia a la diferencia que hay entre el percentil 80 y el percentil 20.

Con los datos obtenidos se observa que en la mayoría de los escenarios existe mayor variación de los datos en los puntos medidos lejos del fondo de la tubería, mientras que existe menor variación de los datos en aquellos puntos medidos al fondo de la tubería, esto se comprueba al observar que existe mayor diferencia entre el percentil 20 y 80 en aquellos puntos medidos cerca de la superficie del resalto que aquellos puntos medidos en el fondo de la tubería. Éste comportamiento es similar al que ocurre en la distribución de la velocidad en tuberías fluyendo a presión, donde la velocidad en el fondo de la tubería es igual a cero.

## 7. Conclusiones

---

- En todas las metodologías estudiadas, se observa que siempre que aumente el valor en el Número de Froude, la relación entre las profundidades subsecuentes será mayor.
- El valor del Número de Froude para pendientes más altas es mayor, lo cual también aumenta la relación entre las profundidades subsecuentes en el resalto.
- Según las metodologías estudiadas, a mayor Número de Froude, la longitud del resalto será mayor.
- Para las pendientes del montaje menores a 0.010, la estabilidad del resalto es muy baja, y no se puede ubicar exactamente en la zona requerida para la medición; además los resaltos hidráulicos son muy inestables y no se puede inferir claramente cuál es la longitud del resalto, ya que no existe una clara diferencia entre la profundidad aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico. Esto ocurre ya que el Número de Froude aguas arriba del resalto es muy bajo, y no permite generar la fuerza suficiente para presentar un resalto hidráulico estable.
- Cuando las pendientes en el resalto son mayores a 0.010, pero el caudal es menor o igual a 0.01 m<sup>3</sup>/s, el resalto también es débil y no se puede inferir la longitud ni las profundidades subsecuentes en el resalto claramente.
- Para caudales mayores a 0.05 m<sup>3</sup>/s, el perfil del resalto hidráulico empieza a generar muchas ondas en la zona subcrítica; y el resalto deja de ser estable ya que la profundidad aguas abajo del resalto se acerca a la zona de flujo cuasicrítico.
- Entre los resultados obtenidos hasta los datos medidos ( $S \leq 0.019$ ), se observa una clara tendencia a una variación en el comportamiento de la relación entre las profundidades subsecuentes cuando se alcanza el máximo Número de Froude por cada pendiente. Es decir, cuando las relaciones entre las profundidades del resalto, son menores al máximo Número de Froude, la diferencia entre la profundidad aguas abajo del resalto y la profundidad aguas arriba aumenta con el aumento en el Número de Froude; mientras que en el valor máximo del Número de Froude, la diferencia aumenta a medida que el Número de Froude disminuye.
- Los resultados de las longitudes permiten inferir que a mayor pendiente, aumenta el valor en los Número de Froude, y la longitud del resalto aumenta con un aumento muy leve en este número.
- El comportamiento de la profundidad subsecuente aguas abajo del resalto hidráulico depende del caudal, de la pendiente y de la profundidad subsecuente aguas arriba.
- La longitud del resalto hidráulico depende de las profundidades subsecuentes del resalto y de la pendiente medida.
- La disipación de energía depende del Número de Froude y de la relación entre las profundidades subsecuentes, lo cual sucede en los resaltos hidráulicos que ocurren en canales rectangulares.
- La velocidad principal que rige la dirección de las partículas ubicadas en los remolinos del resalto hidráulico es la velocidad en x.
- La distribución de velocidades cercana al fondo del canal es más estable que la presentada en puntos cercanos a la superficie del resalto, donde se presenta mayor turbulencia.

---

## 8. Recomendaciones

### 8.1. Recomendaciones de diseño

A continuación se presentarán algunas recomendaciones para el diseño de tuberías de alcantarillado de 250 mm de diámetro y que presenten el riesgo de la formación de un resalto hidráulico, con el fin de evitar el fenómeno de sobrecarga en la tubería:

- Para un diámetro de 250 mm y cualquier pendiente, se deben evitar caudales mayores a 50 L/s.
- Para pendientes menores a 1.5 %, se pueden permitir caudales menores a 50 L/s.
- Para pendientes entre 1.5 % y 1.9 %, no se deben permitir caudales mayores a 20 L/s.
- Para pendientes mayores a 2 %, la tubería se presuriza con caudales iguales o mayores a 20 L/s.
- Con pendientes superiores a 2%, se debe evitar cualquier obstáculo en el flujo aguas abajo de la tubería, ya que la velocidad del flujo hace que se generen resaltos hidráulicos con caudales bajos.

### 8.2. Recomendaciones para futuras pruebas

Para estudiar el comportamiento de resaltos hidráulicos se recomienda:

- Realizar un montaje que permita evaluar pendientes mayores a 3%.
- Variar el diámetro de la tubería con el fin de observar cuánto varía la relación de llenado en la formación del resalto hidráulico.
- Realizar un montaje que permita forzar la profundidad aguas arriba del resalto con una compuerta ubicada aguas arriba.
- Medir las direcciones de los vectores de velocidad por medio de mediciones instantáneas.

## 9. Glosario

---

**Disipación de Energía:** Porcentaje de energía que fue disipado a causa del resalto hidráulico. Su cálculo se realiza por medio de la Ecuación 93.:

$$\% = \frac{E_1 - E_2}{E_1}$$

**Ecuación 93. Cálculo disipación de Energía**

**Flujo Aguas Abajo:** Profundidad del flujo que se encuentra después del resalto hidráulico.

**Flujo Aguas Arriba:** Profundidad del flujo que se encuentra antes del resalto hidráulico.

**Flujo Crítico:** El flujo crítico se presenta cuando las fuerzas inerciales y las fuerzas de gravedad son iguales, por lo tanto el Número de Froude es igual a 1.0. Se caracteriza por ser un flujo inestable.

**Flujo Subcrítico:** Flujo caracterizado por tener profundidades altas, velocidades bajas, pérdidas por fricción bajas y Números de Froude inferiores a 1.0. Además las fuerzas gravitacionales son mayores a las fuerzas inerciales.

**Flujo Supercrítico:** Flujo caracterizado por tener profundidades bajas, velocidades altas pérdidas por fricción altas y Números de Froude mayores a 1.0. Además las fuerzas inerciales son mayores a las fuerzas gravitacionales.

**Línea de Gradiente Hidráulico:** Línea que indica la altura del flujo desde el datum, es decir, teniendo en cuenta la energía potencial y de presión.

**Número de Froude:** Valor adimensional que permite determinar a partir de las fuerzas gravitacionales y las fuerzas inerciales el tipo de flujo: supercrítico, crítico o subcrítico.

**Piezómetro:** Instrumento para la medición de pérdidas de altura del flujo como consecuencia de fricción, obstrucciones, pérdidas menores, etc.

**Profundidad Subsecuente:** Profundidad aguas abajo del resalto.

**Relación de llenado:** Porcentaje de llenado de la tubería, es decir, la altura del flujo dividida entre el diámetro de la tubería.

**Resalto Hidráulico:** Fenómeno generado por el cambio de flujo supercrítico a flujo subcrítico.

**Tubería presurizada:** Cuando la profundidad del flujo es mayor al diámetro de la tubería.

## 10. Bibliografía

---

- Akan, A. O. (2006). *OPEN CHANNEL HYDRAULICS*. Canada: ELSEVIER.
- Banner Engineering. (n.d.). *U - GAGE T30 Series with Analog and Discrete Outputs*. Minneapolis.
- CIVIL ENGINEERING PORTAL. (2011). *What are the effects of Hydraulic Jump?* Retrieved Noviembre 28, 2011, from <http://www.engineeringcivil.com/what-are-the-effects-of-hydraulic-jump.html>
- FHWA. (2006). Hydraulic Design of Energy Dissipators for Culverts and Channels. *Hydraulic Engineering Circular*, 6-1 a 6-14.
- French, R. H. (2007). The Momentum Principle. In R. H. French, *Open Channel Hydraulics* (pp. 93 - 111). Colorado, USA: Copyright.
- Gargano, R., & Hager, W. H. (2002). Undular Hydraulic Jump in Circular Conduits. *JOURNAL OF HYDRAULIC ENGINEERING*, 1008-1013.
- Ghamry, H. K., Shames, A., & Branch, F. (2002). *Hydraulic Jumps in Circular Conduits*. Québec: CSCE.
- Gonzales Rodríguez, M. (1992). *Estudio Experimental de Flujos Disipativos: I. Resalto Hidráulico*. Cantabria: Universidad de Cantabria.
- Hager, W. H. (1990). CRITICAL FLOW. In W. Hager, *Wastewater Hydraulics* (pp. 137 - 172). Berlin: Springer.
- Kindsvater, E. W. (1938). Hydraulic Jump In Enclosed Conduits. *Engineering News Record*, 815 - 817.
- Lopardo, R. (2012). INTERNAL FLOW OF FREE HYDRAULIC JUMP IN STILLING BASINS. *4th IAHR International Symposium on Hydraulic Structures*, 8.
- Montaño Luna, L. E. (2012). *Diseño y construcción de un modelo para estudiar el comportamiento de resalto hidráulicos en tuberías parcialmente llenas de sección circular, con Números de Froude supercríticos menores a 4*. Bogotá.
- Rajaratnam, N. (1965). Hydraulic Jump in Horizontal Conduits. *WATER POWER*, 80 - 83.
- Robertson, J. M., & Kalinske, A. A. (1943). Closed Conduit Flow. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1435-1447.

- 
- Silvester, R. (1964). HYDRAULIC JUMP IN ALL SHAPES OF HORIZONTAL CHANNELS. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 23 - 55.
- SMITH, C. D., & CHEN, W. (1989). The hydraulic jump in a steeply sloping square conduit. *JOURNAL OF HYDRAULIC RESEARCH*, 385 - 399.
- SonTek. (2012, Octubre). SonTek-IQ Series. San Diego, USA.
- Stahl, H., & Hager, W. H. (1999). Hydraulic jump in circular pipes. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 368 -373.
- Sturm, T. W. (2010). *Open Channel Hydraulics*. Singapore: McGraw-Hill.

---

## 11. Anexos

---

1. Programación en VBA de Excel para calcular la profundidad normal del flujo.
2. Programación en VBA de Excel para calcular la profundidad subsecuente del resalto hidráulico mediante el método planteado por Silvester.
3. Programación en VBA de Excel para calcular la profundidad subsecuente del resalto hidráulico mediante el método planteado por French.
4. Programación en VBA de Excel para calcular la profundidad subsecuente del resalto hidráulico mediante el método planteado por Hager.
5. Programación en VBA de Excel para calcular la profundidad subsecuente del resalto hidráulico mediante el método planteado por FHWA.
6. Mapa de la ubicación del montaje
7. Plano de la tubería en Perfil
8. Plano de la tubería en Planta
9. Plano en Autocad 3D de la tubería

## 11.1. Cálculo de la profundidad normal del flujo

Sub caudal ()

$d = 0.242$  “Diámetro de la tubería”

$k_s = 0.0000015$  “ $k_s$  del acrílico”

$\nu = 0.00000114$  “Viscosidad”

$\Pi = 3.141592654$  “Valor del Número de Pi”

suma = 0.01

$s = 0.005$

$e = 0$

For  $i = 1$  To 6

For  $w = 1$  To 308

$y_d = 0.929$  “Porcentaje con el cual fluye el máximo caudal”

$y_{d0} = 0.01$  “Porcentaje con el cual fluye una altura mínima”

$y_{p1} = 0$

For  $j = 1$  To 90

$q_e = \text{Cells}(e + w + 4, 6)$  “Caudal para el cual se quiere encontrar la profundidad normal”

$y_{n0} = d * y_{d0}$  “Cálculo de la profundidad normal con  $y_{d0}$ ”

“Cálculo de los parámetros hidráulicos para el porcentaje  $y_{d0}$ ”

$teta0 = \Pi + 2 * \text{WorksheetFunction.Asin}((y_{n0} - (0.5 * d)) / (0.5 * d))$

$a_0 = ((d^2) / (8)) * (teta0 - \text{Sin}(teta0))$  “Cálculo del área mojada”

$p_0 = (d * teta0) / 2$  “Cálculo del perímetro mojado”

$r_0 = a_0 / p_0$  “Cálculo del radio hidráulico”

“Cálculo de la velocidad”

$vel_0 = -2 * ((8 * 9.81 * r_0 * s)^{0.5}) * \text{WorksheetFunction.Log10}((k_s / (14.8 * r_0)) + ((2.51 * \nu) / (4 * r_0 * ((8 * 9.81 * r_0 * s)^{0.5}))))$

$q_0 = (vel_0 * a_0) - q_e$  “Cálculo del error”

$re = (d * vel_0) / \nu$  “Cálculo del Número de Reynolds”

“Ancho de la superficie”

$$\text{ancho} = d * \text{Cos}(\text{WorksheetFunction.Asin}((y_{n0} - (0.5 * d)) / (0.5 * d)))$$

$$\text{prof} = a_0 / \text{ancho} \quad \text{“Cálculo de la profundidad hidráulica”}$$

$$\text{froude} = (\text{vel}_0) / ((9.81 * \text{prof}) ^ (0.5)) \quad \text{“Cálculo del Número de Froude”}$$

*“Cálculo de los parámetros hidráulicos para el porcentaje yd”*

$$y_n = d * y_d$$

$$\text{teta} = \text{Pi} + 2 * \text{WorksheetFunction.Asin}((y_n - (0.5 * d)) / (0.5 * d))$$

$$a = ((d ^ 2) / (8)) * (\text{teta} - \text{Sin}(\text{teta}))$$

$$p = (d * \text{teta}) / 2$$

$$r = a / p$$

$$\text{vel} = -2 * ((8 * 9.81 * r * s) ^ 0.5) * \text{WorksheetFunction.Log10}((k_s / (14.8 * r)) + ((2.51 * \text{nu}) / (4 * r * ((8 * 9.81 * r * s) ^ (0.5)))))$$

$$q = (\text{vel} * a) - q_e$$

*“Cálculo de los parámetros hidráulicos para el promedio de las profundidades”*

$$y_{dp} = (y_d + y_{d0}) / 2$$

$$y_{np} = d * y_{dp}$$

$$\text{tetap} = \text{Pi} + 2 * \text{WorksheetFunction.Asin}((y_{np} - (0.5 * d)) / (0.5 * d))$$

$$a_p = ((d ^ 2) / (8)) * (\text{tetap} - \text{Sin}(\text{tetap}))$$

$$p_p = (d * \text{tetap}) / 2$$

$$r_p = a_p / p_p$$

$$\text{vel}_p = -2 * ((8 * 9.81 * r_p * s) ^ 0.5) * \text{WorksheetFunction.Log10}((k_s / (14.8 * r_p)) + ((2.51 * \text{nu}) / (4 * r_p * ((8 * 9.81 * r_p * s) ^ (0.5)))))$$

$$q_p = (\text{vel}_p * a_p) - q_e$$

*“Aplicación del método de la bisección”*

If  $(q_p * q) < 0$  Then

$$y_{d0} = y_{dp}$$

Else

$$y_{d0} = y_d$$

End If

If  $(q_p * q_0) < 0$  Then

---

```
    yd = ydp
Else
    yd = yd
End If

If (Abs((ydp - yp1) / (ydp))) < 0.0000001 Then
    GoTo 100
End If

yp1 = ydp
Next
100
Next
s = 0.005 + s
e = 308 + e
Next
End Sub
```

## 11.2. Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico mediante el método desarrollado por Silvester

Sub subs()

```

For i = 1 To 10          "Se realizará un ciclo con 10 iteraciones"
  F = Cells(i + 8, 18)  "Número de Froude"
  M1 = Cells(i + 8, 10) "Área mojada para la altura aguas arriba"
  d = Cells(i + 8, 6)   "Diámetro"
  d1 = Cells(i + 8, 8)  "Altura aguas arriba"
  k1 = Cells(i + 8, 19) "Proporción de la profundidad del flujo"
  yi = d1 + 0.001      "Altura minima del flujo"
  yf = d                "Altura maxima del flujo"
  mtk = 10             "Error"
  A = F ^ 2 + k1       "Parámetro que establece si la aproximación es correcta"
  While mtk > 0.0001   "Contador que finaliza cuando el error es menor a 0.0001"
    If yi > d Then      "Si yi es mayor al diámetro"
      "Cálculo de teta"
      tetai = WorksheetFunction.Pi + 2 * WorksheetFunction.Asin((d - (0.5 * d)) / (0.5 * d))
      "Cálculo del área"
      areai = ((d ^ 2) / 8) * (tetai - Sin(tetai))
      "Cálculo del error"
      Ai = ((areai / M1) * ((yi / d1) - (0.5 * (d / d1)))) + ((F ^ 2) * (M1 / (areai))) - A
    Else                "Si yi es menor al diámetro"
      tetai = WorksheetFunction.Pi + 2 * WorksheetFunction.Asin((yi - (0.5 * d)) / (0.5 * d))
      area1 = ((d ^ 2) / 8) * (tetai - Sin(tetai))
      Ai = (((0.128 * (yi / d) ^ 2) - (0.047 * (yi / d)) + 0.416) * (((yi / (d1)) * ((area1) / (M1)))) + ((F ^ 2) * ((M1) / (area1))) - A
    End If
  End While
End For

```

If  $y_f > d$  Then                      *“Si  $y_f$  es mayor al diámetro”*

*“Cálculo de teta”*

$$\text{tetaf} = \text{WorksheetFunction.Pi} + 2 * \text{WorksheetFunction.Asin}((d - (0.5 * d)) / (0.5 * d))$$

*“Cálculo del área”*

$$\text{areaf} = ((d^2) / 8) * (\text{tetaf} - \text{Sin}(\text{tetaf}))$$

*“Cálculo del error”*

$$A_f = ((\text{areaf} / M_1) * ((y_f / d_1) - (0.5 * (d / d_1)))) + ((F^2) * (M_1 / (\text{areaf}))) - A$$

Else

$$\text{tetaf} = \text{WorksheetFunction.Pi} + 2 * \text{WorksheetFunction.Asin}((y_f - (0.5 * d)) / (0.5 * d))$$

$$\text{areaf} = ((d^2) / 8) * (\text{tetaf} - \text{Sin}(\text{tetaf}))$$

$$A_f = (((0.128 * (y_f / d)^2) - (0.047 * (y_f / d)) + 0.416) * (((y_f) / (d_1)) * ((\text{areaf}) / (M_1)))) + ((F^2) * (M_1 / (\text{areaf}))) - A$$

End If

If  $A_f < 0$  Then                      *“En aquellos casos en que las dos condiciones sean menores a 0”*

$$\Delta = 0.001 \quad \text{“Se aumenta un delta a la profundidad subsecuente aguas abajo”}$$

While  $A_f < 0$

*“Se recalcula el parámetro que nos determina el error”*

$$A_f = ((\text{areaf} / M_1) * (((y_f + \Delta) / d_1) - (0.5 * (d / d_1)))) + ((F^2) * (M_1 / (\text{areaf}))) -$$

A

$$y_f = y_f + \Delta \quad \text{“Se aumenta la profundidad subsecuente aguas abajo del resalto hasta que  $A_f$  sea mayor a 0”}$$

Wend

End If

$$y_p = 0.5 * (y_i + y_f) \quad \text{“Se estima la altura promedio”}$$

*“Se calcula teta, area y el parámetro para determinar el error de la altura promedio”*

If  $y_p > d$  Then

$$\text{tetap} = \text{WorksheetFunction.Pi} + 2 * \text{WorksheetFunction.Asin}((d - (0.5 * d)) / (0.5 * d))$$

$$\text{areap} = ((d^2) / 8) * (\text{tetap} - \text{Sin}(\text{tetap}))$$

$$A_p = ((\text{areap} / M_1) * ((y_p / d_1) - (0.5 * (d / d_1)))) + ((F^2) * (M_1 / (\text{areap}))) - A$$

---

```
Else
    tetap = WorksheetFunction.Pi + 2 * WorksheetFunction.Asin((yp - (0.5 * d)) / (0.5 * d))
    areap = ((d ^ 2) / 8) * (tetap - Sin(tetap))
    Ap = (((0.128 * (yp / d) ^ 2) - (0.047 * (yp / d)) + 0.416) * ((yp) / (d1)) * ((areap) /
(M1)))) + ((F ^ 2) * ((M1) / (areap))) - A
End If
“Se procede a implementar el método de la bisección”
If Ai * Ap < 0 Then
    yi = yi
Else
    yi = yp
End If
If Af * Ap < 0 Then
    yf = yf
Else
    yf = yp
End If
mtk = (Abs(yf - yi) / (yf))
Wend
Cells(i + 8, 20) = yp      “Mostrar cuál es el valor de y en la hoja de Excel”
Next
End Sub
```

### 11.3. Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico por el Método desarrollado por French<sup>16</sup>

Sub French0019()

For i = 1 To 10

q = Caudal

g = 9.81

y1 = altura aguas arriba

yi = y1 + 0.01

d = Diámetro

r = d / 2

yf = d

mtk = 10

M1 = Momento 1

While mtk > 0.0001

tetai = WorksheetFunction.Pi() + (2 \* WorksheetFunction.Asin((yi - (0.5 \* d)) / (0.5 \* d)))

areai = ((d ^ 2) / 8) \* (tetai - Sin(tetai))

zi = yi - 0.5 \* d

zgorroi = (-2 \* (((r ^ 2) - (zi ^ 2)) ^ (3 / 2))) / (3 \* areai)

zpromi = yi - (r + zgorroi)

m2i = ((q ^ 2) / (g \* areai)) + (zpromi \* areai)

mi = ((q ^ 2) / (g \* areai)) + (zpromi \* areai) - M1

tetaf = WorksheetFunction.Pi() + (2 \* WorksheetFunction.Asin((yf - (0.5 \* d)) / (0.5 \* d)))

areaf = ((d ^ 2) / 8) \* (tetaf - Sin(tetaf))

zf = yf - 0.5 \* d

zgorrof = (-2 \* (((r ^ 2) - (zf ^ 2)) ^ (3 / 2))) / (3 \* areaf)

zpromf = yf - (r + zgorrof)

m2f = ((q ^ 2) / (g \* areaf)) + (zpromf \* areaf)

<sup>16</sup> Los comentarios del código se presentan en el cálculo de la profundidad subsecuente del resalto mediante el método desarrollado por Silvester (Numeral 11.2)

---

```
mf = ((q ^ 2) / (g * areaf)) + (zpromf * areaf) - M1
yp = 0.5 * (yi + yf)
tetap = WorksheetFunction.Pi() + (2 * WorksheetFunction.Asin((yp - (0.5 * d)) / (0.5 *
d)))
areap = ((d ^ 2) / 8) * (tetap - Sin(tetap))
zp = yp - 0.5 * d
zgorrop = (-2 * (((r ^ 2) - (zp ^ 2)) ^ (3 / 2))) / (3 * areap)
zpromp = yp - (r + zgorrop)
m2p = ((q ^ 2) / (g * areap)) + (zpromp * areap)
mp = ((q ^ 2) / (g * areap)) + (zpromp * areap) - M1
If mi * mp < 0 Then
    yi = yi
Else
    yi = yp
End If
If mf * mp < 0 Then
    yf = yf
Else
    yf = yp
End If
mtk = Abs((yf - yi) / (yf))
Wend
Next
End Sub
```

#### 11.4. Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico por el Método desarrollado por Hager<sup>17</sup>

```
Sub Hager()  
For i = 1 To 10  
y1 = Cells(8 + i, 8)  
F1 = Cells(8 + i, 18)  
A = Cells(8 + i, 19)  
d = Cells(8 + i, 6)  
mtk = 10  
y2i = y1 + 0.01  
y2f = d  
While mtk > 0.00001  
yp = 0.5 * (y2i + y2f)  
Ai = ((y2i / y1) ^ 2.5) + (2 * (F1 ^ 2) * ((y2i / y1) ^ -1.5)) - A  
Af = ((y2f / y1) ^ 2.5) + (2 * (F1 ^ 2) * ((y2f / y1) ^ -1.5)) - A  
Ap = ((yp / y1) ^ 2.5) + (2 * (F1 ^ 2) * ((yp / y1) ^ -1.5)) - A  
If Ai * Af > 0 Then  
Cells(i + 8, 20) = "Presurizado"  
GoTo 100  
End If  
If Ap * Af < 0 Then  
y2i = yp  
Else  
y2i = y2i  
End If
```

<sup>17</sup> Los comentarios del código se presentan en el cálculo de la profundidad subsecuente del resalto mediante el método desarrollado por Silvester (Numeral 11.2)

---

```
If Ap * Ai < 0 Then
    y2f = yp
Else
    y2f = y2f
End If
mtk = Abs((y2i - y2f) / y2f)
Wend
Cells(i + 8, 20) = y2i
100
Next
End Sub
```

### 11.5. Cálculo de la profundidad subsecuente del resalto hidráulico por el Método desarrollado por FHWA.<sup>18</sup>

Sub FWHA()

For i = 1 To 9

F1 = Cells(i + 8, 19)

k1 = Cells(i + 8, 20)

y1 = Cells(i + 8, 9)

c1 = Cells(i + 8, 21)

d = Cells(i + 8, 7)

yi = y1 + 0.01

yf = d

mtk = 10

A = k1 + F1 ^ 2

While mtk > 0.00001

If yi > d Then

k2i = (0.128 \* (yi / d) ^ 2) - (0.0471 \* (yi / d)) + 0.416

c2i = (-1.1954 \* ((yi / d) ^ 3)) + (1.7406 \* (yi / d) ^ 2) + 0.2033 \* (yi / d) + 0.0082

Ai = ((yi \* c2i) / (y1 \* c1)) - (0.5 \* ((c2i \* d) / (c1 \* y1))) + ((F1 ^ 2) \* (c1 / c2i)) - A

Else

k2i = (0.128 \* (yi / d) ^ 2) - (0.0471 \* (yi / d)) + 0.416

c2i = (-1.1954 \* ((yi / d) ^ 3)) + (1.7406 \* (yi / d) ^ 2) + 0.2033 \* (yi / d) + 0.0082

Ai = ((k2i \* yi \* c2i) / (y1 \* c1)) + ((F1 ^ 2) \* (c1 / c2i)) - A

End If

If yf > d Then

k2f = (0.128 \* (yf / d) ^ 2) - (0.0471 \* (yf / d)) + 0.416

c2f = (-1.1954 \* ((yf / d) ^ 3)) + (1.7406 \* (yf / d) ^ 2) + 0.2033 \* (yf / d) + 0.0082

Af = ((yf \* c2f) / (y1 \* c1)) - (0.5 \* ((c2f \* d) / (c1 \* y1))) + ((F1 ^ 2) \* (c1 / c2f)) - A

<sup>18</sup> Los comentarios del código se presentan en el cálculo de la profundidad subsecuente del resalto mediante el método desarrollado por Silvester (Numeral 11.2)

Else

$$k2f = (0.128 * (yf / d) ^ 2) - (0.0471 * (yf / d)) + 0.416$$

$$c2f = (-1.1954 * ((yf / d) ^ 3)) + (1.7406 * (yf / d) ^ 2) + 0.2033 * (yf / d) + 0.0082$$

$$Af = ((k2f * yf * c2f) / (y1 * c1)) + ((F1 ^ 2) * (c1 / c2f)) - A$$

End If

If Af < 0 Then

$$\Delta = 0.001$$

While Af < 0

$$Af = ((yf * c2f) / (y1 * c1)) - (0.5 * ((c2f * d) / (c1 * y1))) + ((F1 ^ 2) * (c1 / c2f)) - A$$

$$yf = yf + \Delta$$

Wend

End If

$$yp = 0.5 * (yi + yf)$$

If yp > d Then

$$k2p = (0.128 * (yp / d) ^ 2) - (0.0471 * (yp / d)) + 0.416$$

$$c2p = (-1.1954 * ((yp / d) ^ 3)) + (1.7406 * (yp / d) ^ 2) + 0.2033 * (yp / d) + 0.0082$$

$$Ap = ((yp * c2p) / (y1 * c1)) - (0.5 * ((c2p * d) / (c1 * y1))) + ((F1 ^ 2) * (c1 / c2p)) - A$$

Else

$$k2p = (0.128 * (yp / d) ^ 2) - (0.0471 * (yp / d)) + 0.416$$

$$c2p = (-1.1954 * ((yp / d) ^ 3)) + (1.7406 * (yp / d) ^ 2) + 0.2033 * (yp / d) + 0.0082$$

$$Ap = ((k2p * yp * c2p) / (y1 * c1)) + ((F1 ^ 2) * (c1 / c2p)) - A$$

End If

If Ap \* Af < 0 Then

$$yi = yp$$

Else

---

```
    yi = yi
End If
If Ap * Ai < 0 Then
    yf = yp
Else
    yf = yf
End If
mtk = Abs((yf - yi) / (yf))
Wend
Cells(i + 8, 23) = yp
Next
End Sub
```