

Universidad de los Andes  
Facultad De Ingeniería  
Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental



**Proyecto de grado de Ingeniería Civil**

**Resaltos hidráulicos en tuberías lisas de sección circular  
fluyendo parcialmente llenas, con números de Froude inferiores a  
4.0**

Preparado por:  
Ing. Juan Camilo Franco Agudelo

Asesor:  
Ing. Juan Saldarriaga

**Informe Final Proyecto de grado**

**Bogotá, Julio 2014**

*“La disciplina es la parte más importante del éxito. Usted tiene que tener una actitud de constancia, disciplina, esfuerzo y perseverancia inalterables, para llegar al éxito y que éste perdure”*

Truman Streckfus Persons

## **Agradecimientos**

Hoy doy gracias a Dios por haberme permitido este logro profesional, a la Universidad de los Andes que me formó como ingeniero civil, a mi papá Jorge Orlando Franco y a mi mamá Julieta Agudelo por su apoyo incondicional en todo momento, al ingeniero Juan Guillermo Saldarriaga por ser mi asesor y guiarme semana a semana en este proceso tan arduo, mostrándome el camino adecuado y la información necesaria para culminar de manera exitosa mi proyecto de grado, a John Calvo y a Gloria Moscote que siempre estuvieron muy pendientes de todo mi proceso, al excelente grupo de personas que me acompañaron en este camino, que me ayudaron a desarrollar este proyecto que con esfuerzo y dedicación se logró sacar adelante, y por último a cada uno de los amigos y compañeros que compartieron esta gran experiencia y que seguirán siendo apoyo incondicional en el desarrollo profesional y en el logro de nuevos e importantes proyectos.

## Tabla de contenido

Agradecimientos .....	II
Índice de Tablas .....	III
Índice de gráficas.....	IV
Índice de Ecuaciones.....	VII
1. Introducción .....	11
2. Antecedentes de modelos realizados a través del tiempo sobre el fenómeno del resalto hidráulico.....	14
Kindsvater y Lane (1938) .....	14
Kalinske y Robertson (1943) .....	15
Richard Silvester (1964).....	17
Estudio de canales cerrados (tuberías).....	18
Rajaratnam (1965) .....	21
C. Smith y W. Chen (1989).....	23
Willi H. Hager y Helmut Stahl (1999) .....	28
Steven Michell (2002).....	32
2.1 Canales rectangulares .....	33
2.2 Canales trapezoidales .....	33
2.3 Canales circulares .....	35
2.4 Resultados obtenidos de todas las secciones.....	36
Journal of Hydraulic Research (2006) .....	40
2.1 Estructura del resalto hidráulico .....	40
2.2 Ecuaciones recomendadas en resaltos hidráulicos.....	41
2.3 Condiciones del resalto.....	42
2.4 Ecuación del resalto hidráulico en canales circulares y en forma de U. ....	45
2.4.1 Ecuación del resalto hidráulico en canales circulares .....	46
2.4.2 Ecuación del resalto hidráulico en canales en forma de U .....	48
2.5 Resultados y conclusiones.....	48
3. Marco Teórico.....	53
Resalto hidráulico.....	53
3.1 Tipos de resaltos hidráulicos.....	54

---

3.2 Características básicas del resalto.....	56
4. Diseño y Construcción de un Modelo para Estudiar el Comportamiento de Resaltos Hidráulicos en Tuberías Parcialmente Llenas de Sección Circular, con Números de Froude menores a 4 .....	59
Diseño del modelo.....	59
Resultados obtenidos.....	61
5. Modelo físico .....	66
Fotos del modelo.....	66
Precisión de los instrumentos.....	73
5.1 Caudalímetro .....	73
5.2 Sensores de profundidades .....	74
6. Resultados Experimentales .....	76
7. Conclusiones .....	97
8. Glosario .....	98
9. Bibliografía.....	99
10. Anexos.....	101
Anexo I.....	101
Anexo II.....	113
Anexo III.....	116
Anexo IV .....	117

## Índice de Tablas

Tabla 1. Datos típicos para los ensayos (Kalinske, 1943). .....	16
Tabla 2. Resultados de números de Froude aguas arriba para diferentes relaciones de llenado (Chen, 1989). .....	28
Tabla 3. Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 50 % (Montaño, 2012). .....	60
Tabla 4. Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 85 % (Montaño, 2012). .....	60
Tabla 5. Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 92.9 % (Montaño, 2012). .....	61
Tabla 6. Mediciones realizadas en el laboratorio. ....	66
Tabla 7. Incertidumbre del sensor de profundidades U-GAGE T30 (BANNER, 2013).....	75
Para la toma de datos de este informe se hace referencia a la Tabla 8. Mediciones realizadas en el laboratorio, donde se muestra que se utilizaron cuatro pendientes distintas: 0,011- 0,016- 0,018 y 0,025. En cada una de estas pendientes se trabajó con 35 caudales diferentes, ocasionando el fenómeno del resalto hidráulico mediante la compuerta ubicada aguas abajo. Para ver las tablas de los resultados obtenidos ver ANEXO I. La obtención de los resultados se obtuvo de las siguientes ecuaciones: .....	76
Tabla 9. Caudales máximos que resiste cada pendiente hasta su presurización y hasta una relación de llenado del 86%. .....	88
Tabla 10. Resultados obtenidos para la pendiente 0,011.....	101
Tabla 11. Resultados obtenidos para la pendiente 0,016.....	104
Tabla 12. Resultados obtenidos para la pendiente 0,018.....	107
Tabla 13. Resultados obtenidos para la pendiente 0,025.....	110
Tabla 14. Datos de Entrada para calcular ecuación de Darcy Weisbach. ....	113
Tabla 15. Ecuaciones teóricas utilizando ley de Darcy Weisbach. ....	113
Tabla 16. Ecuaciones teóricas utilizando ley de Darcy Weisbach. ....	114
Tabla 17. Datos de Entrada para calcular ecuación de Darcy Weisbach. ....	114
Tabla 18. Ecuaciones teóricas utilizando ley de Darcy Weisbach. ....	115
Tabla 19. Comparación de resultados teóricos con resultados experimentales en profundidades de flujo aguas abajo para todas las pendientes. ....	116

## Índice de gráficas

Gráfica 1. Montaje realizado por Kindsvater y Lane (Kindsvater, 1938). .....	14
Gráfica 2. Alturas versus Caudales (Kindsvater, 1938). .....	15
Gráfica 3. Montaje de Kalinske y Robertson (Kalinske, 1943). .....	15
Gráfica 4. Valores críticos experimentales del número de Froude contra la relación de llenado (Kalinske, 1943). .....	16
Gráfica 5. Datos obtenidos para los diferentes tipos de secciones (Silvester, HYDRAULIC JUMP IN ALL SHAPES OF HORIZONTAL CHANNELS., 1964). .....	20
Gráfica 6. Resultados obtenidos de la variación de alturas versus la longitud del resalto (Silvester, HYDRAULIC JUMP IN ALL SHAPES OF HORIZONTAL CHANNELS., 1964). .....	21
Gráfica 7. Relación de llenado versus número de Froude aguas arriba (Rajaratnam, 1965). .....	22
Gráfica 8. Comportamiento del resalto hidráulico dentro de la tubería (Chen, 1989). .....	23
Gráfica 9. Longitud del resalto hidráulico versus el número de Froude aguas arriba (Chen, 1989). .....	27
Gráfica 10. Profundidades subsecuentes según el número de Froude (Hager, 1999). .....	30
Gráfica 11. Tipo de resalto ondular con números de Froude < 1.5 (Hager, 1999). .....	31
Gráfica 12. Tipo de resalto ondular con números de Froude entre (1.5-2) (Hager, 1999). .....	31
Gráfica 13. Tipo de resalto ondular con números de Froude entre (2-4.1) (Hager, 1999). .....	31
Gráfica 14. Tipo de resalto ondular con números de Froude > 6.5 (Hager, 1999). .....	32
Gráfica 15. Gráfica de elevación del resalto hidráulico (Michell, 2008) .....	33
Gráfica 16. Definición de secciones para canal trapezoidal (Michell, 2008). .....	34
Gráfica 17. Definición de ángulo para tuberías circulares parcialmente llenas (Michell, 2008). .....	35
Gráfica 18. Relación de alturas VS Froude 1 del canal trapezoidal (Michell, 2008). .....	37
Gráfica 19. Relación de alturas VS Froude 1 de la tubería circular (Michell, 2008). .....	37
Gráfica 20. Comparación de datos teóricos y experimentales del canal trapezoidal (Michell, 2008). .....	38
Gráfica 21. Pérdidas de energía contra el número de Froude 1 en canales trapezoidales. ....	39
Gráfica 22. Pérdidas de energía contra el número de Froude 1 en tuberías circulares. ....	40
Gráfica 23. Partes que componen un resalto hidráulico (Francis, 2006). .....	41
Gráfica 24. Sección circular y en forma de U que se van a trabajar en el experimento (Francis, 2006). .....	41
Gráfica 25. Profundidades subsecuentes versus en número de Froude aguas arriba en canales circulares (Francis, 2006). .....	49
Gráfica 26. Longitud del resalto versus en número de Froude aguas arriba en canales circulares (Francis, 2006). .....	50
Gráfica 27. Profundidades subsecuentes versus en número de Froude aguas arriba en canales con sección en forma de U (Francis, 2006). .....	51

Gráfica 28. Longitud del resalto versus en número de Froude aguas arriba en canales con sección en forma de U (Francis, 2006). .....	52
Gráfica 29. Tipos de resaltos en tuberías circulares (Ead, 2002). .....	53
Gráfica 30. Tipos de resaltos en tuberías circulares (Ead, 2002). .....	54
Gráfica 31. Resalto ondular (Rodríguez, 1992). .....	54
Gráfica 32. Resalto débil (Rodríguez, 1992). .....	55
Gráfica 33. Resalto oscilante (Rodríguez, 1992). .....	55
Gráfica 34. Resalto permanente (Rodríguez, 1992). .....	55
Gráfica 35. Resalto fuerte (Rodríguez, 1992). .....	56
Gráfica 36. Caso A de la ubicación del resalto hidráulico (Rodríguez, 1992). .....	57
Gráfica 37. Caso B de la ubicación del resalto hidráulico (Rodríguez, 1992). .....	57
Gráfica 38. Caso C de la ubicación del resalto hidráulico (Rodríguez, 1992). .....	58
Gráfica 39. Variación del caudal respecto a la relación de llenado (Montaño, 2012). .....	62
Gráfica 40. . Variación del número de Froude respecto a la relación de llenado para diferentes pendientes (Montaño, 2012). .....	63
Gráfica 41. Variación del número de Froude para diversos caudales (Montaño, 2012). .....	64
Gráfica 42. Comparación número de Froude respecto a diferentes relaciones de llenado (Montaño, 2012). .....	65
Gráfica 43. Foto del montaje listo para ser utilizado. .....	67
Gráfica 44. Ensayo de prueba para la verificación de los instrumentos y la tubería. ....	67
Gráfica 45. Ensayo de prueba aguas arriba para la verificación de los instrumentos y la tubería. ....	68
Gráfica 46. Compuerta aguas abajo de la tubería para controlar el fenómeno del resalto hidráulico. ....	69
Gráfica 47. Gatos mecánicos para controlar la variación de la pendiente. ....	69
Gráfica 48. Fenómeno del resalto hidráulico. ....	70
Gráfica 49. Alturas piezométricas del resalto hidráulico. ....	70
Gráfica 50. Sensor IQ Plus. ....	71
Gráfica 51. Procedimiento de instalación del sensor IQ Plus. ....	72
Gráfica 52. Estructura del sensor IQ Plus para obtener un funcionamiento adecuado de los rayos emitidos por este. ....	72
Gráfica 53. Caudalímetro electromagnético WaterMaster (ABB). .....	73
Gráfica 54. Rangos de error del caudalímetro electromagnético clase 2 según OIML R49 (WaterMaster, 2013). .....	74
Gráfica 55. Sensor U-GAGE T30 Series (BANNER, 2013). .....	75
Gráfica 56. Comparación de las pendientes con respecto a su relación de llenado aguas arriba. ....	79
Gráfica 57. Comparación de la pendiente 0,011 con la ecuación de Darcy Weisbach. ....	80
Gráfica 58. Comparación de la pendiente 0,018 con la ecuación de Darcy Weisbach. ....	81
Gráfica 59. Comparación de la relación de llenado aguas abajo con respecto a las pendientes trabajadas. ....	82
Gráfica 60. Comparación de la pendiente 0,011 con la ecuación de Darcy Weisbach. ....	83

---

Gráfica 61. Comparación de resultados teóricos contra los resultados experimentales de la pendiente 0,011. ....	84
Gráfica 62. Comparación de resultados teóricos contra los resultados experimentales de la pendiente 0,016. ....	85
Gráfica 63. Comparación de resultados teóricos contra los resultados experimentales de la pendiente 0,018. ....	85
Gráfica 64. Pérdidas de energía experimentales en la tubería. ....	86
Gráfica 65. Eficiencia experimental de la tubería. ....	87
Gráfica 66. Relación de llenado óptima para las cuatro pendientes trabajadas. ....	88
Gráfica 67. Comportamiento experimental del número de Froude aguas arriba. ....	89
Gráfica 68. Ecuación del resalto hidráulico mediante el método de regresión para la pendiente de 0,011. ....	90
Gráfica 69. Comparación de alturas con respecto al caudal de entrada para la pendiente de 0,011. ....	92
Gráfica 70. Solución de relación de llenado para pendiente 0,011 mediante programa de VBA. ....	93
Gráfica 71. Comparación de alturas con respecto al caudal de entrada para la pendiente de 0,016. ....	93
Gráfica 72. Solución de relación de llenado para pendiente 0,016 mediante programa de VBA. ....	94
Gráfica 73. Comparación de alturas con respecto al caudal de entrada para la pendiente de 0,018. ....	94
Gráfica 74. Solución de relación de llenado para pendiente 0,018 mediante programa de VBA. ....	95
Gráfica 75. Solución de relación de llenado para pendiente 0,025 mediante programa de VBA. ....	95



## Índice de Ecuaciones

Ecuación 1. Fuerza del resalto en secciones horizontales. ....	17
Ecuación 2. Fuerza del resalto en secciones horizontales. ....	17
Ecuación 3. Cálculo del número de Froude. ....	17
Ecuación 4. Cálculo de profundidades subsecuentes. ....	17
Ecuación 5. Relación del número de Froude aguas arriba y aguas abajo de la tubería. .	18
Ecuación 6. Número de Froude aguas arriba del resalto. ....	18
Ecuación 7. Procedimiento para el cálculo de alturas subsecuentes en el resalto. ....	18
Ecuación 8. Ecuación final de alturas subsecuentes en el resalto. ....	18
Ecuación 9. Diámetro de flujo con respecto al centro de gravedad para tuberías fluyendo parcialmente llenas. ....	19
Ecuación 10. Profundidades subsecuentes para tuberías fluyendo parcialmente llenas. .	19
Ecuación 11. Diámetro de flujo con respecto al centro de gravedad para tuberías fluyendo totalmente llenas. ....	19
Ecuación 12. Expresión para el cálculo de la longitud del resalto en cualquier tipo de sección. ....	20
Ecuación 13. Momentum en un Resalto hidráulico. ....	21
Ecuación 14. Conservación de momentum en un resalto hidráulico. ....	22
Ecuación 15. Cálculo del número de Froude según Rajaratnam. ....	22
Ecuación 16. Cálculo de Momentum para tuberías. ....	23
Ecuación 17. Cálculo de momentum corregido para tuberías. ....	24
Ecuación 18. Profundidades aguas arriba y aguas abajo de la tubería. ....	24
Ecuación 19. Cálculo de profundidades subsecuentes aguas abajo de la tubería. ....	24
Ecuación 20. Cálculo de ecuación factorizada de profundidades subsecuentes aguas abajo de la tubería. ....	24
Ecuación 21. Cálculo del número de Froude para tuberías. ....	25
Ecuación 22. Sustitución trigonométrica. ....	25
Ecuación 23. Cálculo simplificado de profundidades subsecuentes aguas abajo de la tubería. ....	25
Ecuación 24. Cálculo del resalto hidráulico en tuberías. ....	25
Ecuación 25. Cálculo del resalto hidráulico reemplazado en términos conocidos. ....	25
Ecuación 26. Ecuación factorizada de la longitud del resalto reemplazada en términos conocidos. ....	26
Ecuación 27. Supuestos realizados por Smith y Chen para el cálculo de la longitud del resalto. ....	26
Ecuación 28. Expresión final para el cálculo de la longitud del resalto hidráulico. ....	26
Ecuación 29. Cálculo de Froude para profundidad crítica. ....	27
Ecuación 30. Supuesto final para cálculo de la profundidad crítica. ....	27
Ecuación 31. Profundidades subsecuentes. ....	28
Ecuación 32. Fuerza de presión del agua en una tubería. ....	28

Ecuación 33. Ecuación de momentum en tuberías. ....	28
Ecuación 34. Número de Froude para conductos circulares. ....	29
Ecuación 35. Ecuación 33 reorganizada. ....	29
Ecuación 36. Relación de alturas aguas arriba y aguas abajo de una tubería parcialmente llena. ....	29
Ecuación 37. Ecuación de momentum en una tubería fluyendo parcialmente llena. ....	29
Ecuación 38. Ecuación final de momentum en una tubería fluyendo parcialmente llena. .	29
Ecuación 39. Cálculo de profundidades subsecuentes para números de Froude aguas arriba mayores a 2. ....	30
Ecuación 40. Nuevo cálculo de profundidades subsecuentes para números de Froude aguas arriba mayores a 2. ....	30
Ecuación 41. Ecuación de Momentum. ....	32
Ecuación 42. Relación entre alturas para canales rectangulares. ....	33
Ecuación 43. Expresión para calcular pérdidas de energía en canales rectangulares. ....	33
Ecuación 44. Centroide aguas arriba del área transversal de un canal de sección trapezoidal. ....	34
Ecuación 45. Centroide aguas abajo del área transversal de un canal de sección trapezoidal. ....	34
Ecuación 46. Ecuación de momentum en un canal trapezoidal. ....	34
Ecuación 47. Ecuación de momentum reemplazada en un canal trapezoidal. ....	34
Ecuación 48. Cálculo de Profundidades subsecuentes en un canal trapezoidal. ....	35
Ecuación 49. Método iterativo de Newton-Raphson. ....	35
Ecuación 50. Centroide del área transversal de una tubería de sección circular. ....	35
Ecuación 51. Derivada del centroide del área transversal de una tubería de sección circular. ....	36
Ecuación 52. Alturas obtenidas por método de Newton en términos de $\theta$ . ....	36
Ecuación 53. Área obtenida por método de Newton en términos de $\theta$ . ....	36
Ecuación 54. Función para el cálculo de profundidades subsecuentes en una tubería circular. ....	36
Ecuación 55. Derivada de la función para el cálculo de profundidades subsecuentes en una tubería circular. ....	36
Ecuación 56. Gradiente de presiones. ....	41
Ecuación 57. Ecuación de la continuidad. ....	41
Ecuación 58. Ecuación de Reynolds. ....	42
Ecuación 59. Esfuerzos cortantes de Reynolds. ....	42
Ecuación 60. Condiciones de frontera de la velocidad de desplazamiento. ....	42
Ecuación 61. Condiciones de la superficie libre aerodinámica. ....	42
Ecuación 62. Ecuación de momentum para canales circulares y en forma de U. ....	42
Ecuación 63. Ecuación de momentum para canales circulares y en forma de U. ....	43
Ecuación 64. Cálculo del número de Froude aguas arriba del canal. ....	43
Ecuación 65. Velocidades subsecuentes en el resalto hidráulico. ....	43
Ecuación 66. Ecuación de profundidad de Reynolds en el resalto hidráulico. ....	43

Ecuación 67. Viscosidad de remolino. ....	43
Ecuación 68. Gradiente promedio de la velocidad axial. ....	43
Ecuación 69. Ecuación simplificada del resalto hidráulico. ....	44
Ecuación 70. Constantes para el cálculo del resalto hidráulico. ....	44
Ecuación 71. Condiciones de frontera para el cálculo del resalto hidráulico aguas arriba y aguas abajo del canal. ....	44
Ecuación 72. Cálculo del resalto hidráulico dentro de las condiciones de frontera. ....	44
Ecuación 73. Cálculo de la longitud del resalto a través de la pendiente y las profundidades aguas arriba y aguas abajo. ....	44
Ecuación 74. Cálculo de la longitud del resalto teniendo en cuenta la profundidad media. ....	45
Ecuación 75. Términos importantes para el cálculo del resalto hidráulico en canales circulares y en forma de U. ....	45
Ecuación 76. Cálculo del Resalto hidráulico en términos de $\Psi$ y $\Phi$ . ....	45
Ecuación 77. Cálculo del número de Froude en términos de $\Psi$ y $\Phi$ . ....	46
Ecuación 78. Integral para el cálculo del resalto hidráulico. ....	46
Ecuación 79. Definición de variables. ....	46
Ecuación 80. Cálculo de la longitud del resalto en términos de $\Phi$ y $\Psi$ , teniendo en cuenta la profundidad media. ....	46
Ecuación 81. Relación entre profundidad de flujo y diámetro en canales de sección circular. ....	46
Ecuación 82. Cálculo del área y de la fuerza de presión por unidad de peso en canales circulares. ....	47
Ecuación 83. Número de Froude para canales circulares. ....	47
Ecuación 84. Cálculo de la profundidad crítica en canales de sección circular. ....	47
Ecuación 85. Simplificación de ecuaciones para canales circulares fluyendo parcialmente llenos. ....	47
Ecuación 86. Número de Froude simplificado para canales circulares fluyendo parcialmente llenos. ....	47
Ecuación 87. Longitud del resalto simplificado para canales circulares fluyendo parcialmente llenos. ....	48
Ecuación 88. Cálculo del área y la fuerza de presión por unidad de peso para canales en forma de U. ....	48
Ecuación 89. Simplificación del modelo de Hager para canales en forma de U. ....	48
Ecuación 90. Cálculo de pérdidas de energía en canal rectangular horizontal. ....	56
Ecuación 91. Cálculo de la eficiencia en un canal rectangular horizontal (Rodríguez, 1992). ....	56
Ecuación 92. Curva que describe el número de Froude máximo (Montaño, 2012). ....	65
Ecuación 93. Cálculo del área mojada en secciones circulares. ....	76
Ecuación 94. Cálculo de la velocidad de flujo en secciones circulares. ....	76
Ecuación 95. Cálculo del ancho de la superficie de agua en secciones circulares. ....	77
Ecuación 96. Cálculo del perímetro mojado en secciones circulares. ....	77

Ecuación 97. Cálculo de la profundidad hidráulica en secciones circulares. ....	77
Ecuación 98. Cálculo del número de Froude en secciones circulares. ....	77
Ecuación 99. Cálculo de la relación de llenado en secciones circulares. ....	77
Ecuación 100. Cálculo de la energía específica en secciones circulares. ....	78
Ecuación 101. Cálculo de las pérdidas de energía del resalto hidráulico en secciones circulares. ....	78
Ecuación 102. Cálculo de la eficiencia del resalto hidráulico en secciones circulares. ....	78
Ecuación 103. Cálculo del momentum específico en secciones circulares. ....	78
Ecuación 104. Momentum en un resalto hidráulico. ....	83
Ecuación 105. Ecuación del resalto hidráulico para una pendiente de 0,011. ....	90
Ecuación 106. Definición de variables dependientes e independientes. ....	90
Ecuación 107. Ecuación para encontrar el número de Froude. ....	90
Ecuación 108. Velocidad de flujo. ....	91
Ecuación 109. Número de Froude reemplazado. ....	91
Ecuación 110. Ecuación del resalto hidráulico para la pendiente de 0,011. ....	91
Ecuación 111. Ecuación del resalto hidráulico reemplazada para la pendiente de 0,011. ....	91
Ecuación 112. Ecuación del resalto hidráulico reemplazada para la pendiente de 0,016. ....	91
Ecuación 113. Ecuación del resalto hidráulico reemplazada para la pendiente de 0,018. ....	91
Ecuación 114. Ecuación del resalto hidráulico reemplazada para la pendiente de 0,025. ....	92
Ecuación 115. Método de regresión para pendiente de 0,018. ....	94
Ecuación 116. Método de regresión para pendiente de 0,025. ....	95

## 1. Introducción

---

El resalto hidráulico es un fenómeno que se presenta cuando un flujo genera una transición de un estado supercrítico a un estado subcrítico. Es decir, cuando se muestra un conflicto entre las profundidades de flujo aguas arriba y aguas abajo, lo cual hace que la altura de flujo cambie rápidamente de menor a mayor. Este tipo de fenómeno se puede presentar tanto en canales abiertos como canales cerrados y se produce por variaciones en las pendientes o por obstáculos en el canal como compuertas. Este tipo de fenómeno hidráulico se produce principalmente con el fin de obtener grandes pérdidas de energía, las cuales se presentan por la turbulencia y sirven para controlar de una mejor forma el comportamiento del flujo. Otras de sus funciones principales son: la eficiencia, puesto que es la relación de la energía específica antes y después del resalto, dependiendo del número de Froude aguas arriba; y por último, se encuentra que el resalto hidráulico es un excelente mezclador de fluidos. Para obtener un análisis detallado de este fenómeno se deben tener en cuenta algunas características principales del resalto como:

- **La longitud del resalto:** Esta distancia está medida desde donde comienza la turbulencia del fluido aguas abajo formando el resalto, hasta donde se estabiliza el fluido aguas arriba.
- **Número de Froude:** El número de Froude se calcula para determinar si el comportamiento del flujo es supercrítico, subcrítico o crítico. Su cálculo puede variar según la forma geométrica del canal; ya sea rectangular, triangular, trapezoidal o circular.
- **Ubicación del resalto:** Esta característica es muy importante para el entendimiento de las condiciones óptimas del canal, reduciendo los daños y las sobrecargas. En el resalto puede variar su ubicación según el canal de entrada a la tubería, el control de una compuerta aguas abajo o la pendiente que este tenga.

El desarrollo de este proyecto se va a enfocar en la toma de datos y análisis de resultados del modelo construido anteriormente para el desarrollo y estudio de resaltos hidráulicos en tuberías parcialmente llenas de sección circular, con números de Froude menores a 4, con el fin de minimizar los fenómenos de sobrecarga en los sistemas de drenaje urbano en Colombia.

Por un lado, este trabajo contará con un estudio previo de los modelos de resaltos hidráulicos que se han realizado a través del tiempo en canales abiertos y cerrados para tener un mejor entendimiento y manejo del tema a estudiar. Se comenzará analizando los ensayos realizados por Kindsvater y Lane en canales rectangulares, seguido de los ensayos de Kalinske y Robertson enfocados en la variación de pendientes para producir el resalto, y por último Hager que ha sido el principal autor junto con sus ecuaciones empíricas para el cálculo del resalto hidráulico en tuberías circulares, entre otros.

---

Por otro lado, se contará con la prueba del montaje en el Laboratorio de Hidráulica en la Universidad de los Andes, donde se trabajará el fenómeno de resaltos hidráulicos en tuberías circulares, con la variación de diferentes pendientes y con el manejo de una compuerta aguas abajo para garantizar: la generación del resalto, la obtención de profundidades subsecuentes, la ubicación del resalto entre los dos sensores aguas arriba y aguas abajo, y el cálculo del número de Froude.

## Objetivos

---

### Objetivo General

Entender el fenómeno del resalto hidráulico en tuberías lisas de sección circular, fluyendo parcialmente llenas con número de Froude inferiores a 4. De esta forma, determinar el comportamiento del resalto en la tubería con diferentes pendientes y bajo condiciones de llenado menores al 85%, generando una mayor aireación y pérdidas de energía.

### Objetivos Específicos

- Conocer los instrumentos con los cuales se va a trabajar en el desarrollo de este proyecto de grado para entender la precisión de estos y su incertidumbre a la hora de presentar los resultados. Los instrumentos con los cuales que se trabajará son: dos sensores que medirán las profundidades de flujo aguas arriba y aguas abajo del resalto, mostrando el comportamiento de este; un caudalímetro electromagnético que informará cuanto caudal está pasando en el modelo; y un nivel de precisión que presentará las pendientes en las que se está trabajando.
- Desarrollar un estudio previo de los modelos realizados a través del tiempo acerca del fenómeno del resalto hidráulico en tuberías circulares, identificando los instrumentos y métodos utilizados en estos, para obtener información suficiente en el análisis de resultados obtenidos en este proyecto de grado.
- Calcular los posibles caudales críticos que causen desbordamiento en el canal, mostrando cierta relación de llenado. Y además, encontrar la relación de llenado óptima para los números de Froude más críticos.
- Desarrollar una ecuación empírica para encontrar la pendiente óptima de la tubería, para un caudal de diseño, evitando el fenómeno de sobrecarga y relaciones de llenado superiores al 85%.

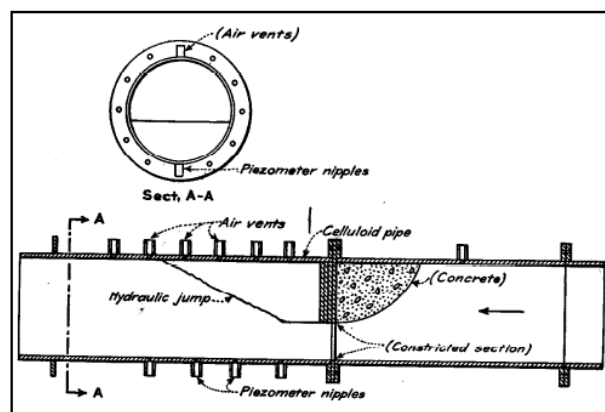


## 2. Antecedentes de modelos realizados a través del tiempo sobre el fenómeno del resalto hidráulico

Para entender y estudiar el comportamiento de la tubería frente a los resaltos hidráulicos, primero se debe encontrar los estudios previos que se han ido realizando a través del tiempo, con sus principales autores y finalmente con las conclusiones de cada uno de estos. De esta forma, se logrará entender las ecuaciones demostradas por cada uno de ellos y el procedimiento de cómo se llegó a ellas, si de forma experimental o teórica. A continuación se mostrarán los principales estudios que se realizaron con sus respectivos autores.

### Kindsvater y Lane (1938)

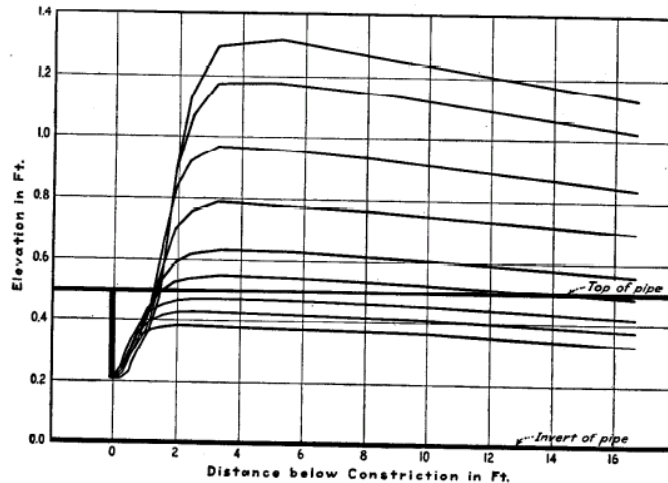
Los primeros experimentos que aparecen a través de la historia en cuanto al tema de resaltos hidráulicos en tuberías circulares fueron los realizados por Kindsvater y Lane en 1938. Este montaje se realizó en la Universidad de Iowa, con una tubería de 150 mm de diámetro y 6 m de longitud totalmente horizontal. Se realizaron tres tipos de pruebas con diferentes porcentajes de obstrucción: el primero era del 40% del diámetro, el segundo era del 60% del diámetro y el tercero ocupaba el 80% de diámetro (Kindsvater E. W., 1938). A continuación se mostrará el ensayo que se realizó para la segunda prueba:



Gráfica 1. Montaje realizado por Kindsvater y Lane (Kindsvater, 1938).

Al realizar las pruebas en la tubería circular Kindsvater y Lane, estudiaron la variación de alturas medidas para diferentes caudales, y pudieron concluir, como se puede observar en la Gráfica 2, que al tener caudales muy bajos la tubería no alcanzaba su presurización; en cambio a caudales grandes la tubería se presurizaba completamente. Por otro lado, encontraron que, al analizar el resalto por medio de la variación de momentum aguas arriba y aguas abajo, se generaba un mayor momentum aguas arriba de la tubería, lo cual demostraba que este no se estaba conservando antes y después del resalto, estas diferencias entre los dos momentum lo asimilaban a tres posibles causas: la fricción causada por la tubería, la omisión de burbujas en los cálculos y la uniformidad del resalto aguas abajo (Kindsvater E. W., 1938).

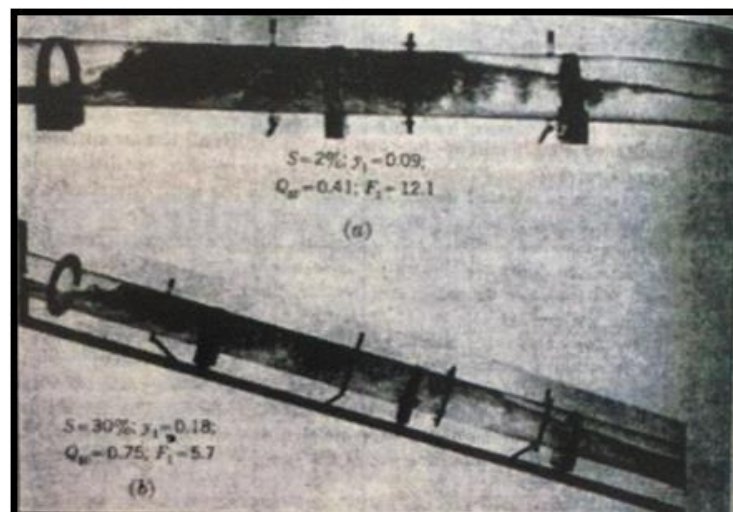




Gráfica 2. Alturas versus Caudales (Kindsvater, 1938).

### Kalinske y Robertson (1943)

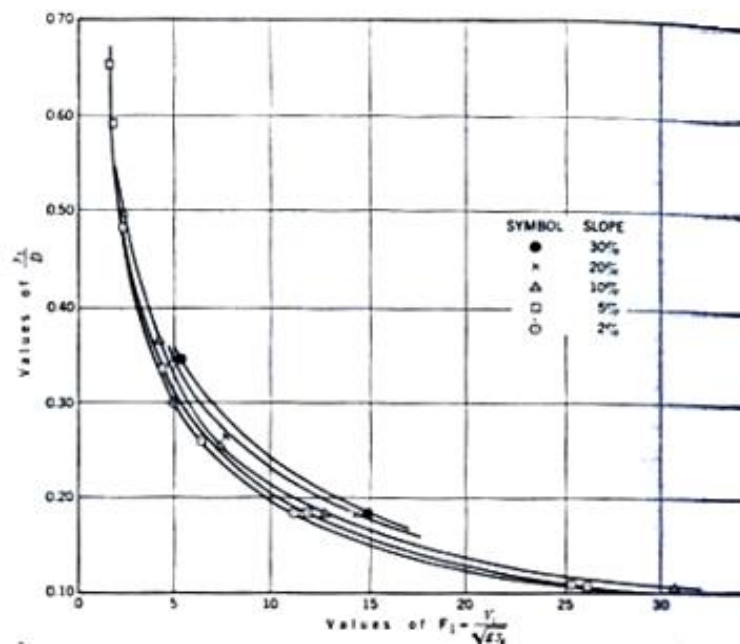
Los experimentos de Kalinske y Robertson se basaron en varias pruebas a sistemas cerrados en tuberías circulares, para encontrar el fenómeno del resalto hidráulico por medio de la aireación de esta. Estos tipos de experimentos consistían en colocar varias tuberías circulares a diferentes pendientes para verificar cuál era el comportamiento del resalto hidráulico y cuáles eran las causas que lo generaban. Durante sus estudios encontraron que la cantidad de aireación dependía del número de Froude aguas arriba del resalto hidráulico, de la pendiente de esta y de la relación de llenado (Mortensen, 2009). A continuación se mostrará en la Gráfica 3 uno de los resultados que ellos obtuvieron:



Gráfica 3. Montaje de Kalinske y Robertson (Kalinske, 1943).

Como se puede observar en la Gráfica 3, encontraron que efectivamente para un cambio de pendiente en la tubería y para cambios de números de Froude, la intensidad del resalto hidráulico sería diferente. Esta prueba se demostró en una tubería de 10 m de largo y de 150 mm de diámetro que se sometió a seis pendientes diferentes (0.2%, 2%, 5%, 10%, 20% y 30%).

Por otro lado, en su experimento obtuvieron resultados para los valores críticos que presentaban las tuberías, graficando el número de Froude contra las diferentes relaciones de llenado.



**Gráfica 4. Valores críticos experimentales del número de Froude contra la relación de llenado (Kalinske, 1943).**

Como se puede observar en la Gráfica 4, para las diferentes pendientes que se estudiaron, se encontró que la pendiente era directamente proporcional a la relación de llenado, es decir, a mayores pendientes en la tubería, se presentaron mayores relaciones de llenado.

**Tabla 1. Datos típicos para los ensayos (Kalinske, 1943).**

Fig.	$Y_1$ (m)	$Fr_1$	$Q_w$ (m <sup>3</sup> /s)	$Q_d$ (m <sup>3</sup> /s)	$S$ (-)
(a)	0,147	8,2	0,720	0,060	2%
(b)	0,127	7,5	0,482	0,039	5%
(c)	0,290	2,6	0,848	0,014	10%

Por otro lado, para cada una de las pruebas que realizaron con diferentes pendientes Robertson y Kalinske, descubrieron que los resaltos en la tubería se comportaban de forma diferente a medida que cambiaban la pendiente. De esta forma concluyeron que la cantidad de aireación y presión de aire que producía el resalto a medida que se inclinaba la tubería, eran directamente proporcionales, siempre y cuando el número de Froude y la profundidad subsecuente se mantuvieran constantes (Kalinske, 1943).

### Richard Silvester (1964)

Para el desarrollo de su experimento, Richard Silvester se enfocó en estudiar el comportamiento de los resaltos hidráulicos a través de varios tipos de tuberías, entre ellas las circulares, triangulares y rectangulares. En su publicación en 1964 descubrió que para encontrar las propiedades de un resalto hidráulico en tuberías circulares debía estudiar las dos situaciones que se podían presentar (fluyendo parcialmente llenas y fluyendo totalmente llenas). Por otro lado, descubrió que para obtener el comportamiento del flujo aguas arriba y aguas abajo del resalto, debía tener en cuenta ciertas variables de entrada como la relación de llenado aguas arriba y aguas abajo, el caudal de entrada a los canales y a las tuberías, la disipación de energía, el radio de profundidades subsecuentes y la longitud del resalto.

Así mismo, comenzó su análisis introduciendo la ecuación de fuerza del resalto de un flujo a través de una sección horizontal como se muestra a continuación:

$$A_1 k_1' d_1 - A_2 k_2' d_2 = \left(\frac{Q^2}{g}\right) * \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right)$$

**Ecuación 1. Fuerza del resalto en secciones horizontales.**

donde  $A$  es el área mojada,  $k$  es la distancia al centro de gravedad,  $d$  el diámetro de la tubería,  $g$  es la gravedad y  $Q$  es el caudal de entrada, los subíndices (1 y 2) se utilizan para la diferenciación entre aguas arriba y aguas abajo respectivamente. La Ecuación 1 se puede describir de una mejor forma así:

$$A_1 k_1' d_1 - A_2 k_2' d_2 = \left(\frac{Q^2}{g A_2} - \frac{Q^2}{g A_1}\right)$$

**Ecuación 2. Fuerza del resalto en secciones horizontales.**

Además, se conoce que la ecuación del número de Froude se expresa de la siguiente forma:

$$F^2 = \frac{Q^2}{A^2 g D}$$

**Ecuación 3. Cálculo del número de Froude.**

donde  $F$  es el número de Froude; ahora al reemplazar la Ecuación 2 en la Ecuación 3, y multiplicando por menos 1 se obtiene la siguiente expresión

$$A_2 k_2' D_2 - A_1 k_1' D_1 = F_1^2 A_1 D_1 - F_2^2 A_2 D_2$$

**Ecuación 4. Cálculo de profundidades subsecuentes.**

Por otro lado, se tiene que la relación entre el número de Froude aguas arriba y el número de Froude aguas abajo se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{F_2^2}{F_1^2} = \frac{A_1^2 D_1}{A_2^2 D_2}$$

**Ecuación 5. Relación del número de Froude aguas arriba y aguas abajo de la tubería.**

Despejando el número de Froude aguas abajo, se puede despejar una incógnita de la Ecuación 5 y expresar todo en términos del número de Froude aguas arriba

$$F_2^2 = \frac{A_1^2 D_1 F_1^2}{A_2^2 D_2}$$

**Ecuación 6. Número de Froude aguas arriba del resalto.**

Y reemplazando queda:

$$A_2 k_2' D_2 - A_1 k_1' D_1 = F_1^2 A_1 D_1 - \frac{A_1^2 D_1 F_1^2 A_2 D_2}{A_2^2 D_2}$$

$$A_2 k_2' D_2 - A_1 k_1' D_1 = F_1^2 A_1 D_1 - \frac{A_1^2 D_1 F_1^2}{A_2 D_2}$$

$$A_2 k_2' D_2 - A_1 k_1' D_1 = F_1^2 A_1 D_1 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)$$

**Ecuación 7. Procedimiento para el cálculo de alturas subsecuentes en el resalto.**

Finalmente, se divide la Ecuación 7 por  $A_1 * D_1$

$$\frac{k_2'(A_2 D_2)}{A_1 D_1} - k_1' = F_1^2 \left[1 - \frac{A_1}{A_2}\right]$$

**Ecuación 8. Ecuación final de alturas subsecuentes en el resalto.**

### Estudio de canales cerrados (tuberías)

El desarrollo de este documento se va a enfocar principalmente en el estudio que Richard Silvester realizó para las tuberías circulares, fluyendo parcialmente llenas y totalmente llenas.

#### 2.1 Tubería parcialmente llena

En este tipo de tuberías no se presenta un  $k$  (distancia al centro de gravedad) constante, por lo cual Silvester planteó la siguiente ecuación:

$$k' = 1 - \frac{1}{2} \frac{d}{D} + \frac{\left(2 \left(1 - \frac{D}{d}\right)^{\frac{3}{2}} * \left(\frac{D}{d}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{3m}$$

**Ecuación 9. Diámetro de flujo con respecto al centro de gravedad para tuberías fluyendo parcialmente llenas.**

donde  $D$  es la profundidad de sección,  $d$  es el diámetro de la tubería,  $k'$  es el diámetro de la profundidad de flujo con respecto al centro de gravedad y  $m$  es el área de los segmentos del agua. Finalmente, para tuberías fluyendo parcialmente llenas, se puede expresar la ecuación de profundidades subsecuentes reemplazando la Ecuación 9 en la Ecuación 8 obteniendo:

$$k'_2 \frac{d_2 m_2}{d_1 m_1} - k'_1 = F_1^2 \left[1 - \frac{m_1}{m_2}\right]$$

**Ecuación 10. Profundidades subsecuentes para tuberías fluyendo parcialmente llenas.**

### 2.2 Tubería totalmente llena

Para este tipo de tuberías, el flujo se presuriza aguas abajo de la tubería lo cual hace que  $k$  (distancia al centro de gravedad) se exprese con función de la relación de llenado como se observa en la Ecuación 11.

$$k'_2 = \frac{\left(d_2 - \frac{D}{2}\right)}{d_2}$$

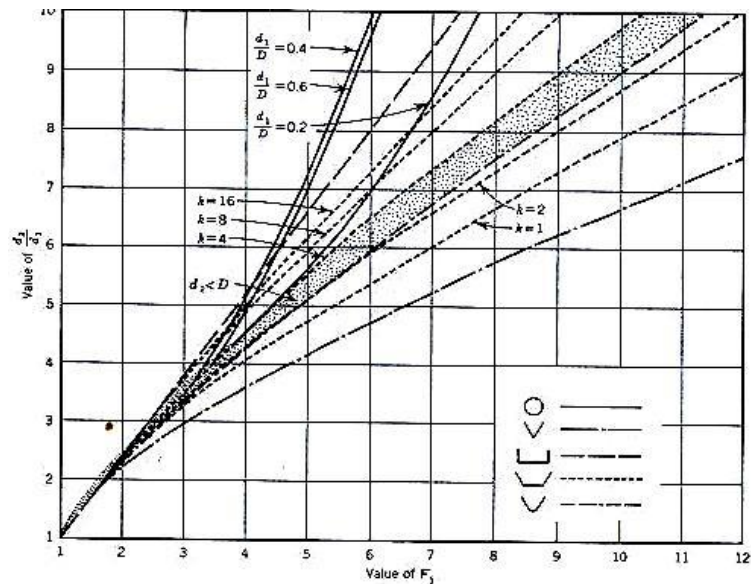
**Ecuación 11. Diámetro de flujo con respecto al centro de gravedad para tuberías fluyendo totalmente llenas.**

Por otro lado, reemplazando la Ecuación 11 en la Ecuación 8 se obtiene:

$$\frac{m_2 d_2}{m_1 d_1} - \frac{1}{2} \frac{m_2 D}{m_1 d_1} - k'_1 = F_1^2 \left[1 - \frac{m_1}{m_2}\right]$$

### 2.3 Resultados finales

Luego de que Richard Silvester estudiara el comportamiento de cada una de las secciones horizontales, realizó un diagrama de las relaciones de llenado contra el número de Froude aguas arriba, encontrando que las tuberías con sección circular presentan números de Froude menores con mayores relaciones de llenado que las demás secciones estudiadas. Además, la sección rectangular es la que presenta el mejor comportamiento, soportando números de Froude mayores y presentando relaciones de llenado más bajas con respecto a las demás secciones, tal como se observa en la Gráfica 5 que presenta los resultados finales de todas las secciones trabajadas.



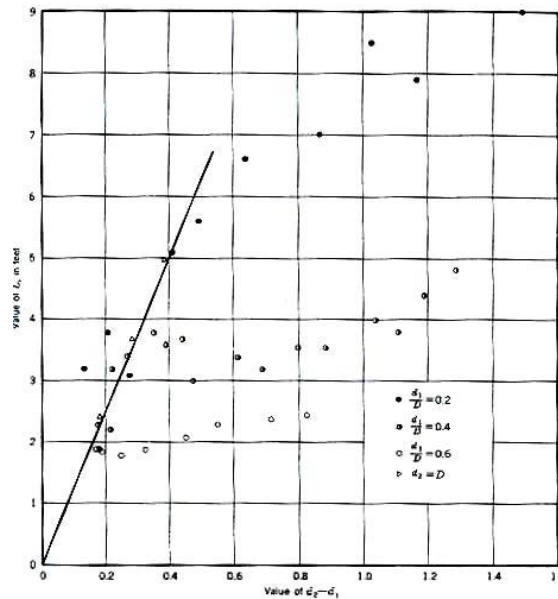
**Gráfica 5. Datos obtenidos para los diferentes tipos de secciones (Silvester, HYDRAULIC JUMP IN ALL SHAPES OF HORIZONTAL CHANNELS., 1964).**

Por otro lado, Silvester fue el primero en encontrar una ecuación de forma experimental para determinar la longitud del resalto que se producía en una tubería circular. Sin embargo, para esto se basó en las relaciones de llenado obtenidas aguas abajo y aguas arriba de la tubería y en los experimentos realizados anteriormente por Kindsvater y Lane en 1934. Lo anterior para obtener como resultado una ecuación en función del número de Froude y de las pérdidas por fricción las cuales supuso como constantes a través de toda la tubería (Silvester, HYDRAULIC JUMP IN ALL SHAPES OF HORIZONTAL CHANNELS., 1964). La expresión se muestra a continuación:

$$\frac{L}{d_1} = K (F_1 - 1)^\alpha$$

**Ecuación 12. Expresión para el cálculo de la longitud del resalto en cualquier tipo de sección.**

donde  $\frac{L}{d_1}$  es la relación entre la longitud del resalto y la profundidad de flujo aguas arriba del resalto,  $K$  es la constante de pérdidas por fricción,  $F_1$  es el número de Froude aguas arriba y  $\alpha$  se determina por las relaciones de llenado y el número de Froude aguas arriba.



**Gráfica 6. Resultados obtenidos de la variación de alturas versus la longitud del resalto (Silvester, HYDRAULIC JUMP IN ALL SHAPES OF HORIZONTAL CHANNELS., 1964).**

Como se puede observar en la gráfica anterior, al utilizar variaciones de alturas bajas, la longitud del resalto aumenta, lo cual hace que este comportamiento sea inversamente proporcional. Esto afirma lo explicado anteriormente en la Gráfica 5, donde se presentaba que a menores relaciones de llenado, menores números de Froude, lo cual hace que el flujo sea menor y se comporte de forma más lenta, presentando una menor aireación y por lo tanto una menor longitud de resalto.

### Rajaratnam (1965)

El análisis que realizó Rajaratnam se basó principalmente en los estudios anteriormente realizados sobre el fenómeno de resaltos hidráulicos de Kindsvater (1938) sobre tuberías horizontales y de Kalinske (1943) sobre canales abiertos y cerrados presentando variaciones en su pendiente.

En su montaje trabajó las diferentes relaciones de llenado en una tubería para establecer la cantidad de aireación que estas producían en un resalto hidráulico. Su experimento lo basó partiendo principalmente de la ecuación de momentum en un resalto hidráulico (Rajaratnam, 1965), expresada a continuación:

$$P + M = \gamma \Psi D^2 \lambda y + \frac{\gamma Q^2}{g} * \frac{1}{\Psi D^2}$$

**Ecuación 13. Momentum en un Resalto hidráulico.**



donde  $P$  es la presión del agua,  $M$  es el momentum,  $\gamma$  es función de la relación de llenado aguas arriba,  $D$  es el diámetro de la tubería,  $Q$  es el caudal de entrada,  $\Psi$  es función de la relación de llenado,  $y$  es la altura de la superficie de agua y  $g$  es la gravedad. De esta forma, se conoció anteriormente que en un resalto hidráulico la energía no se conserva pero el momentum sí. Entonces la Ecuación 13 queda de la siguiente forma:

$$P_1 + M_1 = P_2 + M_2$$

**Ecuación 14. Conservación de momentum en un resalto hidráulico.**

Ahora, se procede a combinar la Ecuación 13 y la Ecuación 14 para obtener finalmente:

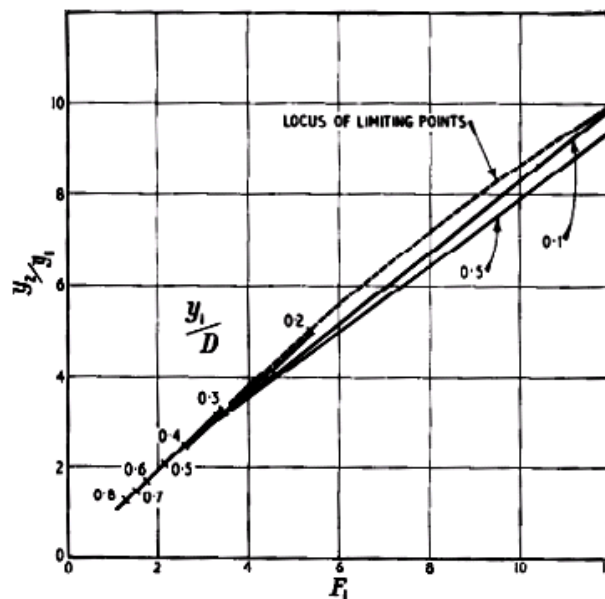
$$1 - \frac{\Psi_1 \lambda_1 y_2}{\Psi_2 \lambda_2 y_1} = F_1^2 \frac{\eta_1}{\lambda_1} \left( \frac{\Psi_1}{\Psi_2} - 1 \right)$$

Como se ha explicado anteriormente se conoce que la ecuación del número de Froude es:

$$F_1^2 = \frac{Q^2}{gD^5\Gamma_1}$$

**Ecuación 15. Cálculo del número de Froude según Rajaratnam.**

Luego de obtener las ecuaciones anteriores, Rajaratnam procedió al cálculo de las relaciones de llenado en las tuberías y a estudiar el comportamiento de estas con respecto al número de Froude aguas arriba obteniendo los resultados presentados en la Gráfica 7.



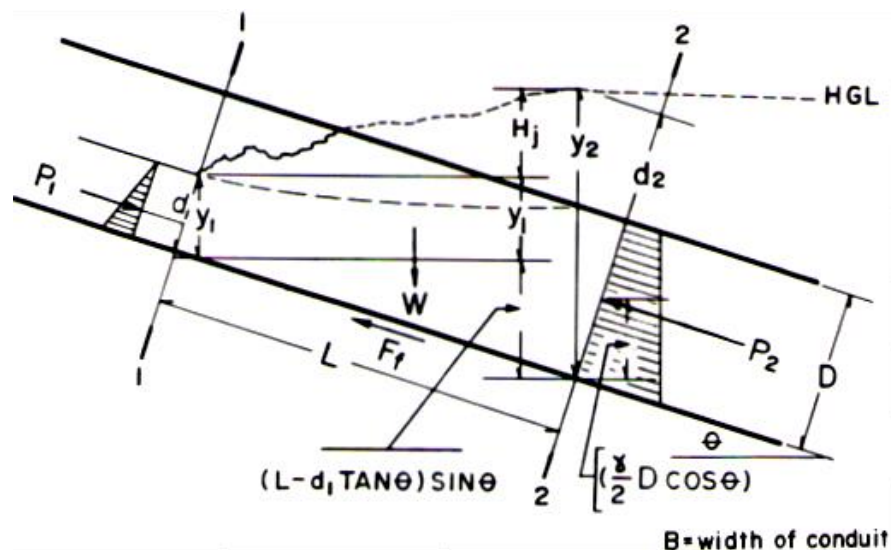
**Gráfica 7. Relación de llenado versus número de Froude aguas arriba (Rajaratnam, 1965).**



Cuando analizó los datos obtenidos, Rajaratnam encontró que para relaciones de llenado superiores a 1.0, el estudio de estas no iba a ser válido por el comportamiento del flujo. Por lo cual, no se permitía realizar ningún análisis o algún estudio adecuado del fenómeno del resalto hidráulico. Por otro lado, al analizar la Gráfica 7, encontró que cuando el número de Froude comienza a divergir, sus límites de relaciones de llenado se mantienen entre 0.2 y 0.5.

### C. Smith y W. Chen (1989)

Las publicaciones hechas por C. Smith y W. Chen en 1989 acerca del fenómeno del resalto hidráulico, se originaron a través de tuberías rectangulares sometidas a grandes pendientes, para determinar los coeficientes más importantes que generan dicho fenómeno, y de esta forma, obtener las variables de entrada necesarias para el cálculo de las profundidades subsecuentes. Este artículo explica que la formación de un resalto hidráulico ocurre cuando hay un cambio abrupto entre la altura de la superficie del flujo aguas arriba y la altura de la superficie del flujo aguas abajo. Por esto, se necesita que la línea de gradiente hidráulico aguas abajo sea mayor que la cota clave de la tubería (Chen, 1989). A continuación se presenta una imagen del procedimiento que desarrollaron con su respectiva explicación:



Gráfica 8. Comportamiento del resalto hidráulico dentro de la tubería (Chen, 1989).

Como se puede observar en la Gráfica 8, se estudió el comportamiento del resalto hidráulico con su respectivo diagrama de fuerzas, perfiles de velocidades y líneas de gradiente hidráulico. Luego se procedió al cálculo teórico de las ecuaciones para determinar el comportamiento de este fenómeno. Primero se planteó la ecuación de conservación de momentum en la tubería según la Gráfica 8 de la siguiente forma:

$$P_1 - P_2 + W \text{ sen}\theta - F_f = M_2 - M_1$$

Ecuación 16. Cálculo de Momentum para tuberías.

donde  $M$  es el momentum,  $P$  es la presión del agua,  $W$  es el peso del agua y  $\theta$  es el ángulo de la pendiente. Siguiendo con su análisis C. Smith y W. Chen encontraron que además de las fuerzas mostradas en la Gráfica 8, esta tubería presentaba presiones de aire que no habían sido mencionadas, por lo cual presentaron la siguiente corrección para la Ecuación 16

$$\frac{\gamma}{2} B d_1^2 \cos\theta - \left[ \left( \frac{\gamma}{\cos\theta} d_2 - \frac{\gamma}{2} D \cos\theta \right) BD \right] + \frac{\gamma K B D L}{1 + \beta_j} \text{sen}\theta - F_f = \frac{\beta_2 \gamma Q^2 (1 + \beta_a)}{g B D} - \frac{\beta_1 \gamma Q^2}{g B d_1}$$

**Ecuación 17. Cálculo de momentum corregido para tuberías.**

donde  $\beta$  es el factor de corrección del Momentum,  $\gamma$  es el peso específico del agua,  $Q$  es el caudal de entrada,  $\beta_a$  es la relación del aire con el agua debido a la entrada de aire aguas abajo del resalto,  $B$  es el ancho del canal,  $D$  es el diámetro del canal,  $L$  la longitud del resalto,  $K$  es el factor de corrección menor a uno,  $g$  es la gravedad,  $\theta$  es el ángulo de la pendiente y  $F_f$  es la fuerza de fricción a lo largo del resalto. De esta forma, de la Gráfica 8 se puede deducir que:

$$y_1 = \frac{d_1}{\cos\theta}; y_2 = \frac{d_2}{\cos\theta}$$

**Ecuación 18. Profundidades aguas arriba y aguas abajo de la tubería.**

Ahora se procede a reemplazar y a despejar la profundidad subsecuente aguas abajo en términos de la profundidad subsecuente aguas arriba. Por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación:

$$d_2 = \left( \frac{(\beta_2 \gamma Q^2 (1 + \beta_a))}{g B D} - \frac{\beta_1 \gamma Q^2}{g B d_1} - \frac{\gamma}{2} B d_1^2 \cos\theta + F_f - \frac{\gamma K B D L}{1 + \beta_j} \text{sen}\theta - \frac{\gamma D B D}{2} \cos\theta \right) \frac{\cos\theta}{\gamma B D}$$

**Ecuación 19. Cálculo de profundidades subsecuentes aguas abajo de la tubería.**

Ahora, se procede a factorizar  $D$  obteniendo:

$$d_2 = D \left\{ \left( \frac{(\beta_2 \gamma Q^2 (1 + \beta_a))}{g B D^2} - \frac{\beta_1 \gamma Q^2}{g B d_1 D} - \frac{\gamma}{2 D} B d_1^2 \cos\theta + \frac{F_f}{D} - \frac{\gamma K B L}{1 + \beta_j} \text{sen}\theta - \frac{\gamma D B}{2} \cos\theta \right) \frac{\cos\theta}{\gamma B D^2} \right\}$$

**Ecuación 20. Cálculo de ecuación factorizada de profundidades subsecuentes aguas abajo de la tubería.**

Y sabiendo que el número de Froude se expresa de la siguiente forma

$$Fr_1^2 = \frac{Q^2}{B^2 d_1^2 g d_1}$$

**Ecuación 21. Cálculo del número de Froude para tuberías.**

Y realizando una sustitución trigonométrica

$$\cos\theta \operatorname{sen}\theta = \tan\theta \cos^2\theta$$

**Ecuación 22. Sustitución trigonométrica.**

Se pueden reemplazar la Ecuación 21 y la Ecuación 22 en la Ecuación 20:

$$y_2 = D \left\{ \left[ \beta_1 Fr_1^2 \left(\frac{d_1}{D}\right)^2 - \beta_2 Fr_1^2 \left(\frac{d_1}{D}\right)^3 (1 + \beta_a) \right] + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{d_1}{D}\right)^2 + 1 \right] \cos\theta + K \left(\frac{L}{D}\right) \frac{\tan\theta \cos\theta}{(1 + \beta_j)} - \frac{F_f}{\gamma B D^2} \right\}$$

**Ecuación 23. Cálculo simplificado de profundidades subsecuentes aguas abajo de la tubería.**

Ahora, para el cálculo de la longitud del resalto hidráulico se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{H_j}{D} = \frac{1}{D} [y_2 - y_1 - (L - d_1 \tan\theta) \operatorname{sen}\theta]$$

**Ecuación 24. Cálculo del resalto hidráulico en tuberías.**

Reemplazando en la Ecuación 23 se obtiene:

$$\frac{H_j}{D} = \frac{1}{D} \left[ D \left\{ \left[ \beta_1 Fr_1^2 \left(\frac{d_1}{D}\right)^2 - \beta_2 Fr_1^2 \left(\frac{d_1}{D}\right)^3 (1 + \beta_a) \right] + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{d_1}{D}\right)^2 + 1 \right] \cos\theta + K \left(\frac{L}{D}\right) \frac{\tan\theta \cos\theta}{(1 + \beta_j)} - \frac{F_f}{\gamma B D^2} \right\} - \frac{d_1}{\cos\theta} - ((L - d_1 \tan\theta) \operatorname{sen}\theta) \right]$$

**Ecuación 25. Cálculo del resalto hidráulico reemplazado en términos conocidos.**

Finalmente, factorizando  $Fr_1^2, \left(\frac{d_1}{D}\right)$  y reorganizando la ecuación, la expresión de la longitud del resalto queda de la siguiente forma:

$$\frac{H_j}{D} = Fr_1^2 \left(\frac{d_1}{D}\right)^2 \left[ \beta_1 - \beta_2 \frac{d_1}{D} (1 + \beta_a) \right] + \frac{1}{2} \frac{d_1}{D} \left[ \left(\frac{d_1}{D}\right) + \frac{1}{\frac{d_1}{D}} - 2 \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta \right) \right] \cos \theta + \frac{L}{D} \left( \frac{K}{1 + \beta_j} - 1 \right) \text{sen} \theta - \frac{F_f}{\gamma B D^2}$$

**Ecuación 26. Ecuación factorizada de la longitud del resalto reemplazada en términos conocidos.**

Como se puede observar, a pesar de que la Ecuación 26 se reemplazó por términos conocidos, se sigue teniendo cinco incógnitas en la ecuación por lo cual C. Smith y W. Chen realizaron los siguientes supuestos:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1 \\ \beta_2 &= 1 \\ \beta_a &= 0 \\ \beta_j &= 0 \\ \cos \theta &= 1 \\ \text{sen} \theta &= 0 \\ \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta &= 1 \end{aligned}$$

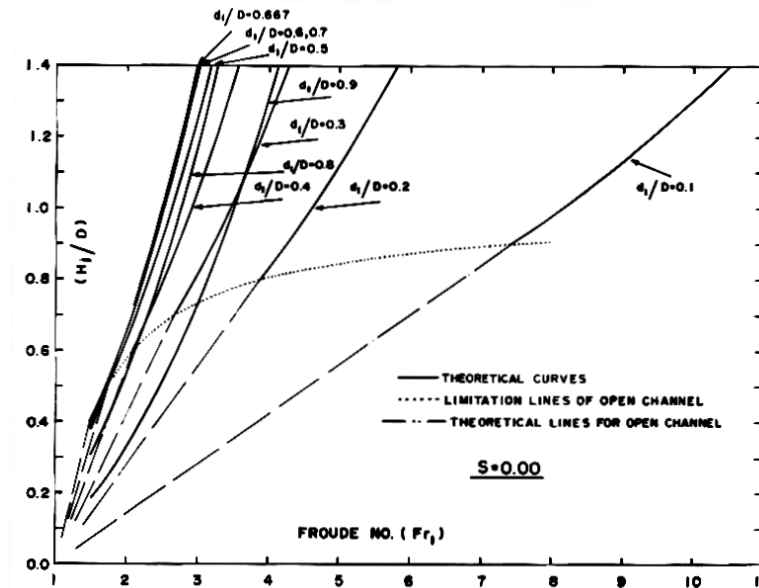
**Ecuación 27. Supuestos realizados por Smith y Chen para el cálculo de la longitud del resalto.**

Posteriormente, se simplifica la Ecuación 26 y se obtiene la expresión necesaria para el cálculo de la longitud del resalto en tuberías:

$$\frac{H_j}{D} = Fr_1^2 \left(\frac{d_1}{D}\right)^2 \left[ 1 - \frac{d_1}{D} \right] + \frac{1}{2} \frac{d_1}{D} \left[ \left(\frac{d_1}{D}\right) + \frac{1}{\frac{d_1}{D}} - 2 \right]$$

**Ecuación 28. Expresión final para el cálculo de la longitud del resalto hidráulico**

Finalmente, se utilizó la Ecuación 28 para comparar la longitud del resalto con el número de Froude aguas arriba de la tubería obteniendo los resultados mostrados en la Gráfica 9:



Gráfica 9. Longitud del resalto hidráulico versus el número de Froude aguas arriba (Chen, 1989).

Como se puede observar en la Gráfica 9, Smith y Chen concluyeron que para este ensayo en tuberías cuadradas con pendiente horizontal, la profundidad subsecuente del resalto era mayor al diámetro de la tubería, por lo cual esta se iba a presurizar aguas abajo. Por otro lado, para encontrar la profundidad crítica de la tubería y encontrar el sitio donde se forma el resalto hidráulico aguas arriba, ellos despejaron la siguiente ecuación:

$$Fr_1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d_1}{D} \right)^2 + 1 \right]}{\left( \frac{d_1}{D} \right)^2 \left( 1 - \frac{d_1}{D} \right)}}$$

Ecuación 29. Cálculo de Froude para profundidad crítica.

Y suponiendo que

$$d_2 = D$$

Ecuación 30. Supuesto final para cálculo de la profundidad crítica.

Se obtuvieron los siguientes números de Froude aguas arriba ( $Fr_1$ ) para diferentes relaciones de llenado

**Tabla 2. Resultados de números de Froude aguas arriba para diferentes relaciones de llenado (Chen, 1989).**

$d_1/D (-)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$Fr_1$	7.42	3.87	2.69	2.09	1.73	1.49

En conclusión se encontró que mientras el flujo sea más supercrítico, o sea, con menor profundidad de flujo aguas arriba, el resalto se va comportar de forma más violenta. Por último, si la profundidad aguas arriba del resalto es cercana al diámetro de la tubería, se formaría un resalto hidráulico y la ecuación de profundidades subsecuentes tendería a cero.

### Willi H. Hager y Helmut Stahl (1999)

El experimento de Hager y Stahl trató de los resaltos hidráulicos en tuberías circulares, enfocándose en la demostración experimental, entre el comportamiento de la tubería en la variación del número de Froude y la variación del momentum. Tal demostración partió del supuesto inicial de la profundidad subsecuente para calcular el área y de esta forma llegar a la presión que ejerce el agua en la tubería circular de la siguiente forma (Hager S. H., 1999):

$$\frac{A}{D} = y^{\frac{1}{5}}$$

**Ecuación 31. Profundidades subsecuentes.**

donde  $A$  es el área mojada,  $D$  es el diámetro de la tubería y  $y$  la relación de llenado. Por otro lado, se utilizó la Ecuación 32 para obtener una aproximación a la presión del agua en la tubería:

$$\frac{P}{\rho * g * D^3} = \frac{1}{2} * y^{2.5}$$

**Ecuación 32. Fuerza de presión del agua en una tubería.**

donde  $P$  es la Fuerza de presión,  $\rho$  es la densidad y  $g$  es la gravedad.

Por lo tanto, la ecuación del momentum quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} * y^{1.5} + \frac{Q^2}{g * D^5 * y^{1.5}} = \frac{1}{2} * y^{2.5} + \frac{Q^2}{g * D^5 * y^{1.5}}$$

**Ecuación 33. Ecuación de momentum en tuberías.**

En esta ecuación (Ecuación 33) Hager y Stahl determinaron que existía un error de un 20% estando en un rango entre  $0.2 < y < 0.9$ ; esta desventaja fue aceptable para ellos porque se

ajustaría empíricamente. Por otro lado, se introdujo la ecuación del número de Froude que había planteado Hager en 1990 en su libro “Froude number in Circular Conduits”.

$$F = \frac{Q}{\sqrt{g * D * h^4}}$$

**Ecuación 34. Número de Froude para conductos circulares.**

donde  $F$  es el número de Froude,  $h$  es la altura del flujo,  $D$  es el diámetro de la tubería y  $g$  es la gravedad. Ahora se procede a dividir la Ecuación 33 en  $1/2 * y_1$

$$1 + \frac{2Q^2}{g * D^5 * \left(\frac{h_1}{D}\right)^{3.75}} = \frac{y_1^{2.5}}{y_1^{2.5}} + \frac{2 * Q^2}{g * D^5 * y_1^{1.5} * y_1^{2.5}}$$

**Ecuación 35. Ecuación 33 reorganizada.**

Luego, sabiendo que

$$Y = \frac{Y_1}{Y_2}$$

**Ecuación 36. Relación de alturas aguas arriba y aguas abajo de una tubería parcialmente llena.**

Y aproximando 3.75 a 4, la Ecuación 35 queda de la siguiente forma:

$$1 + \frac{2Q^2}{g * D^5 * \left(\frac{h_1}{D}\right)^4} = Y^{2.5} + \frac{2 * Q^2 * y^{1.5}}{g * D^5 * y_1^{1.5} * \left(\frac{h_1}{D}\right)^4}$$

**Ecuación 37. Ecuación de momentum en una tubería fluyendo parcialmente llena.**

Y reemplazando la Ecuación 34 en la Ecuación 37, quedaría de la siguiente forma:

$$1 + 2 * F_1^2 = Y^{2.5} + 2 * F_1^2 * Y^{-1.5}$$

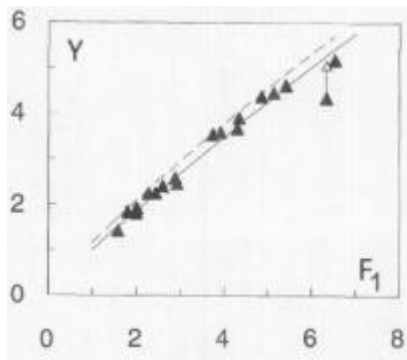
**Ecuación 38. Ecuación final de momentum en una tubería fluyendo parcialmente llena.**

Para números de Froude mayores a 2 ( $F_1 > 2$ ), una aproximación sería:

$$Y = 1.16 * Fr_1^{0,85}$$

**Ecuación 39. Cálculo de profundidades subsecuentes para números de Froude aguas arriba mayores a 2.**

Este experimento fue realizado con una tubería circular en acrílico con un diámetro de 240 mm, una pendiente del 0,5% y una longitud de 6 m. Stahl y Hager realizaron el experimento y los primeros resultados que obtuvieron fueron los siguientes:



**Gráfica 10. Profundidades subsecuentes según el número de Froude (Hager, 1999).**

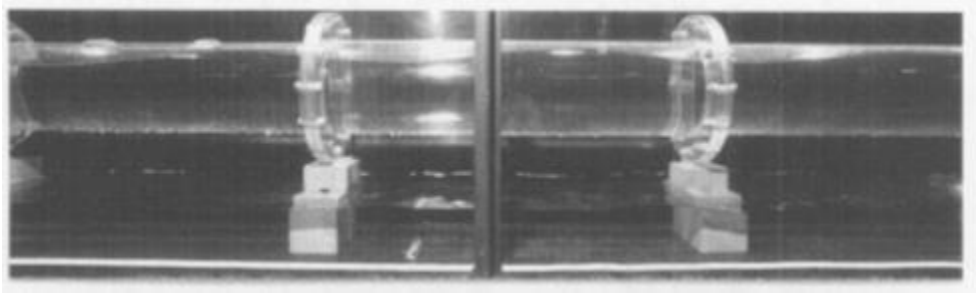
Como se puede observar en la Gráfica 10, los resultados obtenidos en el experimento mostraron un número de Froude entre los rangos de {1,5 y 6,5}, lo cual presenta que el flujo se va a mantener en estado supercrítico. Por esta razón, Hager y Stahl se dieron cuenta que habían sobrestimado la Ecuación 39 a causa de la viscosidad, por lo cual para satisfacer la condición  $Y(F1 = 1) = 1$  plantearon la siguiente ecuación:

$$Y = 1.16 * F1^{0,90}$$

**Ecuación 40. Nuevo cálculo de profundidades subsecuentes para números de Froude aguas arriba mayores a 2.**

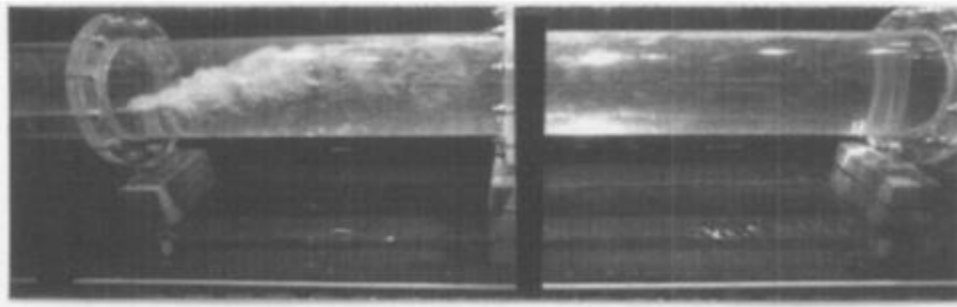
En conclusión, se pudo determinar que para secciones circulares en tuberías fluyendo parcialmente llenas, existen cuatro diferentes tipos de resaltos: ondular, normal, flujo recirculante y con turbulencia presurizada.





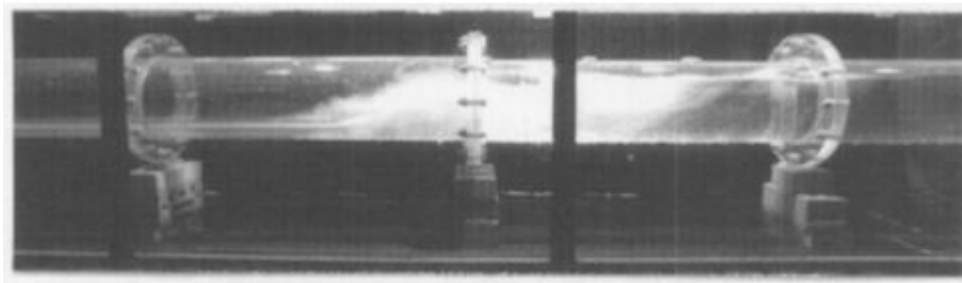
**Gráfica 11.** Tipo de resalto ondular con números de Froude  $< 1.5$  (Hager, 1999).

- El resalto hidráulico ondular se presenta cuando el número de Froude es 1.5; se reconoce por presentar un comportamiento ondular y permanente durante todo el trayecto.



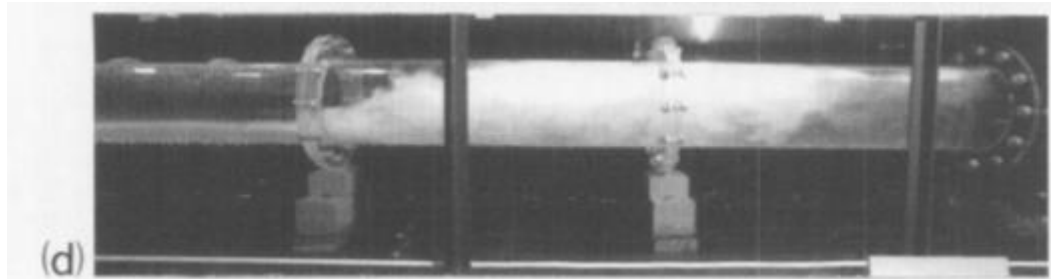
**Gráfica 12.** Tipo de resalto ondular con números de Froude entre (1.5-2) (Hager, 1999).

- El resalto hidráulico normal se presenta cuando el número de Froude se encuentra entre un rango de {1,5 y 2}; se reconoce porque la tubería se presuriza y las ondas que genera se pierden aguas abajo.



**Gráfica 13.** Tipo de resalto ondular con números de Froude entre (2-4.1) (Hager, 1999).

- El resalto hidráulico de flujo recirculante se presenta cuando el número de Froude se encuentra entre un rango de {2 y 4,1}; se reconoce por formar remolinos laterales que recirculan a través de toda la tubería aguas abajo.



**Gráfica 14. Tipo de resalto ondular con números de Froude > 6.5 (Hager, 1999).**

- El último tipo y más fuerte de resalto hidráulico es con la tubería presurizada. Este se presenta con números de Froude superiores a 6,5 y se caracteriza por tener una profundidad de flujo aguas abajo mayor al diámetro de la tubería, lo cual hace que la tubería en esta sección se presurice.

### Steven Michell (2002)

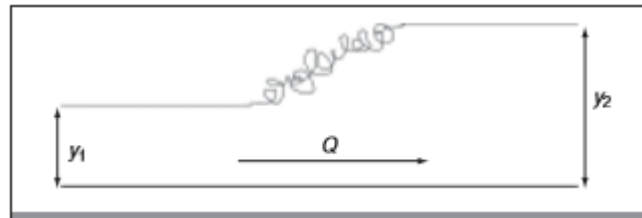
Este conocido ingeniero civil de la Universidad de Bank, al sur de Londres, trabajó sobre los resaltos hidráulicos en canales abiertos con diferentes tipos de tuberías, entre las cuales estaban las secciones trapezoidales, circulares, rectangulares y triangulares. Steven Michell se encargó de encontrar las diferencias entre secciones y estudiar el comportamiento del flujo a través de cada una de estas. Además, encontró que los resaltos hidráulicos son fundamentales en la hidráulica de canales abiertos, y por medio de unos algoritmos estimó la relación de alturas en un resalto hidráulico y el número de Froude para tuberías parcialmente llenas. El desarrollo de estos algoritmos se basó en la conservación del momentum y usó valores estimados para obtener un radio adecuado para la tubería por medio del proceso iterativo de Newton-Raphson (Michell, 2008).

El desarrollo de su estudio comenzó con un modelo de sección rectangular en un canal horizontal en el que supuso que la respectiva ecuación de momentum se podía expresar de la siguiente forma:

$$\bar{Z}_1 * A_1 + \frac{Q^2}{g * A_1} = \bar{Z}_2 * A_2 + \frac{Q^2}{g * A_2}$$

**Ecuación 41. Ecuación de Momentum.**

donde  $\bar{Z}$  es la distancia vertical entre el centroide del área del flujo y la superficie del agua,  $A$  es el área transversal del canal,  $Q$  es el caudal de entrada y  $g$  es la aceleración de la gravedad. La notación que se presenta como subíndices 1 y 2 hace referencia a la diferencia de alturas que ocurre el resalto, como se observa en la Gráfica 15:



**Gráfica 15. Grafica de elevación del resalto hidráulico (Michell, 2008)**

### 2.1 Canales rectangulares

Para un canal rectangular  $\bar{Z} = \frac{y}{2}$  y  $Q = q * B$ , donde  $y$  es la altura del flujo,  $q$  es el caudal por unidad de área y  $B$  es el ancho del canal. Obteniendo una mejor expresión:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} * (\sqrt{1 + 8 * F_1^2} - 1)$$

**Ecuación 42. Relación entre alturas para canales rectangulares.**

donde  $F$  es el número de Froude dado por  $F = \frac{v}{\sqrt{g*y}}$ , y  $v$  es la velocidad del flujo dada por  $v = \frac{Q}{A}$ . En la Ecuación 42 es posible obtener una aproximación para la relación entre alturas aguas arriba y aguas abajo. Por otro lado, en un canal horizontal se pueden calcular las pérdidas de energía que se presentan por el resalto hidráulico por medio de la siguiente expresión:

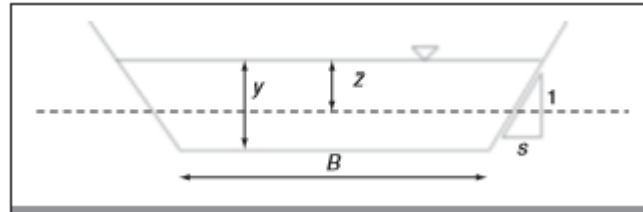
$$\Delta E = \left( y_1 + \frac{v_1^2}{2 * g} \right) - \left( y_2 + \frac{v_2^2}{2 * g} \right)$$

**Ecuación 43. Expresión para calcular pérdidas de energía en canales rectangulares.**

### 2.2 Canales trapezoidales

Para el caso de un canal con sección trapezoidal fluyendo parcialmente lleno, estas ecuaciones no son equivalentes. Por esta razón se debe realizar el siguiente análisis:

Para calcular el área del canal se tomó la siguiente expresión  $A = (B + s * y) * y$ , como se observa en la siguiente gráfica:



**Gráfica 16. Definición de secciones para canal trapezoidal (Michell, 2008).**

Por lo tanto para encontrar el centroide del área transversal,  $\bar{Z}$  se expresa de la siguiente forma

$$\bar{Z}_1 = \frac{1}{4s} * (4sy_1 + 2B - \sqrt{4B^2 + 8s(B + sy_1)y_1})$$

**Ecuación 44. Centroide aguas arriba del área transversal de un canal de sección trapezoidal.**

$$\bar{Z}_2 = \frac{1}{4s} * (4sy_2 + 2B - \sqrt{4B^2 + 8s(B + sy_2)y_2})$$

**Ecuación 45. Centroide aguas abajo del área transversal de un canal de sección trapezoidal.**

La notación que se presenta como subíndices de 1 y 2, hace referencia a la diferencia de alturas luego de que ocurre el resalto. La fórmula del área puede ser reemplazada con la Ecuación 41 de momentum, para obtener

$$\bar{Z}_1 * (B + sy_1)^2 y_1^2 + \frac{Q^2}{g} - \left( \bar{Z}_2 A_2 + \frac{Q^2}{g * A_2} \right) * ((B + sy_1)y_1) = 0$$

**Ecuación 46. Ecuación de momentum en un canal trapezoidal.**

Reemplazando  $\bar{Z}_1$

$$\frac{1}{4s} * (4sy_1 + 2B - \sqrt{4B^2 + 8s(B + sy_1)y_1}) * (B + sy_1)^2 y_1^2 + \frac{Q^2}{g} - \left( \bar{Z}_2 A_2 + \frac{Q^2}{g * A_2} \right) * ((B + sy_1)y_1) = 0$$

**Ecuación 47. Ecuación de momentum reemplazada en un canal trapezoidal.**

Suponiendo que el valor de  $y_2$  se conoce, se puede concluir que para calcular  $y_1$  se utiliza la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{4s} * \left\{ A_1 \left[ 4s - \frac{1}{2\sqrt{\phi}} * (8s(4sy_1 + 2B) - (8s(B + sy_1) + 8s^2y_1) + (4sy_1 + 2B - \sqrt{\phi})) \right. \right. \\ \left. \left. * (2sy_1^2(b + sy_1) + sy_1(B + sy_1^2)) \right\} - \left[ \bar{Z}_2 A_2 + \frac{Q^2}{gA_2} \right] (2y_1s + B)$$

**Ecuación 48. Cálculo de Profundidades subsecuentes en un canal trapezoidal.**

Con  $\phi = (4sy_1 + 2B) - 8sy_1(B + sy_1)$  y usando el método iterativo con la ecuación de Newton Raphson

$$y_n = y_{n-1} - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

**Ecuación 49. Método iterativo de Newton-Raphson.**

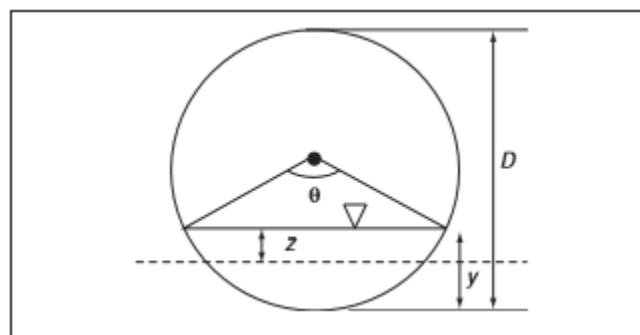
### 2.3 Canales circulares

Para el caso de una tubería de sección circular fluyendo parcialmente llena se debe tener en cuenta el diámetro. Para este tipo de tuberías calcular  $Z$  de forma analítica no es posible, por lo cual se procede a realizar una optimización numérica de aproximación polinómica de orden cinco para  $D=1$ , llegando a la siguiente ecuación:

$$\bar{Z} = -0.000075\theta^5 + 0.000743\theta^4 - 0.004636\theta^3 + 0.03232\theta^2 - 0.00798\theta + 0.00232$$

**Ecuación 50. Centroide del área transversal de una tubería de sección circular.**

donde  $\theta$  es el ángulo en el centro de la tubería conectando las líneas de la superficie de agua como se muestra en la Gráfica 17.



**Gráfica 17. Definición de ángulo para tuberías circulares parcialmente llenas (Michell, 2008).**

De esta forma es posible obtener otra aproximación para  $\frac{\bar{Z}}{D}$  de forma polinómica, con un rango para  $\frac{y}{D}$  entre 0.02-0.98. Luego se deriva la Ecuación 50 con respecto a  $\theta$  y se obtiene

$$\frac{d\bar{Z}}{d\theta} = -0.000376\theta^4 + 0.00297\theta^3 - 0.0139\theta^2 + 0.0646\theta - 0.00798$$

**Ecuación 51. Derivada del centroide del área transversal de una tubería de sección circular.**

Con las expresiones ya obtenidas, se realiza el proceso iterativo de Newton Raphson para obtener una aproximación de  $\theta$ . Los resultados que se obtuvieron para  $y$  y para  $A$  en términos del ángulo  $\theta$  son:

$$y = \frac{D}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

**Ecuación 52. Alturas obtenidas por método de Newton en términos de  $\theta$ .**

$$A = \frac{D^2}{8} (\theta - \sin \theta)$$

**Ecuación 53. Área obtenida por método de Newton en términos de  $\theta$ .**

Usando la ecuación de momentum y utilizando el valor obtenido de  $Z$  calculado anteriormente se puede obtener la siguiente ecuación:

$$f_{(\theta_1)} = \bar{Z}_1 \frac{D^4}{64} (\theta_1 - \sin \theta_1)^2 + \frac{Q^2}{g} - \left( \bar{Z}_2 A_2 + \frac{Q^2}{g A_2} \right) \frac{D^2}{8} (\theta_1 - \sin \theta_1)$$

**Ecuación 54. Función para el cálculo de profundidades subsecuentes en una tubería circular.**

Ahora, se procede a volver a derivar la ecuación con respecto a  $\theta_1$

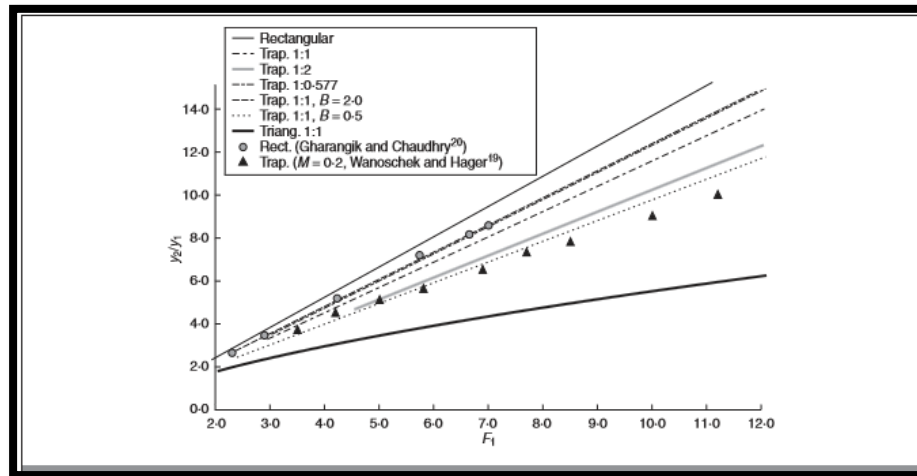
$$f'_{(\theta_1)} = \frac{D^4}{64} (\theta_1 - \sin \theta_1)^2 \frac{dZ_1}{d\theta_1} + 2\bar{Z}_1 (\theta_1 - \sin \theta_1) (1 - \cos \theta_1) - \left( \bar{Z}_2 A_2 + \frac{Q^2}{g A_2} \right) \frac{D^2}{8} (1 - \cos \theta_1)$$

**Ecuación 55. Derivada de la función para el cálculo de profundidades subsecuentes en una tubería circular.**

Usando las expresiones de la Ecuación 54 y la Ecuación 55 es posible aplicar el método de Newton Raphson aplicado en el método de la sección trapezoidal para encontrar los valores de  $\theta_1$  y  $y_1$ .

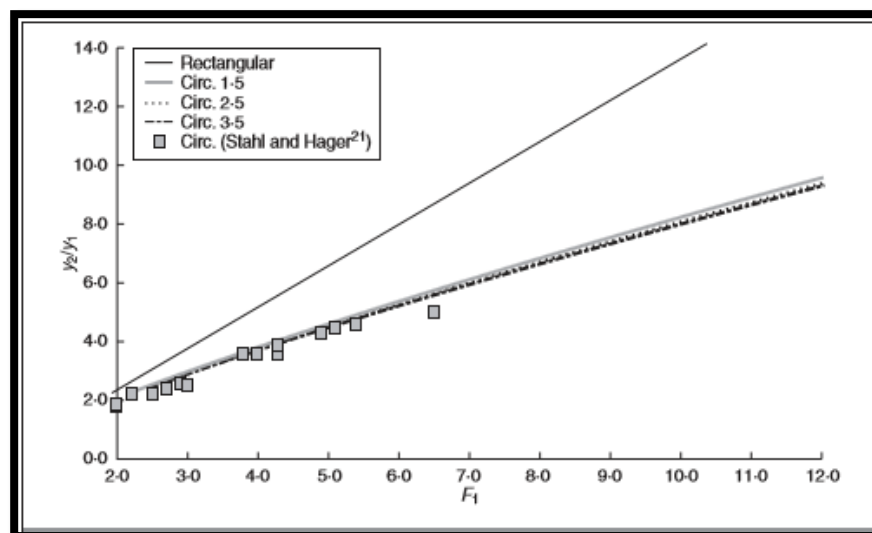
## 2.4 Resultados obtenidos de todas las secciones

Finalmente, los resultados que se obtuvieron de estos tres ensayos para encontrar ciertas similitudes y diferencias en cada una de estas secciones fueron los siguientes:



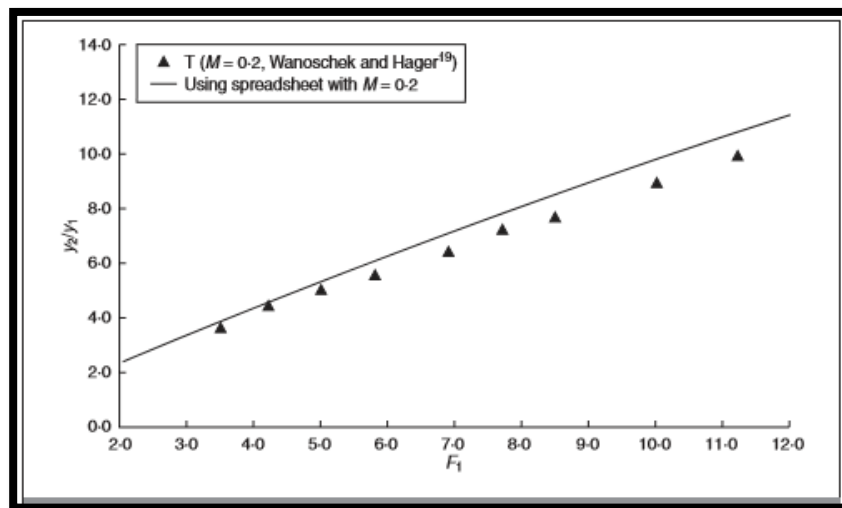
**Gráfica 18. Relación de alturas VS Froude 1 del canal trapezoidal (Michell, 2008).**

Como se puede observar en la Gráfica 18, se trabajaron los canales trapezoidales con diferentes pendientes y diferentes anchos para estudiar el comportamiento de estas. Steven Michell analizó que, al variar el ancho del canal, la relación de alturas aumentaba de forma proporcional al ancho. Además, encontró que los valores de  $Y_2/Y_1$  decrecían para un  $Y_1$  dado al aumentar la pendiente del canal. En el caso de los datos obtenidos por Wanoschek y Hager se puede analizar que ellos presentaron sus resultados en términos del parámetro  $M (s_{y_1})/b = 0.2$  por lo cual concluyó que no era posible generar una comparación directa con los resultados de este estudio. Por esta razón recurrieron a un ajuste en la gráfica y calcularon los coeficientes mediante una recta más ajustada utilizando la binomial como se muestra en la Gráfica 19.



**Gráfica 19. Relación de alturas VS Froude 1 de la tubería circular (Michell, 2008).**

Para la tubería circular se observó en la Gráfica 19 que el comportamiento de esta a diferentes diámetros presentó un  $Y_2/Y_1$  de forma constante para un  $Y_1$  dado, por lo cual se descartó que los cambios dependieran del diámetro de la tubería. Además se analizó que todos los resultados presentados por el laboratorio coinciden con los datos teóricos calculados anteriormente por Stahl y Hager en 1999.

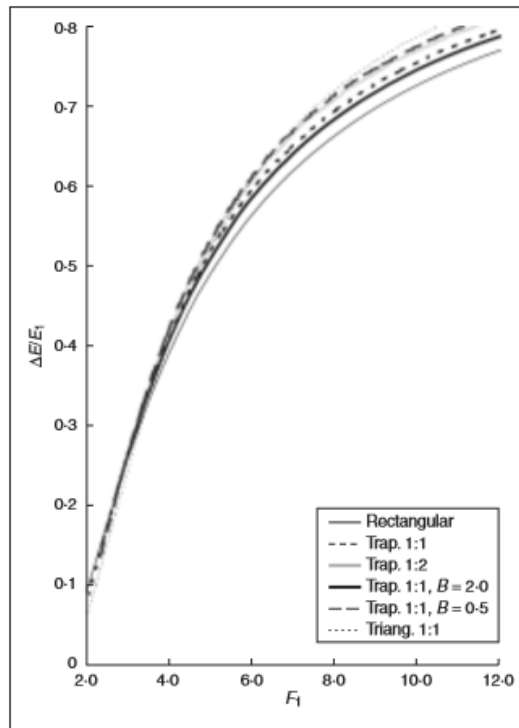


**Gráfica 20. Comparación de datos teóricos y experimentales del canal trapezoidal (Michell, 2008).**

Como se observa en la Gráfica 20, al realizar el ajuste para un  $M=0.2$  se encontró que el comportamiento de la recta era de forma similar a lo propuesto por Wanoschek y Hager. Pero al analizar todas las tuberías se encontró que para  $Fr_1 > 6.0$  las tuberías circulares presentaban un mejor ajuste y comportamiento que los canales trapezoidales o rectangulares, basándose en los resultados teóricos. Asimismo, se encontró que al comenzar la turbulencia en el inicio del resalto, el perfil hidrostático no es tan válido y que las fuerzas de momentum verticales son importantes.

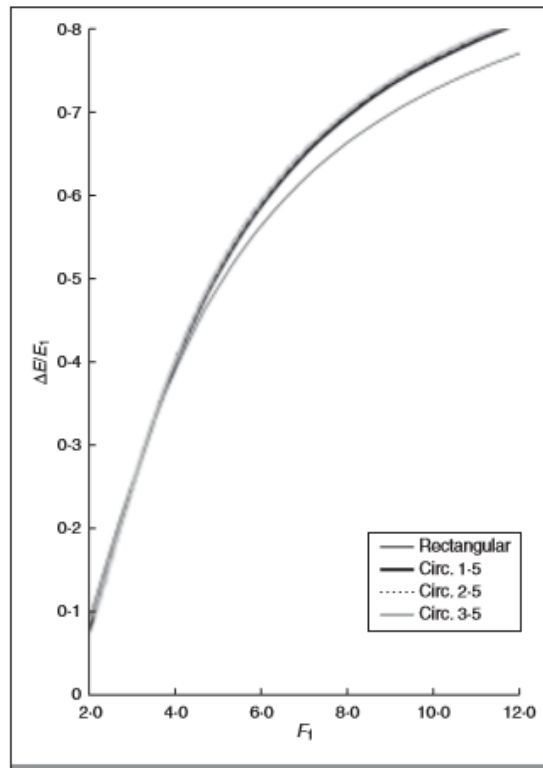
Finalmente, se desarrolló un algoritmo en el experimento para encontrar las pérdidas de energía que causaba cada tipo de resalto en cada una de las tuberías en las que se realizaron las pruebas. De esta forma se encontró que un moderado incremento en pérdidas de energía era muy variable para el canal trapezoidal en comparación de los demás y que la tubería circular era la que presentaba un comportamiento más estable. A continuación se mostrarán los resultados obtenidos en cada una de las secciones.





**Gráfica 21. Pérdidas de energía contra el número de Froude 1 en canales trapezoidales.**

Como se había dicho anteriormente, en canales trapezoidales se presentan cambios constantes en cada una de las pendientes trabajadas y se puede observar que el canal de mayor pendiente que se trabajó encontraba su estabilidad de forma más rápida que los demás. Por otro lado, en las tuberías circulares que se trabajaron, se encontró que no había cambios importantes en los cambios de pendientes y que la única pendiente que se comportó de manera irregular con respecto a los demás ensayos, fue la de mayor pendiente, comportándose de forma similar a las demás secciones que se trabajaron. A continuación se presentan los resultados obtenidos en la tubería circular:



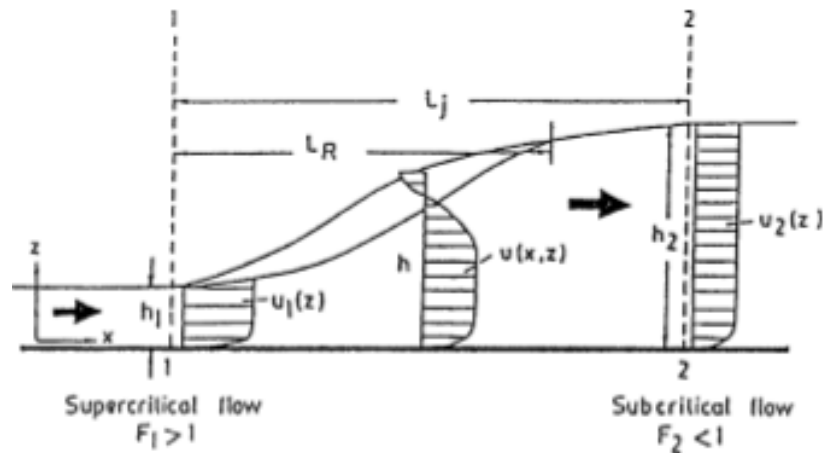
**Gráfica 22. Pérdidas de energía contra el número de Froude 1 en tuberías circulares.**

### Journal of Hydraulic Research (2006)

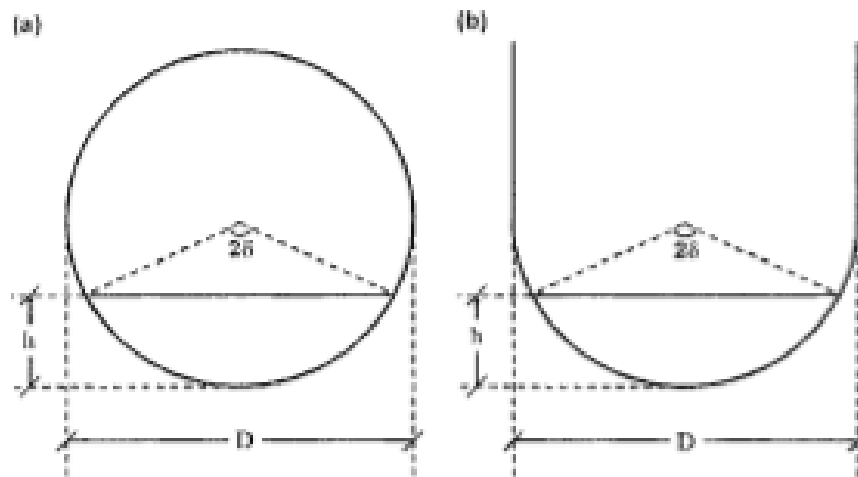
La revista internacional de ingeniería "International Association of Hydraulic Engineering and Research", publicada por Taylor & Francis, publicó un análisis del comportamiento de los resaltos hidráulicos en canales circulares y en forma de u, por el poco estudio y alta complejidad que estos generan en ingeniería civil. Este estudio comenzó basándose en los experimentos anteriores enfocados en modelos matemáticos y analíticos como el de Rajaratnam (1967) o el de Hager (1992). Estos estudios fueron mostrados en canales rectangulares o con números de Froude superiores a 4 para encontrar diferentes enfoques hidráulicos como: el comportamiento del resalto hidráulico, la distribución hidrostática de presiones, las pérdidas de energías a lo largo del canal, entre otras (Francis, 2006).

#### 2.1 Estructura del resalto hidráulico

Primero que todo se comienza con la explicación de todas las partes que contiene un resalto hidráulico y de las secciones que se trabajaron en este ensayo para entender mejor las dimensiones y los términos que se utilizaron, tal como se muestra en las Gráfica 23 y en la Gráfica 24.



Gráfica 23. Partes que componen un resalto hidráulico (Francis, 2006).



Gráfica 24. Sección circular y en forma de U que se van a trabajar en el experimento (Francis, 2006).

## 2.2 Ecuaciones recomendadas en resaltos hidráulicos

En un flujo turbulento el flujo se somete a diferentes gradientes de presiones. Es por esto que en este caso se trabajó con la ecuación de continuidad y la ecuación de Reynolds en el sentido x del flujo, expresándolas a continuación:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

**Ecuación 56. Gradiente de presiones.**

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

**Ecuación 57. Ecuación de la continuidad.**

$$\rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

**Ecuación 58. Ecuación de Reynolds.**

donde  $u$  es la velocidad en el sentido  $x$  del flujo,  $w$  es la velocidad normal en el sentido  $z$ ,  $p$  es la presión del agua,  $\rho$  es la densidad del flujo y  $g$  es la gravedad. Además, se conocen los esfuerzos cortantes de Reynolds como:

$$\tau_{xx} = -\rho \overline{u'u'}$$

$$\tau_{zx} = -\rho \overline{u'w'}$$

$$\tau_{zz} = -\rho \overline{w'w'}$$

**Ecuación 59. Esfuerzos cortantes de Reynolds.**

En el fondo del canal, las condiciones de fronteras de la velocidad de desplazamiento se toman como:

$$z = 0, u = w = 0, \tau_{ij} = 0$$

**Ecuación 60. Condiciones de frontera de la velocidad de desplazamiento.**

Como la superficie libre  $z = h(x)$  es una línea de corriente donde las tensiones y las presiones son constantes a lo largo de la tubería, se encuentra que los esfuerzos cortantes se desprecian. Del mismo modo las condiciones de la superficie libre aerodinámica son:

$$z = h(x), \quad u = u_{h(x)}, \quad w = u_h \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \tau_{ii} \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

**Ecuación 61. Condiciones de la superficie libre aerodinámica.**

### 2.3 Condiciones del resalto

Para que se consigan las condiciones adecuadas en el resalto es necesario expresar dos ecuaciones fundamentales: la primera es la ecuación de equilibrio de momentum aguas arriba y aguas abajo de la tubería, y la segunda ecuación es la del número de Froude aguas arriba.

$$w + \frac{Q^2}{gA_1} = w + \frac{Q^2}{gA_2}$$

**Ecuación 62. Ecuación de momentum para canales circulares y en forma de U.**

Reescribiendo la Ecuación 62, quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{A_1 A_2}{A_2 - A_1} (W_2 - W_1) = \frac{Q^2}{g}$$

**Ecuación 63. Ecuación de momentum para canales circulares y en forma de U.**

Y sabiendo que el número de Froude aguas arriba se expresa como:

$$Fr_1^2 = \frac{Q^2}{g A_1^3} \frac{dA_1}{dh_1}$$

**Ecuación 64. Cálculo del número de Froude aguas arriba del canal.**

donde  $Fr$  es el número de Froude aguas arriba del canal. La segunda ecuación muestra que el producto de las velocidades subsecuentes en el resalto permanece constante.

$$U_1 U_2 = U_c^2 = gh_c, \quad h_c = \frac{W_2 - W_1}{A_2 - A_1}$$

**Ecuación 65. Velocidades subsecuentes en el resalto hidráulico.**

donde  $U_c = \sqrt{gh_c}$  es la velocidad crítica. Además, la ecuación de profundidad de Reynolds en el resalto hidráulico, basada en la Ecuación 61 se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{T_{xx} A^2 (A_2 - A_1)}{\rho g} = WA(A_2 - A_1) - A(W_2 A_2 - W_1 A_1) + A_2 A_1 (W_2 - W_1)$$

**Ecuación 66. Ecuación de profundidad de Reynolds en el resalto hidráulico.**

Para seguir con la demostración y simplificación de la ecuación de momentum, es necesario conocer que:

$$\tau_{nn} = \rho v_t \frac{\partial U}{\partial x}$$

**Ecuación 67. Viscosidad de remolino.**

donde

$$v_t = \epsilon (U_1 - U_2)(h_2 - h_1)$$

**Ecuación 68. Gradiente promedio de la velocidad axial.**

En el resalto hidráulico, para la viscosidad cinemática en el remolino, la velocidad es asociada con  $\Delta U = U_1 - U_2$  y la longitud con  $\Delta h = h_1 - h_2$  y  $\epsilon$  a una variable independiente asociada con la geometría del canal. De esta forma, la ecuación del resalto hidráulico puede ser simplificada de la siguiente forma:

$$\epsilon (1 - \alpha) \frac{\partial A}{\partial x} + \left( \gamma_1 \frac{W}{W_2} - \gamma_3 \right) A + \gamma_2 A = 0, \quad X = \frac{x}{h_2}$$

**Ecuación 69. Ecuación simplificada del resalto hidráulico.**

donde las constantes  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$  son:

$$\gamma_1 = \frac{W_2}{W_2 - W_1}, \quad \gamma_2 = \frac{A_2}{A_2 - A_1}, \quad \gamma_3 = \frac{W_2 A_2}{(W_2 - W_1)(A_2 - A_1)}$$

**Ecuación 70. Constantes para el cálculo del resalto hidráulico.**

Ahora se procede a obtener las condiciones de frontera para que se cumpla la Ecuación 69:

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\alpha, \quad A \rightarrow A_1, \quad W \rightarrow W_1; \\ x \rightarrow +\alpha, \quad A \rightarrow A_2, \quad W \rightarrow W_2 \end{aligned}$$

**Ecuación 71. Condiciones de frontera para el cálculo del resalto hidráulico aguas arriba y aguas abajo del canal.**

Y para obtener el cálculo del resalto hidráulico aguas arriba y aguas abajo en el canal es necesario expresar la Ecuación 69 como:

$$\int \left[ \left( \gamma_1 \frac{W}{W_2} - \gamma_3 \right) A + \gamma_2 A \right]^{-1} dA = -\frac{X + L}{\epsilon (1 - \alpha)}$$

**Ecuación 72. Cálculo del resalto hidráulico dentro de las condiciones de frontera.**

En la solución anterior, aparece una constante L la cual hace referencia a la longitud del resalto. Por lo cual es necesario calcular esta constante en la dirección axial del fluido, expresándose de la siguiente forma:

$$L_j = \frac{h_2 - h_1}{\left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_*}$$

**Ecuación 73. Cálculo de la longitud del resalto a través de la pendiente y las profundidades aguas arriba y aguas abajo.**

donde  $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_*$  es la pendiente de la superficie en  $h = h_*$ , donde  $h_* = (h_2 + h_1)/2$  es la profundidad media. Basada en la Ecuación 72 del resalto hidráulico, la ecuación de la longitud del resalto está dada por:

$$\frac{Lj}{h_2} = \epsilon (1 - \alpha)\Lambda, \quad \alpha = \frac{h_2}{h_1}$$

$$\Lambda = \frac{(1 - \alpha)}{\left(\gamma_1 \left(\frac{W_*}{W_2}\right) - \gamma_3\right) A_* + \gamma_2 A_1} h_2 \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_*$$

**Ecuación 74. Cálculo de la longitud del resalto teniendo en cuenta la profundidad media.**

donde  $A_*$  y  $\left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_*$  dependen del cálculo de  $h_*$ .

#### 2.4 Ecuación del resalto hidráulico en canales circulares y en forma de U.

En canales circulares y en forma de U la profundidad axial ( $h$ ), el área del canal ( $A$ ) y la presión por unidad de peso ( $W$ ), pueden ser adimensionales mediante las características de la escala ( $D$ ) del canal:

$$\frac{h}{D} = Y, \quad \frac{A}{D^2} = \Phi(Y), \quad \frac{W}{D^3} = \Psi(Y)$$

**Ecuación 75. Términos importantes para el cálculo del resalto hidráulico en canales circulares y en forma de U.**

La Ecuación 62 y la Ecuación 63 mostradas anteriormente para la formación del resalto hidráulico, se convierten en términos de  $\Phi$  y  $\Psi$ .

$$\frac{\Phi_2 \Phi_1}{\Phi_2 - \Phi_1} (\Psi_2 - \Psi_1) = \frac{Q^2}{g * D^5}$$

$$U_2 U_1 = gD \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\Phi_2 - \Phi_1}$$

**Ecuación 76. Cálculo del Resalto hidráulico en términos de  $\Psi$  y  $\Phi$ .**

También se expresa la Ecuación 64 del número de Froude en términos de  $\Phi$  y  $\Psi$ .

$$Fr_1^2 = \frac{Q^2}{gD^5} \left( \frac{1}{\Phi_1^3} \right) \frac{d\Phi_1}{dY_1}$$

**Ecuación 77. Cálculo del número de Froude en términos de  $\Psi$  y  $\Phi$ .**

La integral que relaciona la Ecuación 72 en términos de la Ecuación 75 es:

$$\int \left[ \left( \gamma_1 \frac{\Psi_{(d)}}{\Psi_2} - \gamma_3 \right) \Phi_{(d)} + \gamma_2 \Phi_{(1)} \right]^{-1} x \frac{d\Phi_{(d)}}{d\delta} d\delta = -\frac{X+L}{\epsilon(1-\alpha)}, \quad X = \frac{x}{h_2}$$

**Ecuación 78. Integral para el cálculo del resalto hidráulico.**

donde,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son expresados como

$$\gamma_1 = \frac{\Psi_2}{\Psi_2 - \Psi_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1}, \quad \gamma_3 = \frac{\Psi_2 \Phi_2 - \Psi_1 \Phi_1}{(\Psi_2 - \Psi_1)(\Phi_2 - \Phi_1)}$$

**Ecuación 79. Definición de variables.**

Basada en la Ecuación 72 del resalto hidráulico, la ecuación de la longitud del resalto en términos de  $\Phi$  y  $\Psi$  está dada por:

$$\frac{Lj}{h_2} = \epsilon(1-\alpha)\Lambda, \quad \alpha = \frac{Y_1}{Y_2}$$

$$\Lambda = \frac{(1-\alpha)Y_2\Omega_*}{\left( \gamma_1 \left( \frac{\Psi_*}{\Psi_2} \right) - \gamma_3 \right) \Phi_* + \gamma_2 \Phi_1}, \quad \Omega_* = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)_*$$

**Ecuación 80. Cálculo de la longitud del resalto en términos de  $\Phi$  y  $\Psi$ , teniendo en cuenta la profundidad media.**

### 2.4.1 Ecuación del resalto hidráulico en canales circulares

La profundidad de flujo axial ( $h$ ), está relacionada con el diámetro del canal circular como:

$$\frac{h}{D} = Y = \frac{1}{2}(1 - \cos\delta)$$

**Ecuación 81. Relación entre profundidad de flujo y diámetro en canales de sección circular.**



donde  $\delta$  es el ángulo del centro de la tubería como se observó en la Gráfica 24; para el cálculo del área (A) y de la fuerza de presión por unidad de peso (W) se expresan las siguientes ecuaciones:

$$\frac{A}{D^2} = \Phi_{(\delta)} = \frac{1}{4}(\delta - \sin^3 \delta \cos \delta),$$

$$\frac{W}{D^3} = \Psi_{(\delta)} = \frac{1}{8}(\sin \delta - \frac{1}{3}\sin^3 \delta - \delta \cos \delta)$$

**Ecuación 82. Cálculo del área y de la fuerza de presión por unidad de peso en canales circulares.**

Reemplazando en la ecuación del número de Froude quedaría:

$$Fr_1^2 = \frac{Q^2}{gD^5} \frac{64 \sin \delta_1}{(\delta_1 - \sin \delta_1 \cos \delta_1)^3}$$

**Ecuación 83. Número de Froude para canales circulares.**

La profundidad crítica en estas tuberías se presenta cuando  $Fr = 1$  (Hager S. H., 1999).

$$\frac{h_{cr}}{D} = \left( \frac{Q^2}{gD^5} \right)^{\frac{1}{4}}$$

**Ecuación 84. Cálculo de la profundidad crítica en canales de sección circular.**

Debido al complicado cálculo en tuberías circulares fluyendo parcialmente llenas, Hager en 1999 planteó las siguientes ecuaciones simplificadas:

$$\Phi_{(Y)} = \frac{A}{D^2} = Y^{3/2} , \quad \Psi_{(Y)} = \frac{W}{D^3} = \frac{1}{2}Y^{\frac{5}{2}}$$

**Ecuación 85. Simplificación de ecuaciones para canales circulares fluyendo parcialmente llenos.**

Esto es válido para un rango entre  $0.2 < Y < 0.9$  para un error máximo del 20%. Para el caso del número de Froude y el resalto hidráulico las ecuaciones se expresan de la siguiente forma:

$$H_2^4 - (1 + 2F_1^2)H_2^{\frac{3}{2}} + 2F_1^2 = 0 , \quad F_1 = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} \frac{1}{Y_1^2}$$

**Ecuación 86. Número de Froude simplificado para canales circulares fluyendo parcialmente llenos.**

Y para el resalto hidráulico

$$\frac{L_j}{h_2} = \epsilon \frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 1}$$

**Ecuación 87. Longitud del resalto simplificado para canales circulares fluyendo parcialmente llenos.**

#### 2.4.2 Ecuación del resalto hidráulico en canales en forma de U

Los canales en forma de U constan de una parte inferior semi-circular con diámetro D y en la parte superior constan de un diámetro constante como se observa en la Gráfica 24. El área (A) y la fuerza de presión por unidad de peso (W) están dados por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{A}{D^2} = \phi(Y) = Y - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} ,$$

$$\frac{W}{D^3} = \psi(Y) = \frac{1}{2} \left( Y - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\pi}{8} \left( Y - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{12}$$

**Ecuación 88. Cálculo del área y la fuerza de presión por unidad de peso para canales en forma de U.**

De esta forma, despejando  $\phi$  y  $\psi$  y utilizando las simplificaciones de Hager, las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

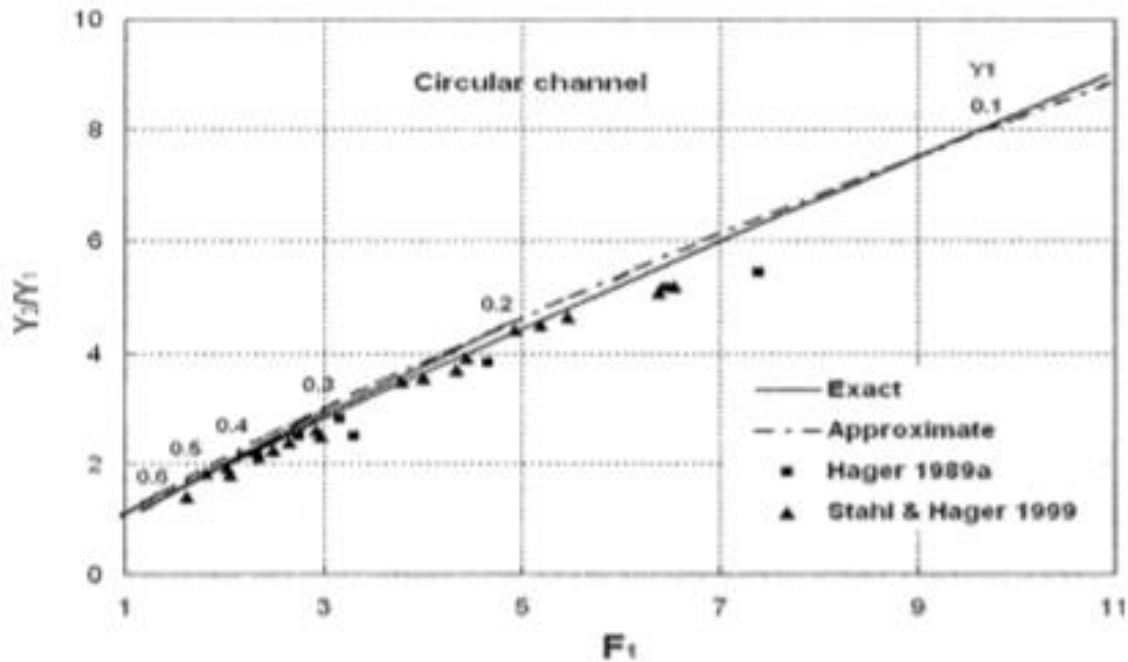
$$\phi(Y) = \frac{A}{D^2} = \frac{3}{4} y^{\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{1}{3} Y \right)$$

$$\psi(Y) = \frac{W}{D^3} = \frac{8}{15} y^{\frac{5}{2}} \left( 1 - \frac{1}{4} Y \right)$$

**Ecuación 89. Simplificación del modelo de Hager para canales en forma de U.**

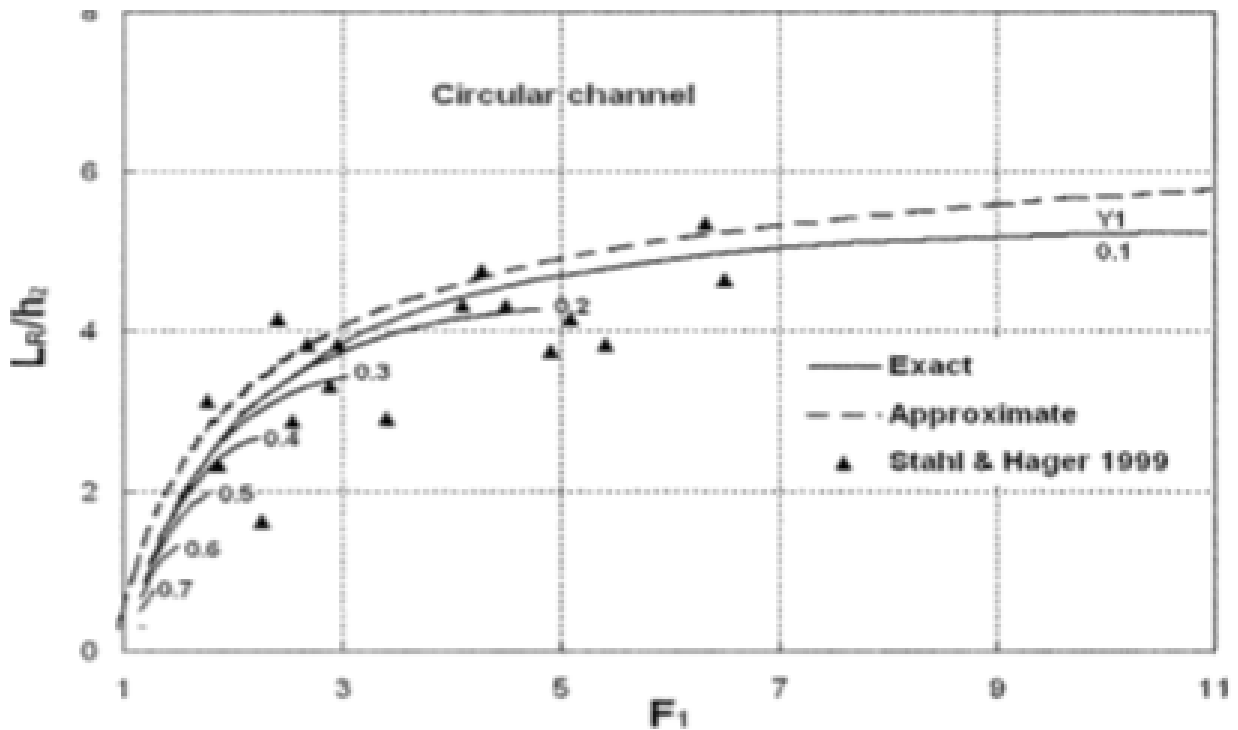
### 2.5 Resultados y conclusiones

Luego de realizar la toma de los datos, se procedió a verificar los resultados obtenidos con los propuestos por Stahl y Hager en 1999. Para esto graficaron dos tipos de curvas en cada uno de los canales: la relación entre alturas subsecuentes  $Y_1/Y_2$  contra en número de Froude aguas arriba y la relación entre la longitud del resalto y la altura aguas abajo contra el número de Froude aguas arriba. Los primeros resultados mostrados fueron los del canal circular presentando las siguientes tendencias:



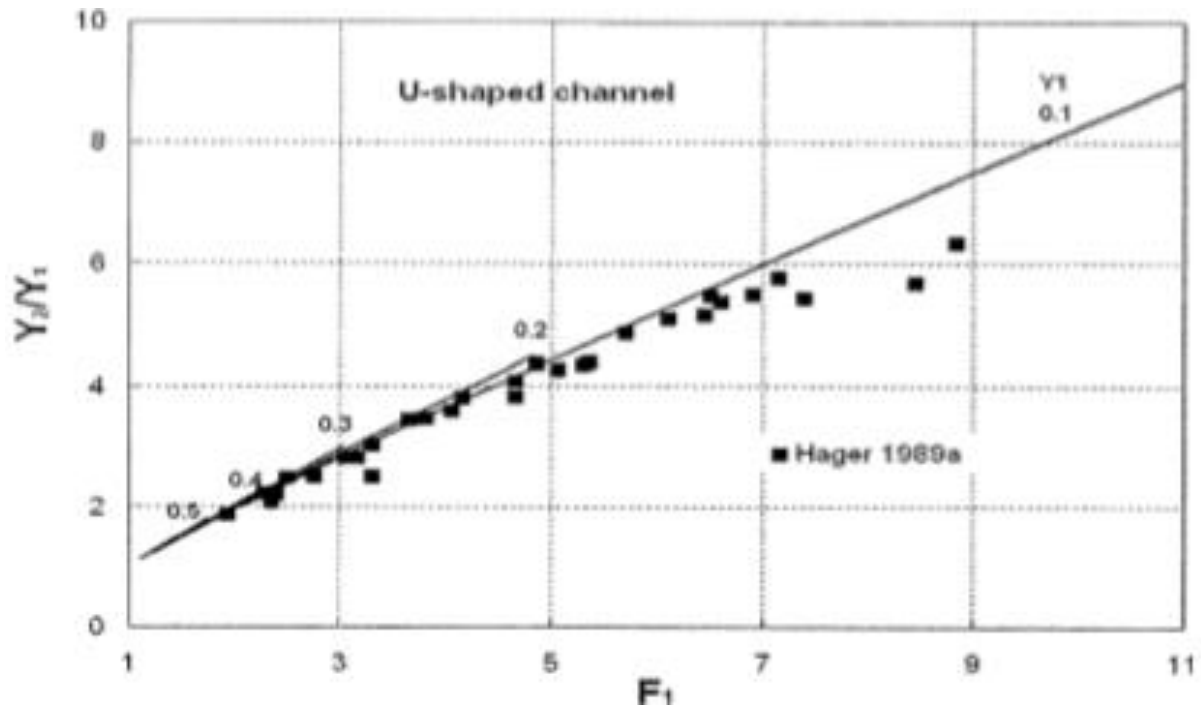
**Gráfica 25. Profundidades subsecuentes versus en número de Froude aguas arriba en canales circulares (Francis, 2006).**

Como se observa en la gráfica anterior, los resultados obtenidos de la relación de profundidades o profundidades subsecuentes versus el número de Froude aguas arriba en el canal circular fueron bastante similares en cuanto al comportamiento del experimento realizado por Stahl y Hager en 1999, donde se muestra que el flujo se comporta de manera lineal. Además, se puede observar que para las diferentes profundidades de  $Y_1$  el flujo va variando, para alturas mayores el número de Froude va disminuyendo notablemente por pérdidas de energía cinética.



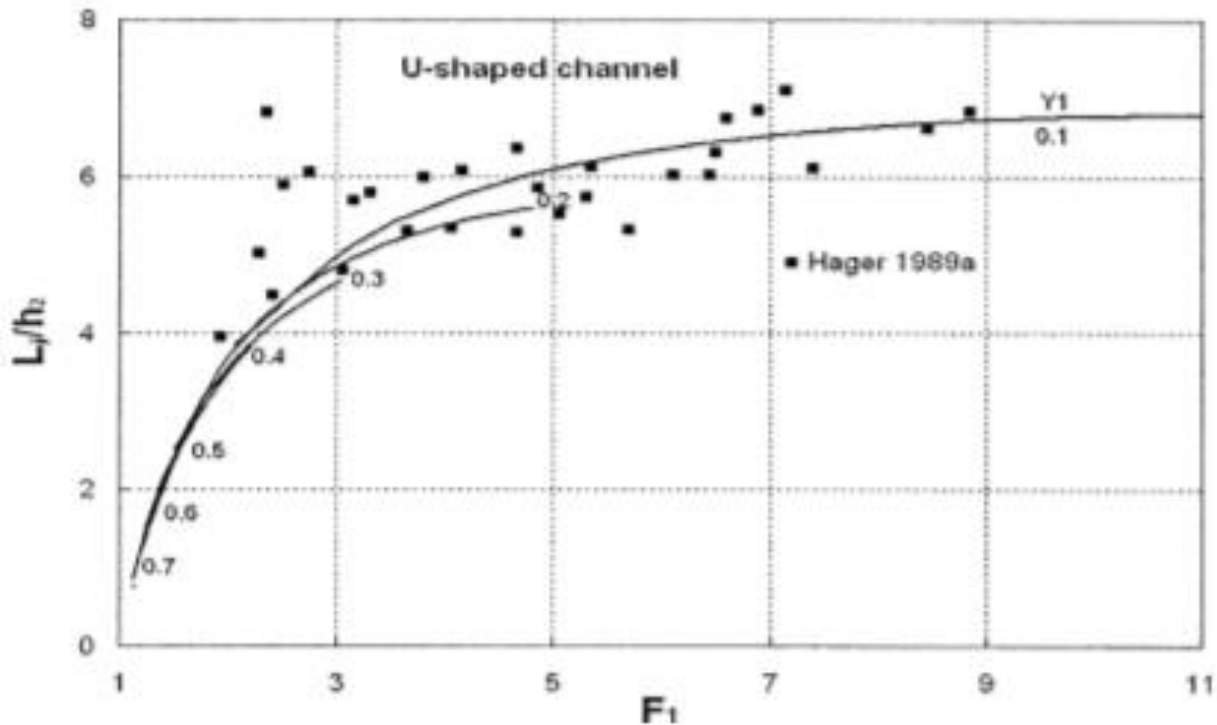
Gráfica 26. Longitud del resalto versus en número de Froude aguas arriba en canales circulares (Francis, 2006).

Para la longitud del resalto se encontró que el comportamiento era muy similar al expuesto anteriormente por Stahl y Hager en 1999. De esta forma, en los resultados teóricos se encontró que la longitud del resalto es independiente del número de Froude aguas arriba, pero al graficarlos se encontró cierta similitud entre ellos. Por otro lado, se encontró que en la altura superior de la parte derecha, es la altura aguas abajo del canal donde se presenta  $Y_2=1$ , lo cual demuestra que la tubería en esta sección se encuentra totalmente presurizada como se observa en la Gráfica 26. Para los canales en forma de U el comportamiento fue similar como se observa a continuación:



Gráfica 27. Profundidades subsecuentes versus en número de Froude aguas arriba en canales con sección en forma de U (Francis, 2006).

En la Gráfica 27, el comportamiento del canal en forma de U, fue de tendencia muy similar al canal con sección circular y a los resultados obtenidos por Hager en 1989. En este se expone que las alturas subsecuentes son directamente proporcionales al número de Froude. Esto quiere decir que, a medida que aumenta el número de Froude, las profundidades subsecuentes también aumentan y este se genera de forma lineal. Por otro lado, en la Gráfica 28 se dedujo que el comportamiento del canal en forma de U era semejante al de la tubería circular, como se muestra a continuación:



Gráfica 28. Longitud del resalto versus en número de Froude aguas arriba en canales con sección en forma de U (Francis, 2006).

Todos los resultados teóricos mostrados anteriormente se generaron solo para canales circulares y en forma de U, de los cuales se pudo concluir que las alturas subsecuentes aguas arriba y aguas abajo del canal ( $Y_2/Y_1$ ), y que la longitud del resalto ( $L_j / h_{-2}$ ) dependían del número de Froude aguas arriba ( $Fr_1$ ) y de la profundidad de flujo aguas arriba ( $Y_1$ ), estas predicciones son apoyadas de los textos de Stahl y Hager en 1999 (Francis, 2006).

Finalmente, se postuló que la longitud de remolino ( $L_r$ ) es del orden de la misma escala de la longitud del resalto total ( $L_{jt}$ ), por lo cual se planteó que  $R = n1$ , donde  $n1$  era una constante universal que no dependía de la geometría del canal (Francis, 2006).

### 3. Marco Teórico

#### Resalto hidráulico

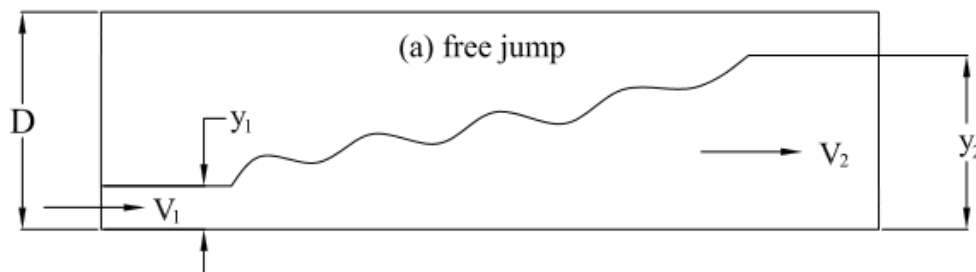
Los resaltos hidráulicos son fenómenos generados cuando se presenta una transición de un flujo subcrítico a un flujo supercrítico. Es decir, cuando se genera un cambio abrupto entre las alturas aguas arriba y aguas abajo de un canal abierto o cerrado. Este fenómeno hidráulico se puede generar por obstrucciones en el flujo aguas abajo como compuertas o por cambios de pendientes a lo largo del canal.

Las principales funciones de un resalto hidráulico son:

- Disipación de energía.
- Excelente aireador
- Excelente mezclador

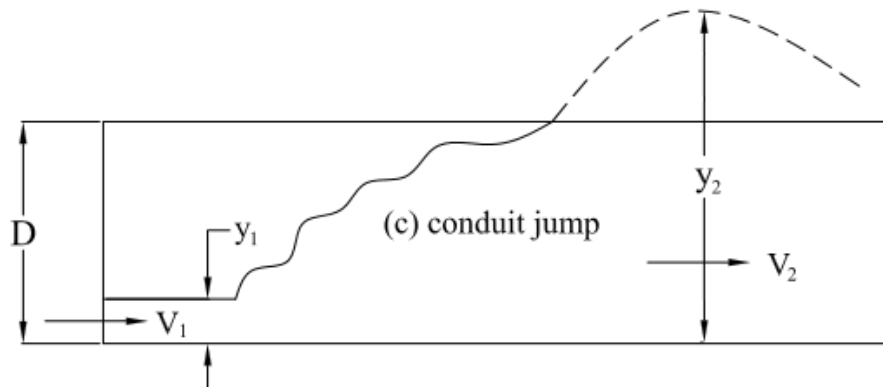
Estos tipos de fenómenos se pueden ocasionar tanto en canales abiertos como en canales cerrados. Para el desarrollo de este proyecto de grado se van a trabajar tuberías circulares (canales cerrados). En este tipo de tuberías se presentan dos tipos de resaltos:

- El primer tipo de resalto en una tubería circular se genera cuando la profundidad aguas abajo del resalto es menor al diámetro ( $Y_2 < D$ ). Esto genera que el resalto se comporte de forma libre, como se observa en la siguiente gráfica.



**Gráfica 29. Tipos de resaltos en tuberías circulares (Ead, 2002).**

- El segundo tipo de resalto en una tubería circular se genera cuando la profundidad aguas abajo del resalto es mayor al diámetro de la tubería ( $Y_2 > D$ ). Esto genera que la tubería se presurice aguas abajo, como se observa en la siguiente gráfica.



Gráfica 30. Tipos de resaltos en tuberías circulares (Ead, 2002).

### 3.1 Tipos de resaltos hidráulicos

En la hidráulica existen cinco tipos de resaltos: resalto ondular, resalto débil, resalto oscilante, resalto permanente o estable y resalto fuerte. Estos varían según el incremento o disminución del número de Froude de aguas arriba que se puede modificar según la pendiente de la tubería o del canal, la altura del flujo y la velocidad del mismo.

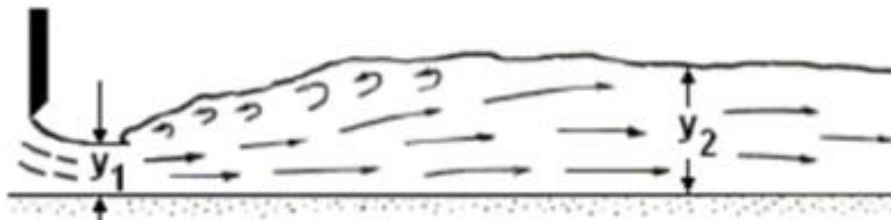
- **Resalto Ondular:** se genera entre un rango de  $1.0 < Fr < 1.7$ ; se caracteriza por generar una baja disipación de energía y por mantener la superficie de agua lisa aguas abajo.



Gráfica 31. Resalto ondular (Rodríguez, 1992).

- **Resalto Débil:** se genera entre un rango de  $1.7 < Fr < 2.5$ ; se caracteriza por generar una serie de pequeños remolinos sobre la superficie del resalto, pero en la superficie aguas abajo de la tubería, el flujo sigue siendo liso.





Gráfica 32. Resalto débil (Rodríguez, 1992).

- **Resalto Oscilante:** se genera entre un rango de  $2.5 < Fr < 4.5$ ; se caracteriza porque en cada oscilación genera una larga ola con períodos irregulares. Es muy común en canales abiertos y puede causar ilimitados daños en bancos de tierra.



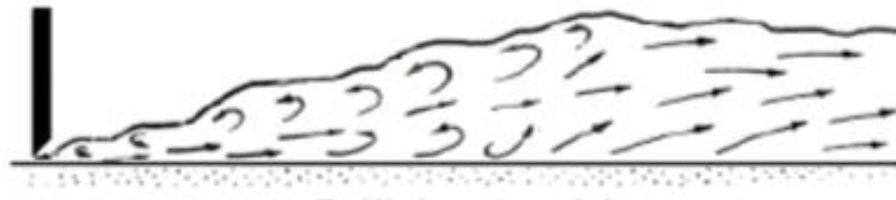
Gráfica 33. Resalto oscilante (Rodríguez, 1992).

- **Resalto Permanente o Estable:** se genera entre un rango de  $4.5 < Fr < 9.0$ , se caracteriza por genera un resalto muy balanceado y ser el de mejor rendimiento. Puede tener unos rangos de disipación de energía entre el 45% y el 70%.



Gráfica 34. Resalto permanente (Rodríguez, 1992).

- **Resalto Fuerte:** se genera cuando  $Fr > 9.0$ ; se caracteriza por formarse con grandes cambios de pendientes y por generar un resalto muy fuerte con grandes remolinos aguas abajo. Se pueden obtener pérdidas de energías de hasta un 85%.



Gráfica 35. Resalto fuerte (Rodríguez, 1992).

### 3.2 Características básicas del resalto

Las principales características del fenómeno de un resalto hidráulico en canales horizontales rectangulares abiertos son:

#### 3.2.1 Pérdidas de energía

Las pérdidas de energía en un resalto hidráulico hacen referencia a las pérdidas que genera el flujo antes y después del resalto. La ecuación se conoce como:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_2y_1}$$

Ecuación 90. Cálculo de pérdidas de energía en canal rectangular horizontal.

donde  $\frac{\Delta E}{E_1}$  se conoce como la pérdida relativa de energía.

#### 3.2.2 Eficiencia

La eficiencia de un resalto hidráulico es definida como el radio de la energía específica antes y después de que ocurre el fenómeno hidráulico, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(8F_1^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 4F_1^2 + 1}{8F_1^2(2 + F_1^2)}$$

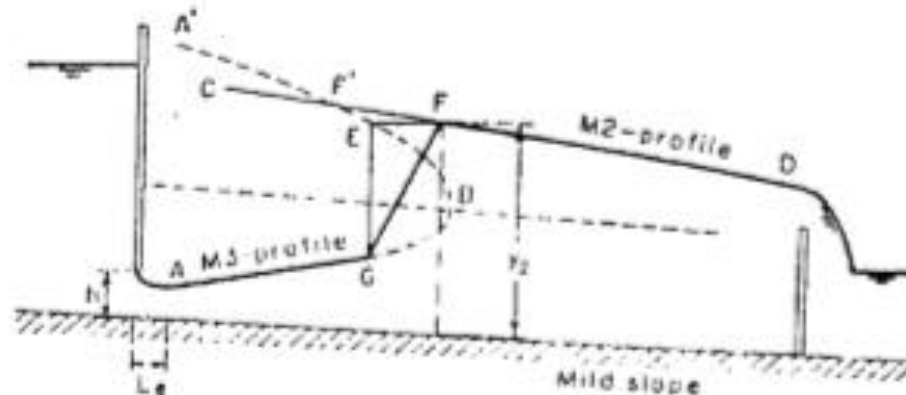
Ecuación 91. Cálculo de la eficiencia en un canal rectangular horizontal (Rodríguez, 1992).

Esta ecuación indica que la eficiencia de un resalto es una variable adimensional y depende solo del número de Froude.

#### 3.2.3 Ubicación del resalto

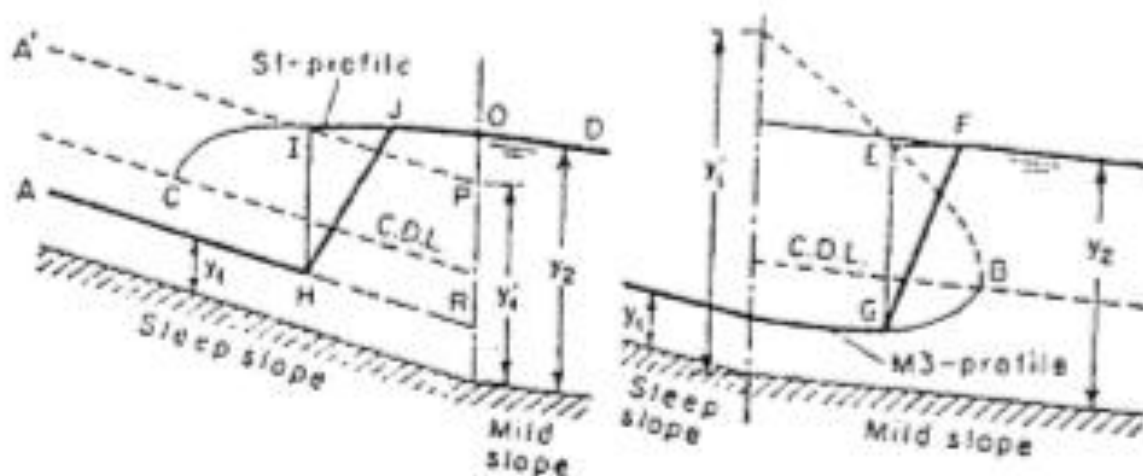
Un resalto hidráulico ocurre cuando se ejerce un cambio abrupto entre profundidades de un flujo supercrítico a un flujo subcrítico; a continuación se mostrará las ubicaciones del resalto hidráulico en sus tres principales casos:

**Caso A:** se muestra el comportamiento del resalto regulándolo por medio de una compuerta en el canal. Los perfiles AB y CD pueden ser fácilmente identificados como resaltos tipos  $M_3$  y  $M_2$  respectivamente, para  $F'$  la posición del resalto puede ser estimada por prueba y error. Por otro lado, la distancia horizontal EF es igual a la longitud del resalto correspondiente a la profundidad entre  $y_2$  y F (Rodríguez, 1992). Esto se observa en la Gráfica 38:



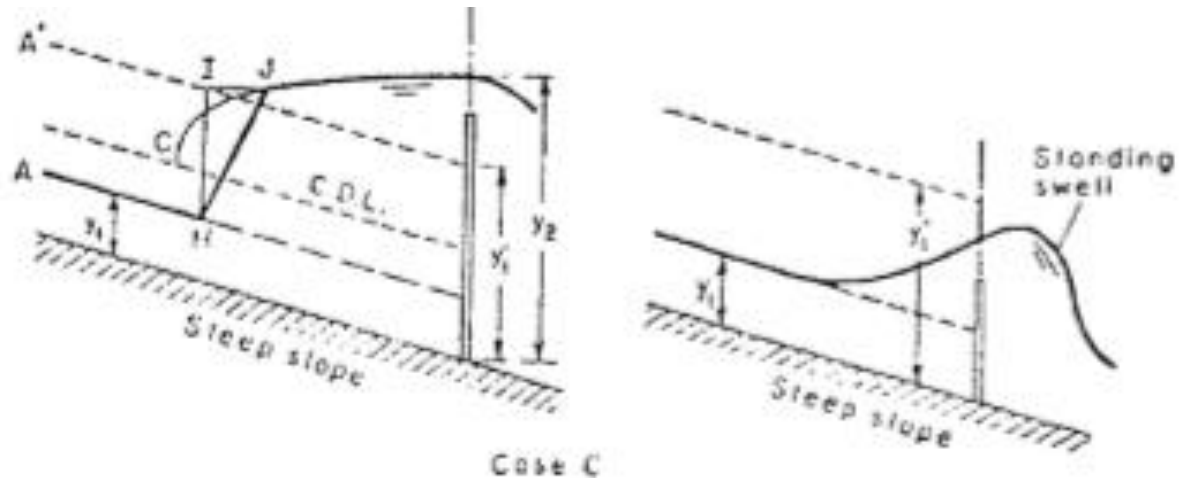
Gráfica 36. Caso A de la ubicación del resalto hidráulico (Rodríguez, 1992).

**Caso B:** en este caso se muestra que el resalto hidráulico se forma en el momento que se produce un cambio de pendiente en el canal que cambia de empinada a leve. Por simplicidad, se supone que el flujo es uniforme en el canal excepto cuando ocurre el resalto en el cambio de pendiente. El resalto que se puede ocurrir puede ser leve o empinado dependiendo del comportamiento del  $y_2$  aguas abajo si es mayor o menor a la profundidad subsecuente  $y_1$  (Rodríguez, 1992). A continuación se presenta la gráfica que ejemplifica lo anterior:



Gráfica 37. Caso B de la ubicación del resalto hidráulico (Rodríguez, 1992).

**Caso C:** en el caso C se puede observar en la Gráfica 40; que el resalto comienza detrás de una barrera de desbordamiento, el resalto se puede formar si la altura de desbordamiento es mayor que la altura subsecuente aguas arriba ( $y_1$ ), la cual se encuentra en flujo supercrítico. En cambio, al incrementar la altura del desbordamiento, el resalto se puede mover aguas arriba y cuando la altura de desbordamiento es más pequeña que la altura subsecuente, la barrera puede ser cruzada por el oleaje pero no será seguido por otras ondulaciones (Rodríguez, 1992).



Gráfica 38. Caso C de la ubicación del resalto hidráulico (Rodríguez, 1992).

## 4. Diseño y Construcción de un Modelo para Estudiar el Comportamiento de Resaltos Hidráulicos en Tuberías Parcialmente Llenas de Sección Circular, con Números de Froude menores a 4

---

Para el desarrollo de este documento, fue necesario tomar como guía la tesis de la Ingeniera Laura Elizabeth Montaña, acerca de “Diseño y Construcción de un Modelo para Estudiar el Comportamiento de Resaltos Hidráulicos en Tuberías Parcialmente Llenas de Sección Circular, con Números de Froude Supercríticos Menores a 4”. Esta tesis desarrolló una investigación acerca de los experimentos realizados por investigadores a través del tiempo en resaltos hidráulicos en tuberías de sección circular y canales de secciones rectangulares, trapezoidales y triangulares.

Dado que la tesis de Laura Montaña se basó específicamente en el modelo constructivo, se debe realizar una tesis posterior que analice el modelo del resalto hidráulico mediante una toma de datos y elección de condiciones que permitan la formación del resalto. Lo anterior con el fin de realizar un análisis y determinar la importancia de los resaltos hidráulicos sobre el fenómeno de sobrecarga (Montaña, 2012).

### Diseño del modelo

El diseño del modelo de la tubería se planteó en un material de acrílico transparente por sus facilidades a la hora de observar el fenómeno del resalto hidráulico. Este montaje se realizó en el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de los Andes, con una pendiente de 1,88% inicial y con una longitud total de 13,00 metros separado por siete secciones: 6 de dos metros y 1 de un metro. Estas secciones se unieron mediante bridas para su fácil transporte y mantenimiento. Además, la tubería tiene un diámetro final de 0,25 metros, diseñado para soportar un caudal mínimo de 6,1 L/s y un caudal máximo de 77,6 L/s. Para la elección del diámetro final de la tubería se tuvo en cuenta que cumpliera con las condiciones de relación de llenado propuesta para los caudales y las pendientes mencionados anteriormente, tal como se puede observar en la Tabla 3 (Montaña, 2012).

De esta forma, se realizaron tres pruebas para la verificación del diámetro óptimo para el diseño de la tubería. El primer ensayo se realizó con una relación de llenado del 50%, la segunda con una relación de llenado del 85% y la última prueba se realizó con una relación de llenado del 92,9% y todas se trabajaron con una pendiente del 1,88%.

**Tabla 3. Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 50 % (Montaño, 2012).**

d (m)	yn (m)	$\theta$ (-)	Á (m <sup>2</sup> )	P (m)	R (m)	V (m)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Re (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	h soporte (m)	d + soporte (m)
0,2	0,1	3,142	0,016	0,314	0,050	2,315	0,036	406173,515	0,200	0,079	2,638	0,100	0,300
0,25	0,125	3,142	0,025	0,393	0,063	2,676	0,066	586753,110	0,250	0,098	2,726	0,100	0,350
0,3	0,15	3,142	0,035	0,471	0,075	3,009	0,106	791802,752	0,300	0,118	2,799	0,100	0,400
0,35	0,175	3,142	0,048	0,550	0,088	3,321	0,160	1019595,837	0,350	0,137	2,860	0,100	0,450
0,4	0,2	3,142	0,063	0,628	0,100	3,616	0,227	1268764,140	0,400	0,157	2,913	0,100	0,500
0,45	0,225	3,142	0,080	0,707	0,113	3,897	0,310	1538186,062	0,450	0,177	2,960	0,100	0,550
0,5	0,25	3,142	0,098	0,785	0,125	4,165	0,409	1826918,772	0,500	0,196	3,001	0,100	0,600
0,55	0,275	3,142	0,119	0,864	0,138	4,424	0,525	2134154,161	0,550	0,216	3,039	0,100	0,650

Como se observa en la Tabla 3, el diámetro óptimo para el diseño de la tubería con una relación de llenado del 50% es la de diámetro de 0,25 metros. Además, se puede observar que los diámetros de 0,2 y 0,3 metros transportan un caudal menor que el caudal máximo, lo cual indica que se puede trabajar para mayores relaciones de llenado.

**Tabla 4. Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 85 % (Montaño, 2012).**

d (m)	yn (m)	$\theta$ (-)	Á (m <sup>2</sup> )	P (m)	R (m)	V (m)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Re (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)	h soporte (m)	d + soporte (m)
0.1	0.085	4.692	0.007	0.235	0.030	2.158	0.015	229631.7	0.071	0.100	2.183	0.1	0.200
0.15	0.128	4.692	0.016	0.352	0.045	2.814	0.045	449084.9	0.107	0.149	2.324	0.1	0.250
0.2	0.17	4.692	0.028	0.469	0.061	3.388	0.096	721077.9	0.143	0.199	2.423	0.1	0.300
0.25	0.213	4.692	0.044	0.587	0.076	3.909	0.174	103982.9	0.179	0.249	2.501	0.1	0.350
0.3	0.255	4.692	0.064	0.704	0.091	4.390	0.281	140129.7	0.214	0.299	2.563	0.1	0.400
0.35	0.298	4.692	0.087	0.821	0.106	4.840	0.422	180243.3	0.250	0.349	2.617	0.1	0.450
0.4	0.34	4.692	0.114	0.938	0.121	5.265	0.599	224082.5	0.286	0.399	2.663	0.1	0.500
0.45	0.383	4.692	0.144	1.056	0.136	5.669	0.817	271449.7	0.321	0.448	2.703	0.1	0.550
0.5	0.425	4.692	0.178	1.173	0.152	6.055	1.077	322178.7	0.357	0.498	2.739	0.1	0.600
0.55	0.468	4.692	0.215	1.290	0.167	6.427	1.383	376127.4	0.393	0.548	2.772	0.1	0.650

Como se observa en la Tabla 4, para la relación de llenado del 85% máximo estipulado por el RAS (Reglamento Técnico del Sector de Agua Potable y Saneamiento Básico) los diámetros con la capacidad de soportar el caudal máximo con esta relación son el de 0,20-0,25 y 0,3 metros. Sin embargo, al igual que la tabla anterior, los diámetros de 0,2 y 0,3 metros permiten un mejor desarrollo de la tubería por no alcanzar su máximo caudal permitido.

**Tabla 5. Diámetros seleccionados que superen el caudal de diseño y no superen los 48 cm de altura con relaciones de llenado del 92.9 % (Montaño, 2012).**

d (m)	yn (m)	(-)	A (m <sup>2</sup> )	P (m)	R (m)	V (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Re (-)	h (m)	d + soporte (m)
0,1	0,093	5,204	0,008	0,260	0,029	1,627	0,012	166855,528	0,100	0,200
0,15	0,139	5,204	0,017	0,390	0,044	2,125	0,036	326990,425	0,100	0,250
0,2	0,186	5,204	0,030	0,520	0,058	2,563	0,078	525738,360	0,100	0,300
0,25	0,232	5,204	0,048	0,651	0,073	2,959	0,141	758879,656	0,100	0,350
0,3	0,279	5,204	0,068	0,781	0,088	3,326	0,228	1023461,122	0,100	0,400
0,35	0,325	5,204	0,093	0,911	0,102	3,669	0,342	1317254,232	0,100	0,450
0,4	0,372	5,204	0,122	1,041	0,117	3,993	0,486	1638493,834	0,100	0,500
0,45	0,418	5,204	0,154	1,171	0,132	4,302	0,663	1985733,499	0,100	0,550
0,5	0,465	5,204	0,190	1,301	0,146	4,597	0,874	2357757,724	0,100	0,600
0,55	0,511	5,204	0,230	1,431	0,161	4,881	1,123	2753524,982	0,100	0,650

Finalmente, para la relación de llenado del 92,9%, el único diámetro que soporta esta cantidad es el de 0,2 metros. No obstante, como se estipula en el RAS (Reglamento Técnico del Sector de Agua Potable y Saneamiento Básico), la máxima relación de llenado permitida es del 85% para que no ocurra el fenómeno de sobrecarga, pero para este ejemplo la única tubería que serviría sería la de 0,20 metros. Con el fin de que se cumpla con la norma y se observe de una mejor forma el fenómeno del resalto hidráulico, se utilizó el diámetro de 0,25 metros el cual cumplía la relación de llenado del 85%, como se mostró en la Tabla 4.

### Resultados obtenidos

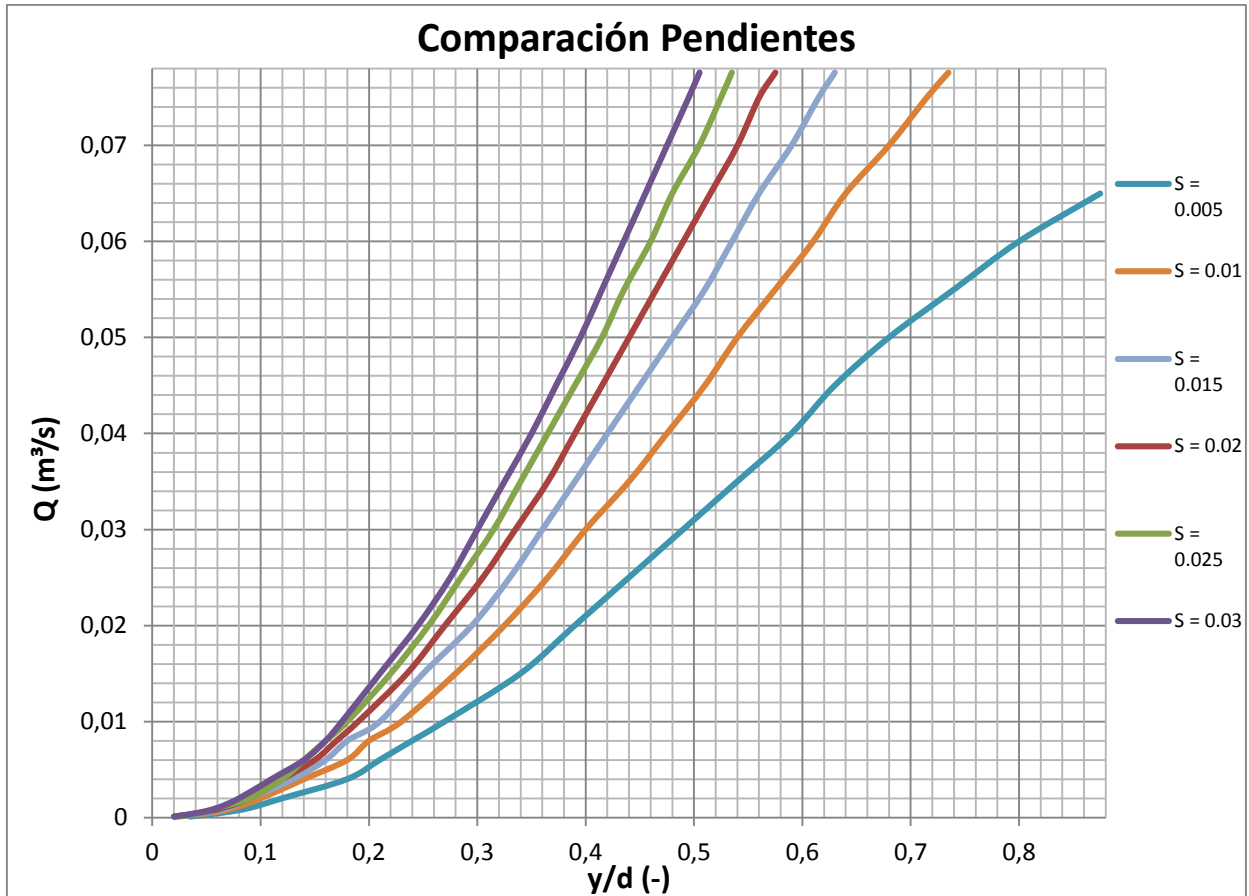
Para obtener los resultados cabe resaltar que en la tesis “Diseño y Construcción de un Modelo para Estudiar el Comportamiento de Resaltos Hidráulicos en Tuberías Parcialmente Llenas de Sección Circular, con Número de Froude Supercríticos Menores a 4” de la Ingeniera Laura Montaño, se trabajaron resultados teóricos para probar el funcionamiento de la tubería diseñada. Además, se trabajó como un flujo uniforme utilizando la ecuación de Darcy Weisbach suponiendo  $S_f = S_0$

El primer análisis que se realizó se enfocó en el valor máximo del número de Froude que podía soportar la tubería a diferentes pendiente. De esta forma, se sometió cada pendiente a diferentes caudales variándolos desde el más pequeño, que podía soportar la tubería, hasta el mayor que esta resistía para analizar el comportamiento del caudal respecto a la relación de llenado.

Como se puede observar en la Gráfica 41, a menor pendiente de la tubería, esta resistirá mayores caudales y llegará a sus relaciones de llenado máximas después que las de mayores pendientes. Además, se puede observar que para obtener un mejor comportamiento de la



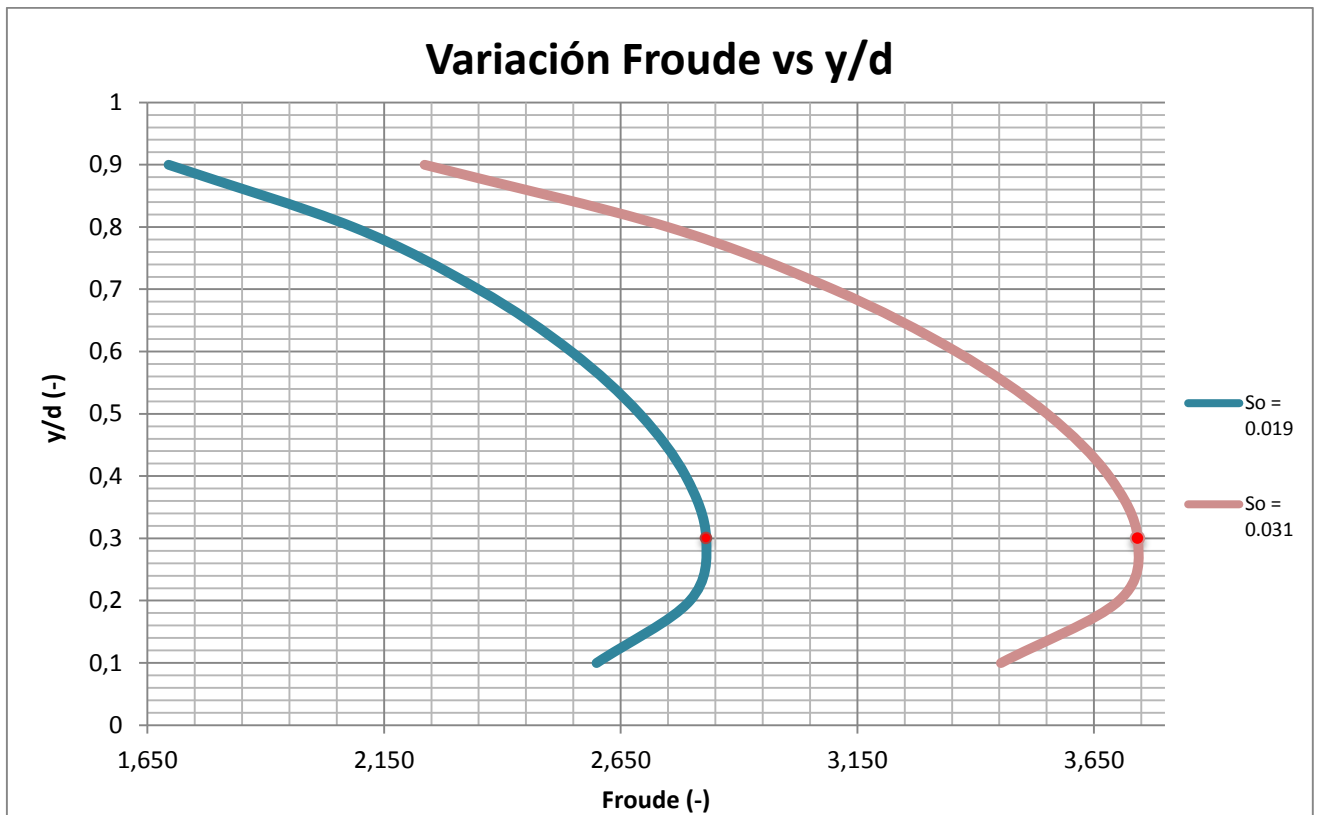
tubería, sería necesario utilizar la pendiente más baja, puesto que resistirá mayores caudales y tardaría mayor tiempo en alcanzar sus relaciones de llenado máximas evitando presurizaciones, sobre cargas en la tubería y posteriormente daños en la misma.



**Gráfica 39. Variación del caudal respecto a la relación de llenado (Montaño, 2012).**

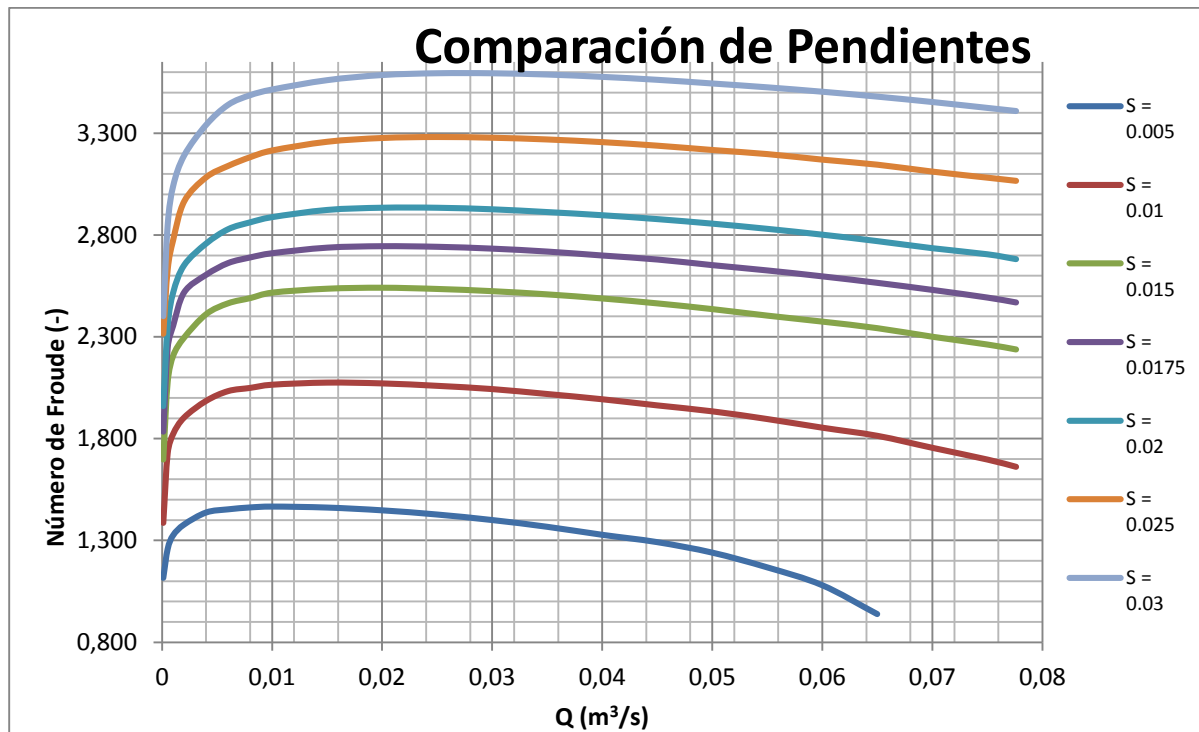
Por otro lado, se quiso analizar el comportamiento teórico que tendría la tubería en los caudales más altos y por ende en las relaciones de llenado más altas. Para esto se verificó que la tubería cumpliera con el requisito de modelo y que no sobrepasara el número de Froude  $> 4$ . De esta forma, se procedió a calcular el número de Froude para todas las relaciones de llenado posibles en la tubería, estudiando el comportamiento del fluido, suponiendo la ecuación de Darcy Weisbach ( $S_f = S_0$ ) para flujos uniformes. A continuación se presentará el resultado obtenido para las pendientes de 0,019 y 0,031.





**Gráfica 40. . Variación del número de Froude respecto a la relación de llenado para diferentes pendientes (Montaño, 2012).**

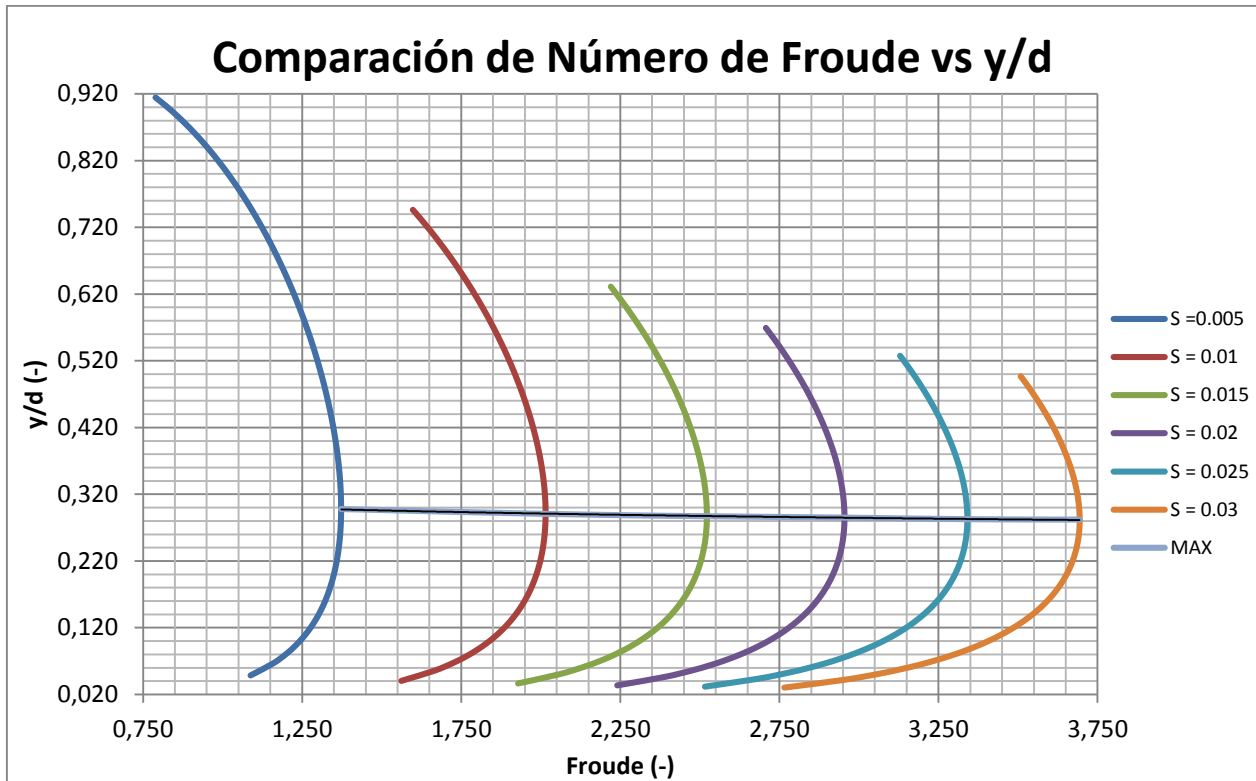
Se puede evidenciar que los mayores números de Froude se presentan en las zonas donde las relaciones de llenado son más bajas (Flujo supercrítico). Sin embargo, se evidencia que en las dos pendientes este comportamiento no es lineal, sino que cuando se obtienen las relaciones de llenado más bajas el número tiende a aumentar hasta llegar a su máximo punto. De esta forma comienza a hacer su transición de flujo supercrítico a flujo a subcrítico, como se observa desde la relación de llenado del 30% en adelante. Finalmente, se puede observar en la Gráfica 42 que la mayor pendiente que se puede analizar es la de 0,031 puesto que esta ya está alcanzando el rango máximo de número de Froude para el cual fue diseñada la tubería.



**Gráfica 41. Variación del número de Froude para diversos caudales (Montaño, 2012).**

Para el análisis del número de Froude y el caudal para cada pendiente estudiada se analizó que para las pendientes más bajas el flujo no iba a ser tan crítico. Entonces, se observa en la Gráfica 43 que las pendientes siguen cierta tendencia, y que al aumentar la pendiente y trabajando con los mismos caudales este va a presentar mayores números de Froude. Por otro lado, se observa que este crecimiento como se evidencia en la Gráfica 42 tiene un límite en el cual el flujo pasa a ser de supercrítico y se convierte a subcrítico. Por esto la tendencia del número de Froude es a disminuir, como se presentó en la gráfica anterior.

Finalmente, la relación que cabe resaltar para estudiar todo el comportamiento de la tubería sería la relación de llenado de esta, contra el caudal que va a pasar. Para este análisis se concluye que el comportamiento que va a presentar esta gráfica va a tender a ser el mismo de las presentadas anteriormente, mostrando cuales van a hacer las relaciones de llenado más críticas, donde el flujo va a ser más supercrítico y más fuerte de controlar. Esto con el fin de que, al realizar un experimento en el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de los Andes sobre el fenómeno del resalto hidráulico, se tenga en cuenta cuando se van a tener las condiciones más críticas.



**Gráfica 42. Comparación número de Froude respecto a diferentes relaciones de llenado (Montaño, 2012).**

Efectivamente, como se mencionaba anteriormente, la Gráfica 44 presenta un comportamiento muy similar a las presentadas anteriormente, por lo cual se puede obtener que generalmente donde se va a generar el mayor flujo supercrítico y por ende el resalto hidráulico más fuerte va a ser en la relación de llenado del 30%.

Finalmente, se puede demostrar que la curva que describe mejor en qué relación de llenado se encuentran los números de Froude máximos se ajusta a una curva potencial, la cual se calculó mediante la Ecuación 92 (Montaño, 2012):

$$y = 0.3026x^{-0.055}$$

**Ecuación 92. Curva que describe el número de Froude máximo (Montaño, 2012).**

Por esta razón, en el montaje que se realizó, los números de Froude máximos se encuentran entre las relaciones de llenado del 20% y 30%, es decir, que el resalto hidráulico más fuerte se presentará cuando la profundidad aguas arriba del resalto se encuentre entre 0,28 a 0,30 veces el diámetro (Montaño, 2012).

## 5. Modelo físico

Para el estudio del fenómeno del resalto hidráulico, se va a realizar una tesis de pregrado acerca de “Resaltos hidráulicos en tuberías lisas de sección circular fluyendo parcialmente llenas, con números de Froude inferiores a 4”, con el fin de estudiar el comportamiento del fenómeno de resalto hidráulico en diferentes pendientes variando 35 veces su caudal en cada una. A continuación se presenta una tabla de mediciones:

**Tabla 6. Mediciones realizadas en el laboratorio.**

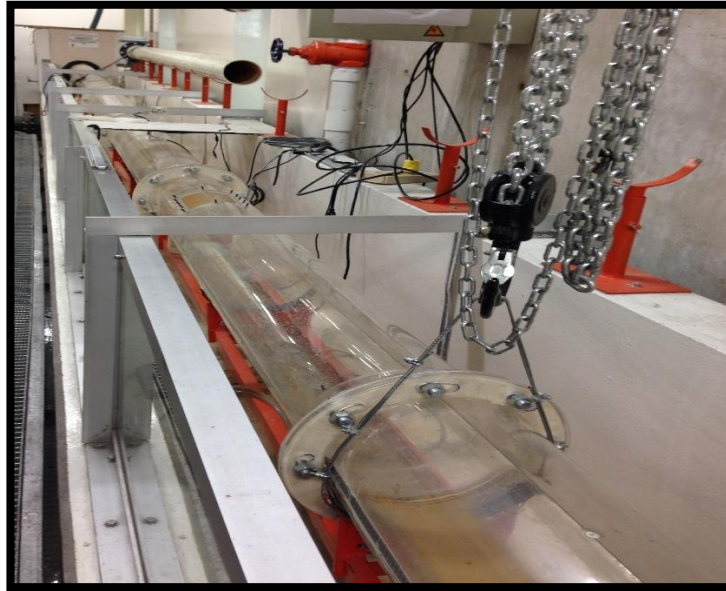
PENDIENTES TRABAJADAS (-)	0,025	0,018	0,016	0,011	0,005
NÚMERO DE CAUDALES	35	35	35	35	35

El modelo que se dispuso para la toma de datos fue realizado por una tesis anterior y consta con las siguientes características de diseño y materiales para su funcionamiento:

- Diámetro = 0,25 m
- Longitud = 13,0 m (consta de 6 secciones de 2 m y de una sección de 1 m)
- Material = acrílico transparente (para observar mejor el fenómeno del resalto)
- Gatos mecánicos (para obtener la variación de pendientes)
- Una diferencial (para ayudar a que el cambio de pendiente sea más preciso)
- Un soporte metálico (para sostener el peso de la tubería)
- Bidas (para unir las secciones de la tubería)
- Un caudalímetro electromagnético (para tener información de la cantidad de caudal que está pasando a lo largo de la tubería)
- Dos sensores de precisión (para medir profundidades de flujo aguas arriba y aguas abajo del fenómeno del resalto hidráulico)
- 15 Piezómetros (para obtener profundidades de flujo)
- Una compuerta aguas abajo

### Fotos del modelo

Primero, se realizó un reconocimiento del modelo ubicando todos los materiales que lo componían y se procedió a limpiar todo el montaje para obtener un ensayo más limpio y apto para el inicio de la toma de datos. Luego, se realizó un ensayo de este para verificar el comportamiento de la tubería verificando los datos del caudalímetro, de los sensores de precisión y de los piezómetros. A continuación se presentará la foto del montaje limpio y adecuado para comenzar con la toma de datos pertinentes:



**Gráfica 43. Foto del montaje listo para ser utilizado.**

De esta forma, se procedió a corregir pequeños detalles que tenía la tubería como fugas, por medio de un autopolimerizable (VERACRIL) el cual consta de un resina acrílica y de un líquido acrílico que al juntar activa sus funciones de sellante para cualquier tipo de acrílico. Luego de tener el modelo listo, se continúa con un ensayo de prueba para verificar la consistencia de los datos y el funcionamiento de la tubería como se muestra a continuación:



**Gráfica 44. Ensayo de prueba para la verificación de los instrumentos y la tubería.**

El modelo funcionó de manera óptima, sin ninguna fuga. El flujo, como se observa en la Gráfica 46, se comporta de manera ondular por ser de sección circular lo cual puede ser un motivo de error a la hora de tomar los datos experimentales. Por esto el flujo no se comporta del todo uniforme y esto puede afectar las medidas aguas arriba o aguas abajo con los sensores de profundidades. A continuación se mostrará una foto del flujo aguas arriba comenzando en la sección de la tubería:



**Gráfica 45. Ensayo de prueba aguas arriba para la verificación de los instrumentos y la tubería.**

Como se mencionó anteriormente, se puede evidenciar que a lo largo de toda la tubería el flujo se comporta de forma ondular desde su inicio hasta el final en sus ensayos de prueba. Ahora se procede a mostrar las imágenes de un ensayo tipo para la realización del informe, generando el fenómeno del resalto hidráulico por medio de la compuerta aguas abajo, ubicándolo entre los dos sensores y verificando el fenómeno de sobrecarga (Presurización aguas abajo de la tubería) o como lo estipula la RAS (Reglamento Técnico del Sector de Agua Potable y Saneamiento Básico), que se encuentre menor a una relación de llenado del 85%.

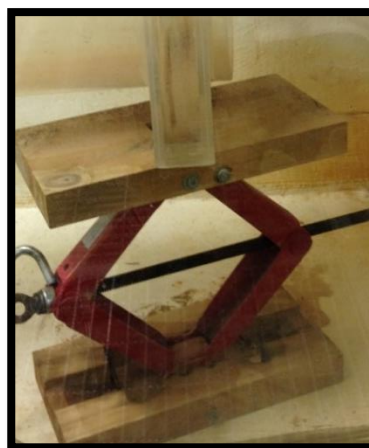
Para presentar el comportamiento de la tubería en los primeros ensayos de prueba, es necesario describir los instrumentos que se utilizaron para generar el fenómeno del resalto hidráulico y la variación de pendiente en la tubería.





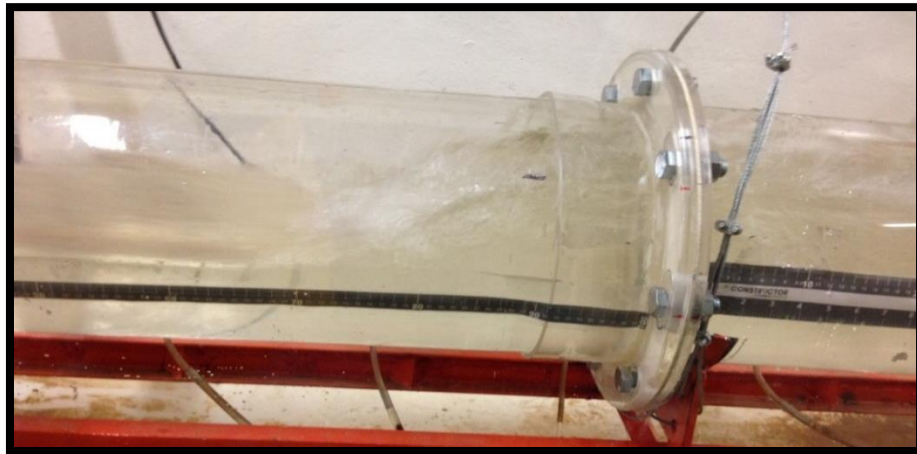
**Gráfica 46. Compuerta aguas abajo de la tubería para controlar el fenómeno del resalto hidráulico.**

Como se puede observar en la Gráfica 48, la compuerta con la que contaba el modelo tenía como función generar un estancamiento de agua para generar el cambio de flujo supercrítico a subcrítico por medio del resalto hidráulico. Para generar la variación de las pendientes se utilizaron cuatro gatos mecánicos con la función de generar cambios de alturas en las secciones de la tubería como se observa a continuación.



**Gráfica 47. Gatos mecánicos para controlar la variación de la pendiente.**

A continuación se presentarán las imágenes del resalto que se produjo para un ensayo de prueba:



**Gráfica 48. Fenómeno del resalto hidráulico.**

Se generó el fenómeno del resalto hidráulico debido al estancamiento de aguas mediante la compuerta aguas abajo. Luego, se procedió a realizar la toma de datos experimentales para verificar el comportamiento de la tubería y evitar el fenómeno de sobrecarga para no generar daños ni inundaciones. A continuación se va a presentar las medidas tomadas por los piezómetros donde efectivamente se puede observar el comportamiento del resalto y su transición de flujo supercrítico a flujo subcrítico, mostrando la variación de alturas.



**Gráfica 49. Alturas piezométricas del resalto hidráulico.**



Por otro lado, para la ejecución de la tesis experimental se contaba con el sensor IQ Plus para la toma de datos más efectiva reduciendo el rango de error y obteniendo datos más concretos del comportamiento de la tubería. No obstante, debido a que este sensor está diseñado especialmente para canales abiertos, se tuvo complicaciones y no generaba ninguna clase de resultado.



**Gráfica 50. Sensor IQ Plus.**

Para su instalación se desmontó una sección del montaje, se limpió toda la tubería por dentro y se procedió a instalar el sensor por medio de tornillos que aseguraran este a la estructura en acrílico de la tubería. A continuación se presenta la imagen del procedimiento de instalación del sensor IQ Plus.



**Gráfica 51. Procedimiento de instalación del sensor IQ Plus.**

Debido a que los rayos del sensor chocaban con una parte de la tubería, se procedió a realizar una estructura en acrílico para ubicar de mejor forma y elevar el sensor para que los rayos trabajaran adecuadamente.



**Gráfica 52. Estructura del sensor IQ Plus para obtener un funcionamiento adecuado de los rayos emitidos por este.**

Debido a las complicaciones con respecto al cambio de sección con la que se estaba trabajando, no se pudo realizar ninguna medición con este instrumento. Por esta razón, solo se trabajó con los sensores de profundidades y caudalímetro electromagnético, lo cual generó mayor incertidumbre a la hora de medir el caudal por su constante variación y su alto grado de error. A continuación se va a explicar cuál es la incertidumbre de cada uno de los instrumentos que se utilizaron para realizar la toma de datos y de esta forma encontrar otras posibles causas de error.

## Precisión de los instrumentos

La incertidumbre de los instrumentos con los cuales se va a trabajar resulta ser un tema muy importante para la ejecución de estos ensayos experimentales, puesto que se debe tener en cuenta los rangos de variación que se trabajan en cada uno de los instrumentos para encontrar las posibles causas de la diferencia entre los errores teóricos con los resultados obtenidos en el laboratorio.

### 5.1 Caudalímetro

Para la toma de las medidas de todos los caudales de entrada al modelo que se estaba trabajando se utilizó un caudalímetro magnético WaterMaster (ABB) diseñado especialmente para diversas aplicaciones que se encuentran en la industria del agua potable y aguas residuales. Este modelo tiene rendimiento de flujo con un rango de caudal de operación con una precisión estándar de  $\pm 0,4\%$  en ambos sentidos de flujo.

Las principales características de este modelo son:

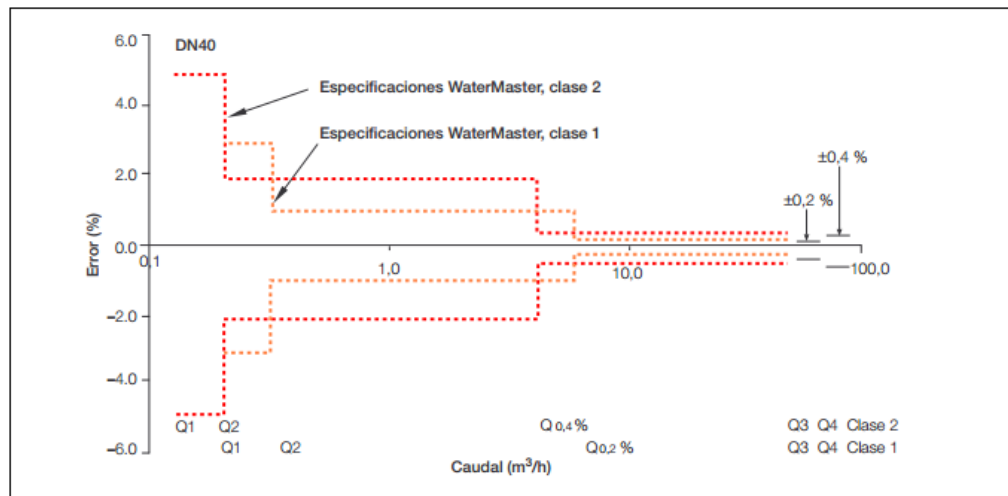
- Flujo bidireccional
- Único transmisor autocalibrable que ofrece la máxima estabilidad y repetibilidad
- El cumplimiento con OIML, la continua auto verificación con alarmas aseguran la precisión tanto el sensor como el transmisor
- Amplio modo de simulación



**Gráfica 53. Caudalímetro electromagnético WaterMaster (ABB).**

La OIML (Organization Internationale de Métrologie Légale) es una organización intergubernamental creada en 1955. Su principal objetivo es la armonización internacional de la metrología legal, proporcionando una referencia importante para la credibilidad de las

mediciones. La OIML R49 consiste en modelos fundamentados técnicamente para controlar legalmente los instrumentos de medición, especialmente está diseñada para controlar mediciones de agua potable fría y caliente. A continuación se presenta la incertidumbre del sensor basándose en la OIML R49 (WaterMaster, 2013):



**Gráfica 54. Rangos de error del caudalímetro electromagnético clase 2 según OIML R49 (WaterMaster, 2013).**

Además, como se observa en la Gráfica 56, para la clase 2 que es el caudalímetro del Laboratorio de Hidráulica el rango de error aumenta a medida que se toman caudales más bajos, es por esto que al trabajarse con caudales bajos la variación va a ser mayor y el rango de error y de incertidumbre que se va a trabajar va a ser mucho más grande que con los caudales más grandes.

## 5.2 Sensores de profundidades

En el modelo se utilizaron dos sensores de precisión encargados de mostrar los resultados de las profundidades de flujo aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico separados por una distancia de 4,05 metros de distancia entre sí. A continuación se muestra la imagen del sensor puesto en el modelo que se desarrolló el ensayo.



Gráfica 55. Sensor U-GAGE T30 Series (BANNER, 2013).

El sensor U-GAGE T30 Series es un sensor ultrasónico fácil de utilizar y rápido, excelente para aplicaciones de mediciones como niveles de profundidades de flujo en un tanque. Cada sensor incluye un análogo y una salida discreta, que puede ser programado independientemente con diferentes límites y cada salida tiene la opción de ser fijado con un punto de ajuste de la distancia de detección centrado con una ventana de 10 mm (BANNER, 2013).

Tabla 7. Incertidumbre del sensor de profundidades U-GAGE T30 (BANNER, 2013).

<b>Sensing Performance</b> (Specified using a 10 cm x 10 cm aluminum target at 25°C under fixed sensing conditions.)	<b>Analog sensing resolution:</b> $\pm 0.25\%$ of measured distance <b>Analog linearity:</b> $\pm 0.5\%$ of full-scale sensing range <b>Sensing repeatability:</b> $\pm 0.25\%$ of distance <b>Minimum window size:</b> 10 mm (0.4") <b>Hysteresis of discrete output:</b> 2.5 mm (0.10")
---	---

La incertidumbre del sensor varía según la medición que se va a analizar: resolución análoga del sensor es  $\pm 0,25\%$  de la distancia medida, la linealidad análoga es  $\pm 0,5\%$  del rango total de la escala de sensibilidad y la sensibilidad de repetitividad es  $\pm 0,25\%$  de la distancia.

Por otro lado, cabe resaltar que al realizar las mediciones de prueba y de los ensayos de toma de datos, se encontró que el sensor que estaba puesto aguas abajo se comportaba de una forma muy variable por problemas técnicos propios del sensor y que para solicitar un cambio de sensor las fechas estipuladas de llegada de este con las fechas estipuladas del cronograma del proyecto que se iba a realizar no concordaban y se saldría del tiempo estipulado. Por lo tanto, se decidió realizar la toma de mediciones con este sensor y trabajar un margen de error más alto para las medidas que se tomaran aguas abajo.

## 6. Resultados Experimentales

Para la toma de datos de este informe se hace referencia a la Tabla 8. Mediciones realizadas en el laboratorio, donde se muestra que se utilizaron cuatro pendientes distintas: 0,011- 0,016- 0,018 y 0,025. En cada una de estas pendientes se trabajó con 35 caudales diferentes, ocasionando el fenómeno del resalto hidráulico mediante la compuerta ubicada aguas abajo. Para ver las tablas de los resultados obtenidos ver ANEXO I. La obtención de los resultados se obtuvo de las siguientes ecuaciones:

### Datos de Entrada

- Caudal (Q)
- Profundidades aguas arriba y aguas abajo ( $Y_n$ )
- Diámetro (d)
- Pendiente (S)

### Fórmulas

- **Área mojada ( $m^2$ )**

$$A = \left( \frac{1}{8} * (\theta - \sin \theta) \right) * d^2$$

Ecuación 93. Cálculo del área mojada en secciones circulares.

Expresando  $\Theta$  como:

$$\theta = \pi + 2 * \arcsin \left( \frac{y_n - \left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2}} \right)$$

donde  $d$  es el diámetro de la tubería que es constante en este informe experimental,  $y_n$  es la profundidad de flujo ya sea aguas arriba o aguas abajo.

- **Velocidad de flujo ( $\frac{m}{s^2}$ )**

$$v = \frac{Q}{A}$$

Ecuación 94. Cálculo de la velocidad de flujo en secciones circulares.

donde  $A$  es el área mojada y  $Q$  el caudal de entrada a la tubería.

- **Ancho de la superficie de agua ( $m$ )**

$$T = d * \cos \left( \arcsin \frac{\left( y_n - \left( \frac{d}{2} \right) \right)}{\frac{d}{2}} \right)$$

**Ecuación 95. Cálculo del ancho de la superficie de agua en secciones circulares.**

- **Perímetro mojado ( $m$ )**

$$P = \frac{\theta * d}{2}$$

**Ecuación 96. Cálculo del perímetro mojado en secciones circulares.**

- **Profundidad hidráulica ( $m$ )**

$$D = \frac{A}{T}$$

**Ecuación 97. Cálculo de la profundidad hidráulica en secciones circulares.**

- **Número de Froude**

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{9,81 * D}}$$

**Ecuación 98. Cálculo del número de Froude en secciones circulares.**

- **Relación de llenado**

$$\frac{y}{d} = \frac{y_n}{d}$$

**Ecuación 99. Cálculo de la relación de llenado en secciones circulares.**

donde  $y_n$  es la altura dada por el sensor aguas arriba o aguas abajo y  $d$  es el diámetro de la tubería.

- **Energía específica**

$$E = y_n + \left( \frac{v^2}{2 * 9,81} \right)$$

**Ecuación 100. Cálculo de la energía específica en secciones circulares.**

- **Pérdidas de energía en el resalto hidráulico**

$$\Delta E = E_1 - E_2$$

**Ecuación 101. Cálculo de las pérdidas de energía del resalto hidráulico en secciones circulares.**

- **Eficiencia del resalto hidráulico (%)**

$$Eficiencia = \frac{\Delta E}{E_1} * 100$$

**Ecuación 102. Cálculo de la eficiencia del resalto hidráulico en secciones circulares.**

- **Momentum**

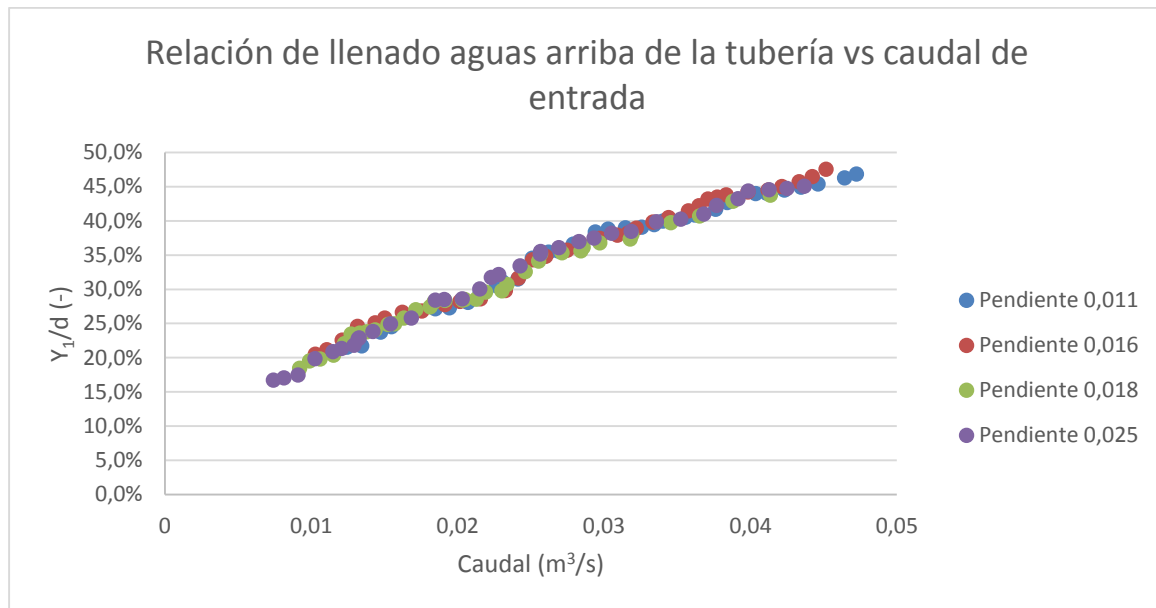
$$Z_1 * A_1 + \frac{Q^2}{g * A_1} = Z_2 * A_2 + \frac{Q^2}{g * A_2}$$

**Ecuación 103. Cálculo del momentum específico en secciones circulares.**

donde  $Z$  es el centroide mojado,  $A$  es el área mojada,  $g$  es la gravedad y  $Q$  es el caudal de entrada a la tubería.

Luego de obtener todos los resultados por los ensayos, se procedió a realizar un análisis de los resultados, verificando el comportamiento de cada una de las pendientes que se estudiaron. Lo primero que se estudió fue el comportamiento de la relación de llenado aguas arriba de la tubería contra los caudales que se trabajaron en cada una de las cuatro pendientes, obteniendo los siguientes resultados:

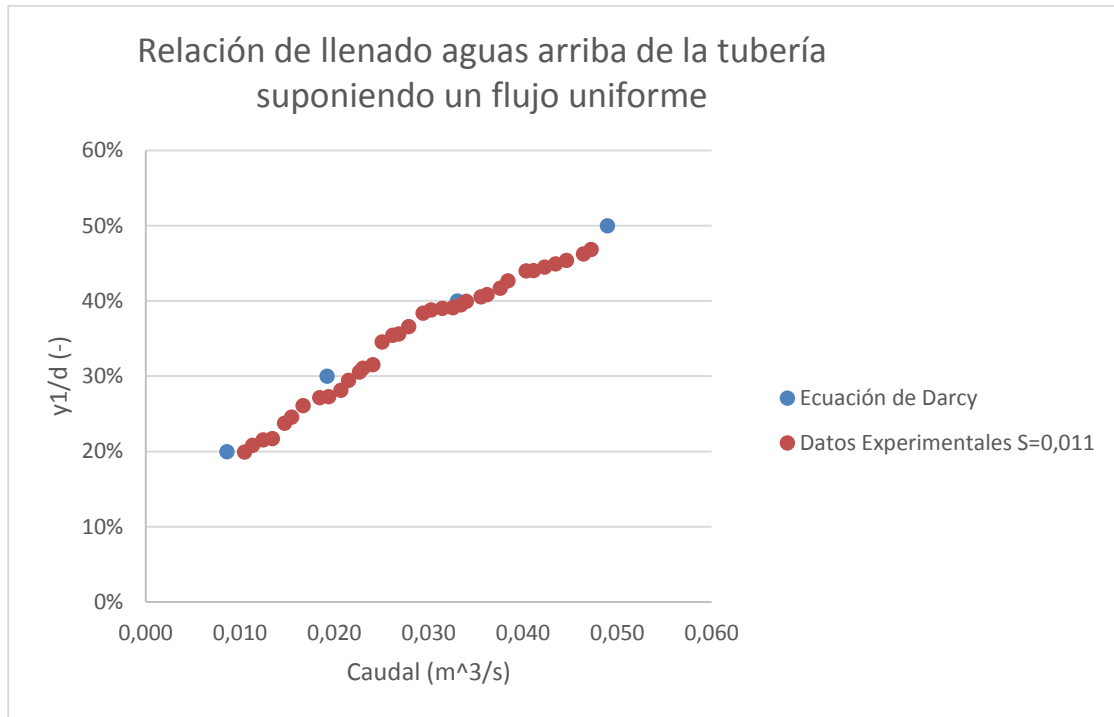




**Gráfica 56. Comparación de las pendientes con respecto a su relación de llenado aguas arriba.**

En la Gráfica 58 se puede observar que en todas las pendientes trabajadas no hubo cambios significativos en las relaciones de llenado aguas arriba con respecto a los caudales trabajados, por lo cual se puede llegar a la conclusión, que en este tipo de experimentos acerca del fenómeno de resalto hidráulico, la pendiente no es función de la relación de llenado aguas arriba: Esto se debe al trabajo que realiza la compuerta aguas abajo de la tubería para ocasionar el resalto hidráulico, lo cual hace que el flujo aguas arriba no genere ningún cambio abrupto en su profundidad de flujo mediante diferentes caudales. Lo otro que se puede analizar de la Gráfica 58 es que presenta un comportamiento lineal y directamente proporcional a los caudales trabajados; a mayor caudal mayor relación de llenado aguas arriba de la tubería.

Ahora se procede a verificar si este flujo aguas arriba se puede suponer como un flujo de comportamiento uniforme utilizando la ecuación de Darcy Weisbach para comparar los datos experimentales con estos datos teóricos. Para ver la tabla de resultados teóricos ver ANEXO II.



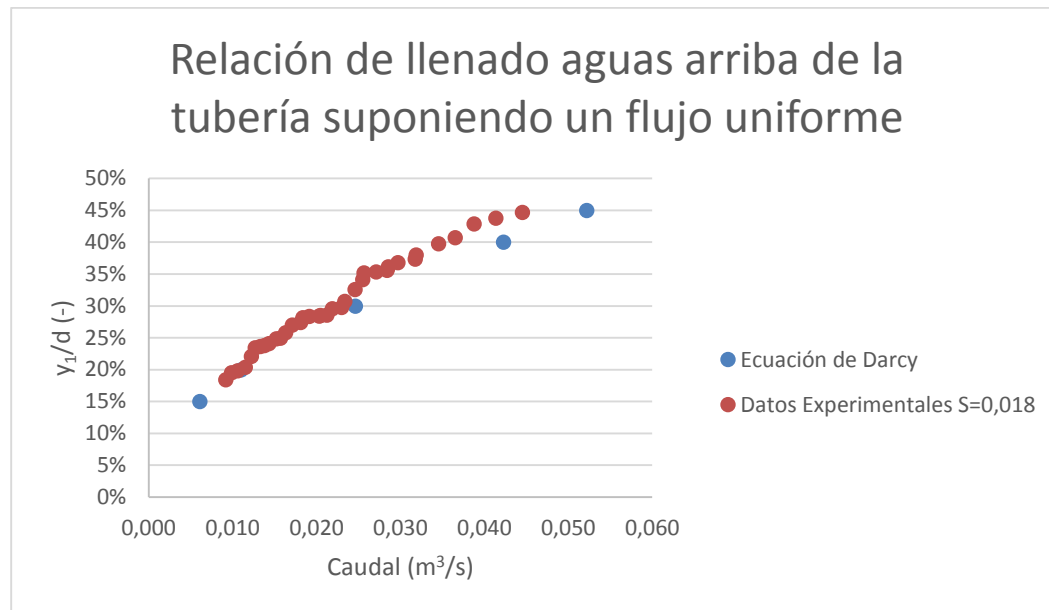
**Gráfica 57. Comparación de la pendiente 0,011 con la ecuación de Darcy Weisbach.**

Para analizar la ecuación de Darcy Weisbach se debe realizar la siguiente suposición para usar un flujo uniforme

$$S_f = S_o$$

donde  $S_f$  es la pendiente de fricción y  $S_o$  es la pendiente del canal.

Por otro lado, este análisis solo se realizó para la pendiente 0,011 y muestra una muy buena relación con la ecuación de Darcy, por lo cual se puede suponer que en los ensayos que se realizaron aguas arriba por la longitud de la tubería y por no tener ninguna obstrucción el flujo es uniforme tal como se observa en la Gráfica 59. Ahora se procede a desarrollar el mismo proceso para otra pendiente para verificar lo dicho anteriormente.

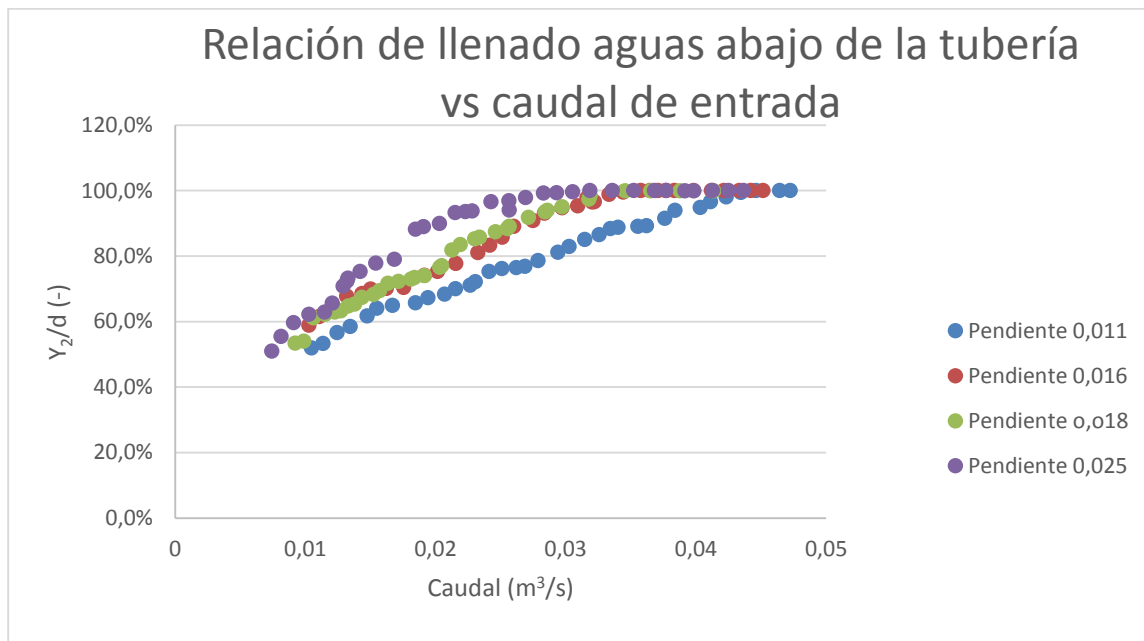


**Gráfica 58. Comparación de la pendiente 0,018 con la ecuación de Darcy Weisbach.**

Como se había dicho anteriormente de la pendiente de 0,011, en la Gráfica 60 de la comparación de la pendiente 0,018 y la ecuación teórica de Darcy Weisbach se observa cierta similitud con los resultados teóricos. Por lo cual, se puede suponer que aguas arriba de la tubería siempre se va a trabajar con un flujo uniforme. Estos pequeños desfases que se pueden observar se suponen a la variación de dato en la toma de profundidades por tener un comportamiento de oleaje como se mostraba en las Gráfica 46 y Gráfica 47.

Cabe resaltar que no se tomaron relaciones de llenado experimentales menores al 16% y caudales menores a 8 L/s, por lo que al tener estos caudales tan bajos las posibilidades de aumentar la incertidumbre en el caudalímetro electromagnético eran mayores, y además por tener tan poco caudal en el momento que se controlaba la compuerta no se alcanzaba a generar el fenómeno del resalto hidráulico o era muy difícil de observar y analizar.

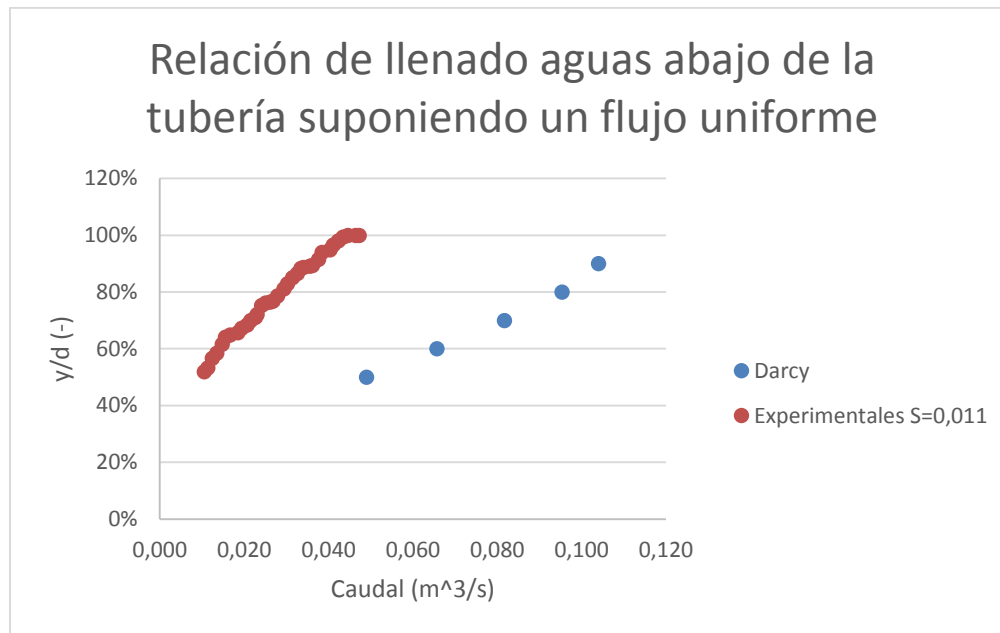
Luego se procedió a encontrar el comportamiento que tiene la tubería aguas abajo, calculando las relaciones de llenado de esta parte de la tubería contra los caudales que se trabajaron.



**Gráfica 59. Comparación de la relación de llenado aguas abajo con respecto a las pendientes trabajadas.**

Como se esperaba tras el fenómeno del resalto hidráulico, se puede observar en la Gráfica 61 que la pendiente que más rápido llegó a su presurización aguas abajo fue la mayor, y que la que tarda más en llegar a su presurización es el ensayo realizado con la pendiente menor. De esta gráfica se puede llegar a la conclusión que, para diseñar una tubería para el alcantarillado de drenaje urbano (que es el objetivo de esta tesis) para ciudades donde se tenga altas presurizaciones promedios anuales, es mejor diseñar con tuberías de bajas pendientes y de esta forma no causar sobrecargas en el sistema y evitar daños en estas e inundaciones en las ciudades.

Por otro lado, se va analizar si también se puede realizar la suposición de flujo uniforme aguas abajo y asegurar que  $S_f = S_o$  utilizando la ecuación de Darcy Weisbach para las relaciones de llenado que se presentan aguas abajo.



**Gráfica 60. Comparación de la pendiente 0,011 con la ecuación de Darcy Weisbach.**

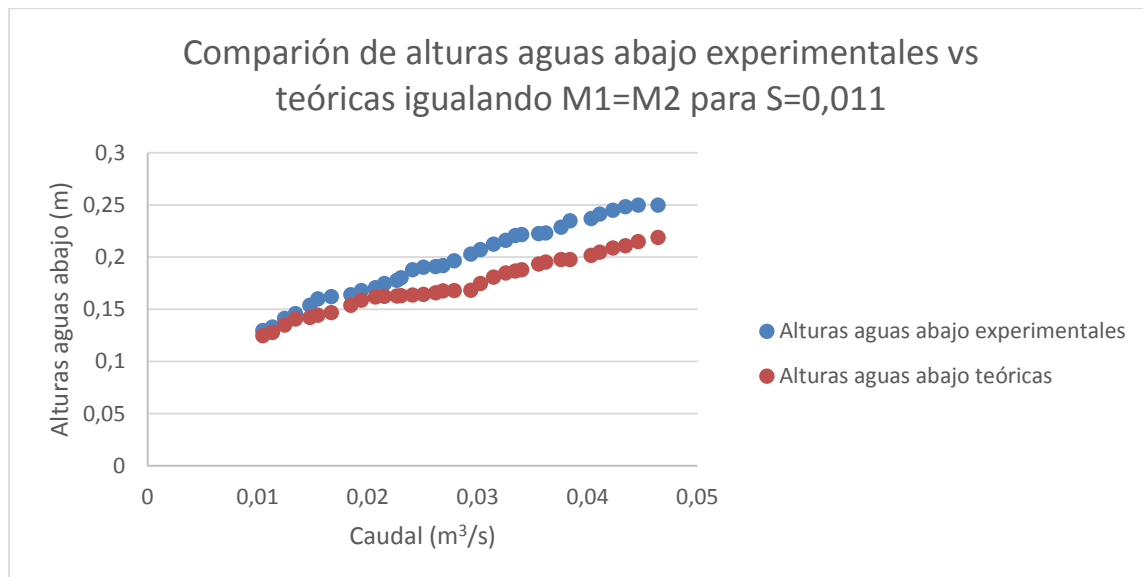
Como se observa en la gráfica anterior, no se puede utilizar la ecuación de Darcy Weisbach aguas abajo de la tubería, puesto que no se posee ninguna relación entre sí. Esto se debe a que la relación de llenado aguas abajo en el proyecto realizado en el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de los Andes, no es de forma uniforme puesto que se está generando el fenómeno del resalto hidráulico, causando así que el flujo llegue a su presurización de forma más rápida con caudales menores; alcanzando su máxima capacidad en 45 L/s. Por otro lado, lo que se puede evidenciar en los resultados teóricos obtenidos mediante la ecuación de Darcy, es que el flujo presenta un comportamiento lineal a medida que se aumentan los caudales alcanzando un máximo caudal de 105 L/s.

No cabe mostrar el comportamiento de las demás pendientes puesto que se sabe que ninguno va a cumplir con los datos teóricos de la ecuación de Darcy Weisbach. Por lo tanto, aguas abajo se descarta que  $S_f = S_o$ , entonces se llega a la conclusión que el flujo aguas abajo no es uniforme sino gradualmente variado. Para poder observar el comportamiento de la tubería aguas abajo es necesario hacer referencia a la ecuación de momentum específico, puesto que en un resalto hidráulico la energía no se conserva pero el momentum sí. Se supone la ecuación de momentum como:

$$Z_1 * A_1 + \frac{Q^2}{g * A_1} = Z_2 * A_2 + \frac{Q^2}{g * A_2}$$

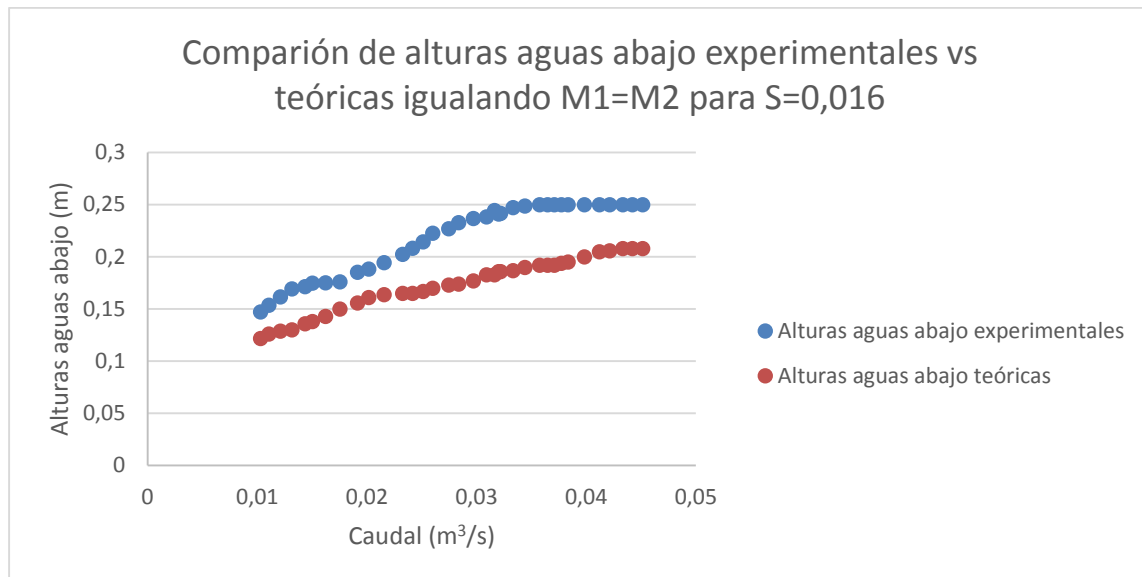
**Ecuación 104. Momentum en un resalto hidráulico.**

donde  $Z$  es el centroide mojado,  $A$  es el área mojada,  $g$  es la gravedad y  $Q$  es el caudal de entrada a la tubería. De esta forma, se pueden encontrar los resultados teóricos para  $y_2$  y realizar una verificación de datos para determinar qué tan variables fueron los resultados dados por el sensor de profundidades aguas abajo, teniendo en cuenta otra posible causa de error como: para que el momentum en un resalto hidráulico se conserve es necesario tomar las mediciones exactamente cuándo comienza el resalto y cuando este termina. Debido a que los sensores de profundidades se encuentran a una distancia de 4,05 metros entre sí, no se pudo generar esta medida con seguridad. Sin embargo, debido a que anteriormente se asumió que el comportamiento aguas arriba era uniforme, los resultados obtenidos por el sensor aguas arriba se consideran de forma válida. Por lo tanto, se van a analizar las medidas obtenidas por el sensor aguas abajo contra los resultados teóricos aguas abajo igualando momentum:



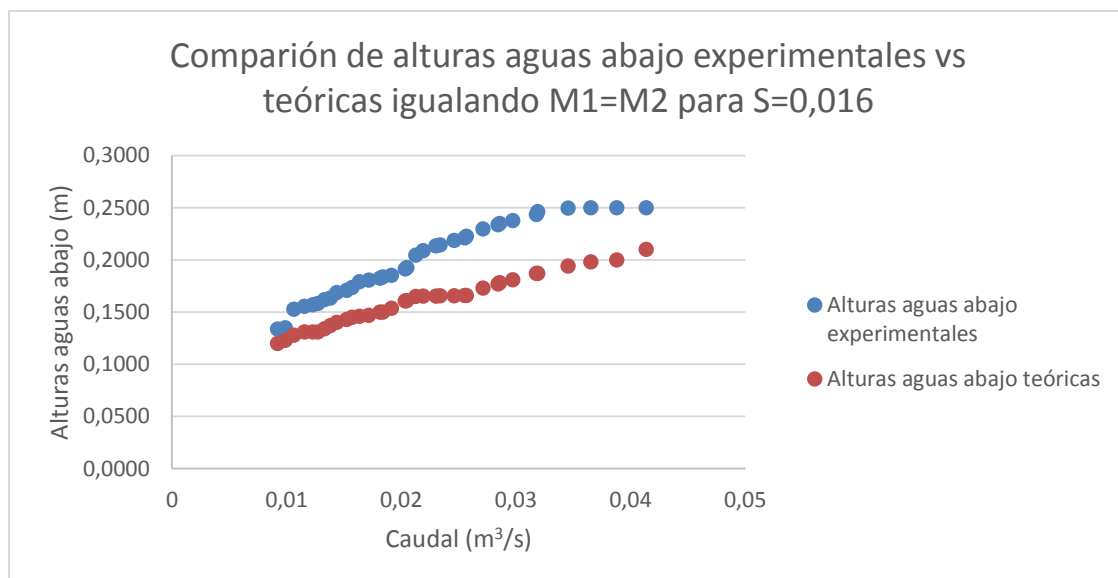
**Gráfica 61. Comparación de resultados teóricos contra los resultados experimentales de la pendiente 0,011.**

Como era de esperarse los resultados experimentales cuentan con un cierto grado de error con respecto a los resultados teóricos con respecto a la pendiente de 0,011. A continuación, se procede para el análisis de este comportamiento en las demás pendiente que se trabajaron en este proyecto.



**Gráfica 62. Comparación de resultados teóricos contra los resultados experimentales de la pendiente 0,016.**

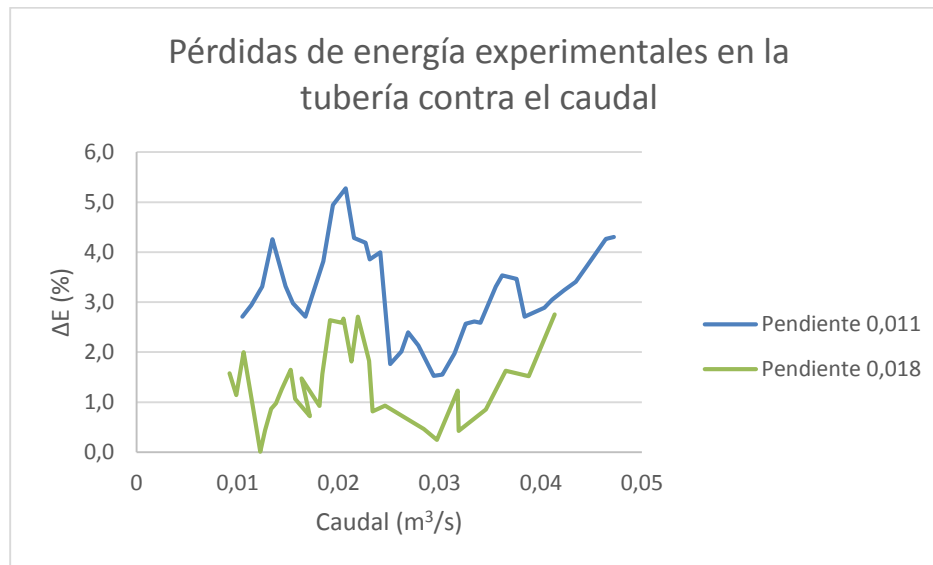
Al igual que la Gráfica 63, la Gráfica 64 presenta un comportamiento similar demostrando que para los caudales trabajados existe cierto margen de error lo cual pudo deberse a que no se tomaron las mediciones aguas abajo exactamente donde se acababa el resalto o por las constantes variaciones del sensor aguas abajo, lo que pudo ocasionar un incremento en las medidas.



**Gráfica 63. Comparación de resultados teóricos contra los resultados experimentales de la pendiente 0,018.**

Finalmente, para la pendiente de 0,018 se muestra que el comportamiento sigue estable y muestra cierta tendencia con respecto a las demás pendientes analizadas anteriormente. Como el fin de este experimento es encontrar el verdadero comportamiento de la tubería y entender el fenómeno del resalto hidráulico, se van a estudiar las alturas aguas abajo dadas por el sensor y se va a trabajar para obtener una ecuación empírica de este experimento que demuestre los caudales más críticos con los cuales se debe trabajar en cada una de las pendientes. Para este proceso se va a necesitar un análisis de regresión lineal.

Antes de mostrar el proceso para la obtención de la ecuación empírica se va a mostrar el comportamiento de la tubería en cuanto a las pérdidas de energía teniendo en cuenta ya los errores de las mediciones mostrados anteriormente.



**Gráfica 64. Pérdidas de energía experimentales en la tubería.**

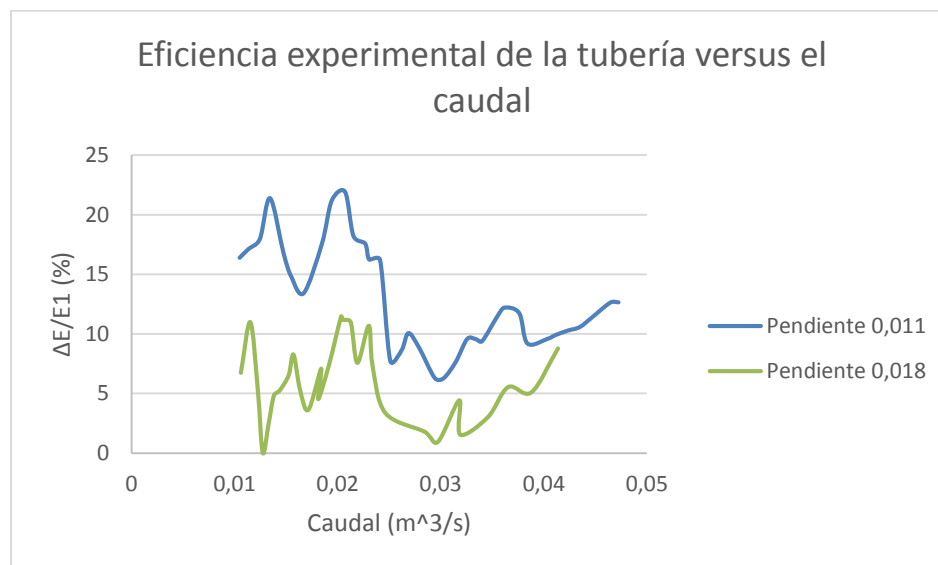
De la Gráfica 66 se puede concluir que en los caudales más pequeños el comportamiento es más inestable en la tubería, en cambio en los caudales más altos se puede mostrar que la gráfica sigue cierta tendencia a disipar mayor energía a mayores caudales, lo cual debería ocurrir normalmente en un resalto hidráulico.

Los motivos por los cuales el comportamiento de la tubería en caudales mayores es tan inestable se puede asimilar a posibles errores de medición que ya fueron mencionados anteriormente y a posibles errores de los instrumentos (Caudalímetro) como se presentaba en la Gráfica 56 (Rangos de error del caudalímetro electromagnético clase 2 según OIML R49 (WaterMaster, 2013). La cual presentaba que a menores caudales se iban a generar mayores incertidumbres. Por otro lado, otra muy posible causa de error en esta sección de la gráfica se



pudo generar porque al presentar el fenómeno del resalto hidráulico esta altura subsecuente aguas abajo se presentara muy cercana a la altura crítica. Esto puede generar que el flujo sea cuasi-crítico y presente bastantes variaciones en estas zonas de los resultados.

En cambio, en el rango de los caudales más altos (> 30 L/s) se puede analizar cierta tendencia de los resultados, mostrando un incremento directamente proporcional al caudal, lo que infiere que a mayor caudal, mayor disipación de energía. Esto es cierto puesto que a mayores caudales se van a presentar flujos más supercríticos aguas arriba generando un resalto mucho más fuerte, disipando mayor energía.



**Gráfica 65. Eficiencia experimental de la tubería.**

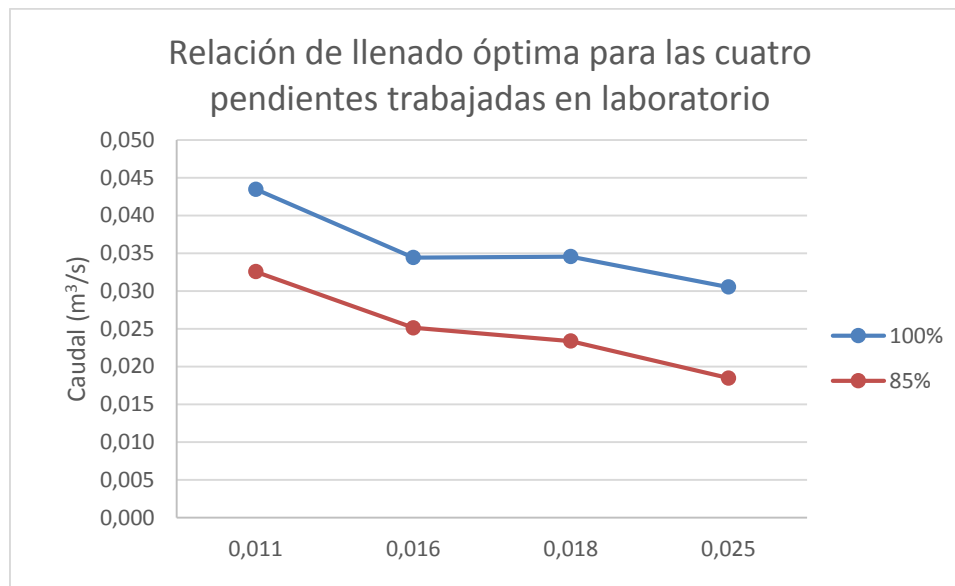
Como se explicaba anteriormente, el comportamiento tan inestable para los caudales menores puede deberse a que las profundidades subsecuentes estén muy cercanas a las profundidades críticas, por lo que genera que el comportamiento sea muy inestable. Otra causa de este comportamiento puede ser ocasionada por errores en las mediciones o por errores de los instrumentos. Además también se puede observar que en el rango de los caudales más altos (> 30 L/s) se comienza a generar una tendencia directamente proporcional que al aumentar el caudal se aumenta la eficiencia.

Ahora se procede a encontrar cuál es el caudal máximo que se necesita para alcanzar la presurización en cada uno de los ensayos que se realizaron con las cuatro pendientes diferentes, y por otro lado de cuanto caudal se necesita para encontrar la relación de llenado estipulada por la RAS (Reglamento Técnico del Sector de Agua Potable y Saneamiento Básico).

**Tabla 9. Caudales máximos que resiste cada pendiente hasta su presurización y hasta una relación de llenado del 86%.**

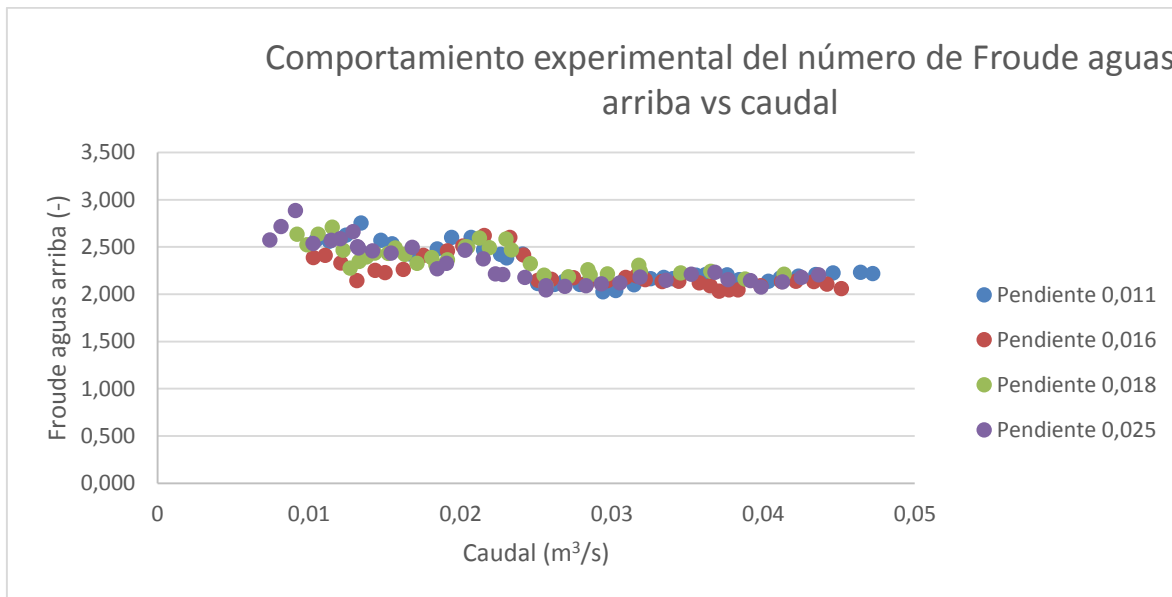
100%		86%	
S (-)	Q (m <sup>3</sup> /s)	S(-)	Q (m <sup>3</sup> /s)
<b>0,011</b>	0,043	0,011	0,033
<b>0,016</b>	0,034	0,016	0,025
<b>0,018</b>	0,035	0,018	0,023
<b>0,025</b>	0,031	0,025	0,018

Como se esperaba, el ensayo que resiste mayores caudales hasta llegar a su presurización o hasta llegar a una relación de llenado del 85%, es el experimento realizado con la pendiente más baja (S=0,011) y esto se puede observar de manera sucesiva (a menor pendiente, se resiste mayores caudales). Esto se puede evidenciar de una mejor forma en la gráfica presentada a continuación:



**Gráfica 66. Relación de llenado óptima para las cuatro pendientes trabajadas.**

Ahora, se procede a verificar el comportamiento de la tubería en las diferentes pendientes graficando el número de Froude aguas arriba para los diferentes caudales trabajados en este proyecto.

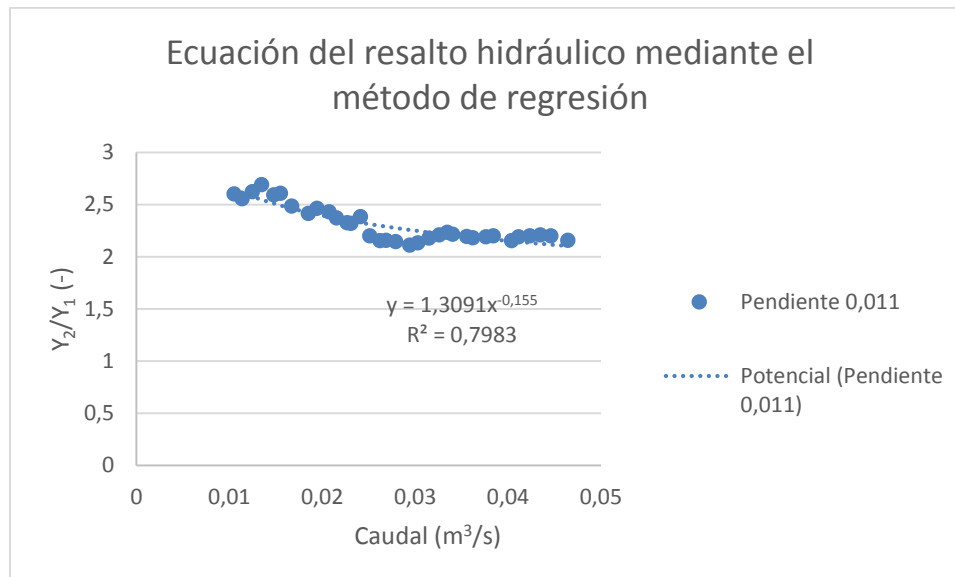


**Grafica 67. Comportamiento experimental del número de Froude aguas arriba.**

El número de Froude aguas arriba de la tubería se comporta de forma inversamente proporcional al caudal como se puede observar en la Gráfica 67, es decir, mientras el caudal es mayor y la profundidad de flujo es mayor; el número de Froude tiende a disminuir y a comportarse de forma más estable y más subcrítico. En cambio, cuando se procede a disminuir el caudal; este tiende a comportarse de forma más crítica, teniendo un comportamiento inestable hasta pasar a una forma más supercrítica y más difícil de controlar.

Finalmente, se procede a explicar el procedimiento que se tuvo en cuenta para la obtención de una ecuación empírica para encontrar la pendiente óptima para un caudal dado, evitando la presurización de esta o una relación de llenado superior al 85% como lo estipula la RAS (Reglamento Técnico del Sector de Agua Potable y Saneamiento Básico).

Primero, se realizó una comparación entre pendientes mediante el método de regresión, entre las alturas aguas arriba, las alturas aguas abajo y el caudal del entrada que se utilizó, para encontrar una ecuación empírica que demuestre el comportamiento de la tubería en cada una de las pendientes trabajadas. A continuación se mostrará cada una de las regresiones que se realizaron



**Gráfica 68. Ecuación del resalto hidráulico mediante el método de regresión para la pendiente de 0,011.**

Para la pendiente más pequeña (0,011), se puede encontrar un factor de correlación del 0,7982 lo cual puede mostrar que se encuentra una muy buena relación de los datos con un ajuste potencial que se expresa de la siguiente forma:

$$y = 1,3091x^{-0,155}$$

**Ecuación 105. Ecuación del resalto hidráulico para una pendiente de 0,011.**

Por lo tanto, se puede expresar la variable dependiente e independiente como

$$y = \frac{y_2}{y_1} \quad ; \quad x = Q$$

**Ecuación 106. Definición de variables dependientes e independientes.**

donde  $y_2$  es la altura aguas abajo del resalto,  $y_1$  es la profundidad de flujo aguas arriba y  $Q$  es el caudal de entrada a la tubería. Ahora, conociendo la ecuación del número de Froude como:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g * D}}$$

**Ecuación 107. Ecuación para encontrar el número de Froude.**

La velocidad se puede expresar como

$$V = \frac{Q}{A}$$

**Ecuación 108. Velocidad de flujo.**

Reemplazando la Ecuación 97 en la Ecuación 96:

$$Fr = \frac{Q}{A * \sqrt{g * D}}$$

**Ecuación 109. Número de Froude reemplazado.**

Y reemplazando y despejando en la Ecuación 94 obtenemos como resultado

$$\frac{y_2}{y_1} = 1,3091 (Fr * A * \sqrt{g * D})^{-0,155}$$

**Ecuación 110. Ecuación del resalto hidráulico para la pendiente de 0,011.**

Para una sección circular se tiene que:

$$\frac{y_2}{y_1} = 1,3091 \left( Fr * \frac{1}{8} * (\theta - \sin \theta) * d^2 * \sqrt{g * D} \right)^{-0,155}$$

**Ecuación 111. Ecuación del resalto hidráulico reemplazada para la pendiente de 0,011.**

Se realiza el mismo procedimiento para cada pendiente y se obtienen las siguientes ecuaciones empíricas para el resalto hidráulico según la pendiente:

$$\frac{y_2}{y_1} = 1,2927 \left( Fr * \frac{1}{8} * (\theta - \sin \theta) * d^2 * \sqrt{g * D} \right)^{-0,181}$$

**Ecuación 112. Ecuación del resalto hidráulico reemplazada para la pendiente de 0,016.**

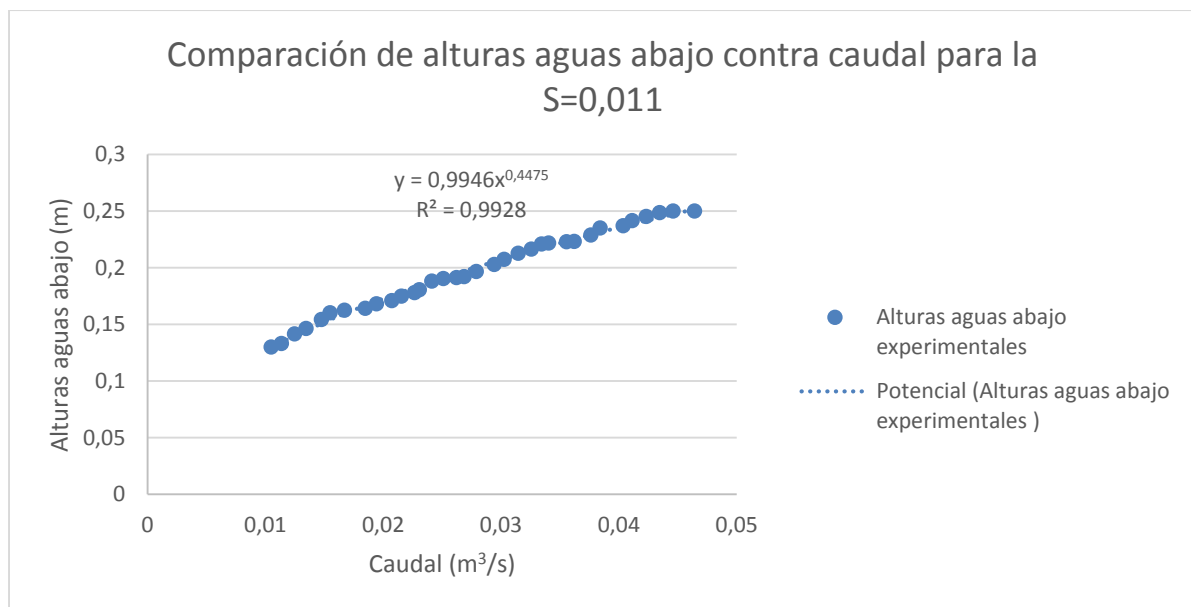
$$\frac{y_2}{y_1} = 1,6684 \left( Fr * \frac{1}{8} * (\theta - \sin \theta) * d^2 * \sqrt{g * D} \right)^{-0,122}$$

**Ecuación 113. Ecuación del resalto hidráulico reemplazada para la pendiente de 0,018.**

$$\frac{y_2}{y_1} = 1,1785 \left( Fr * \frac{1}{8} * (\theta - \sin \theta) * d^2 * \sqrt{g * D} \right)^{-0,225}$$

**Ecuación 114. Ecuación del resalto hidráulico reemplazada para la pendiente de 0,025.**

Además, se realizó la programación de una macro en Excel (VBA VER ANEXO IV), para encontrar cuál es la pendiente óptima entre las cuatro trabajadas en este documento para un caudal de diseño dado. De esta forma, se procedió a realizar las siguientes regresiones y encontrar una ecuación que describa las profundidades de flujo aguas abajo de la tubería evitando las sobrecargas ( $Y/d > 85\%$ ).



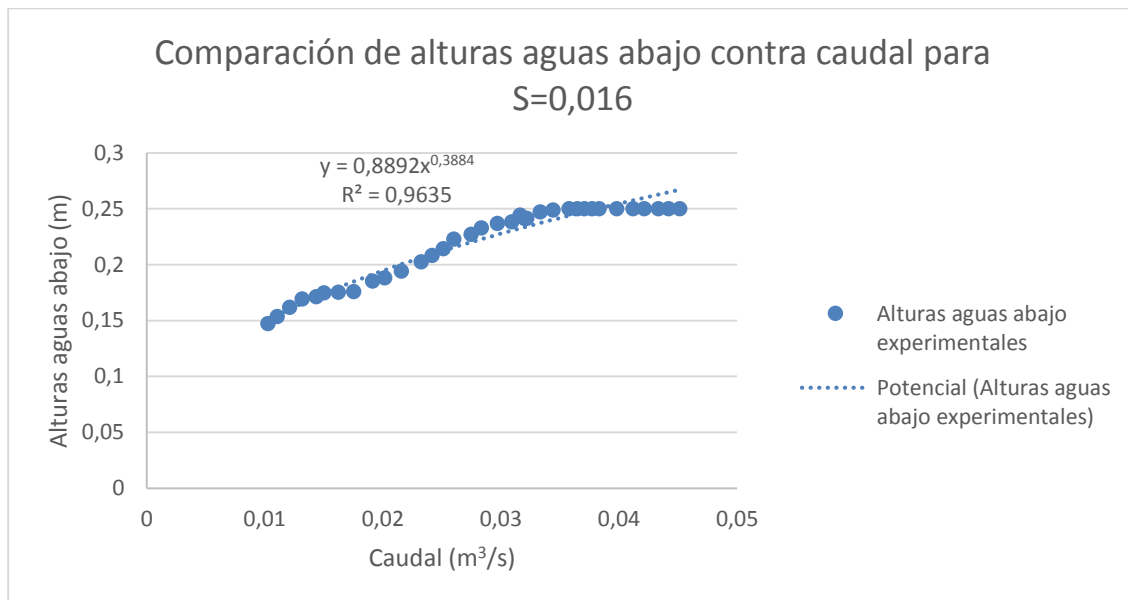
**Gráfica 69. Comparación de alturas con respecto al caudal de entrada para la pendiente de 0,011.**

Mediante una regresión se puede encontrar que la ecuación que mejor se ajusta a los datos experimentales es una potencial mostrando un factor de correlación bastante alto. Ahora, a manera de ejemplo, se procede a mostrar el funcionamiento del programa para esta pendiente con un caudal de diseño de 31 L/s ( $0,031 m^3/s$ ), donde alcanzaría su relación de llenado máxima del 85%, sin causar daños ni sobrecargas.

<b>Q (m<sup>3</sup>/s)</b>	0,031	<b>Datos de Entrada (utilizar pendientes trabajadas 0,011-0,016-0,018-0,025)</b>	Selección de Pendiente
<b>S (-)</b>	0,011		
<b>d (m)</b>	0,25		
<b>y<sub>2</sub> (m)</b>	0,210	<b>Resultados (verificar si relación de llenado cumple con lo estipulado por el RAS)</b>	
<b>y<sub>2</sub>/d (-)</b>	0,841		
<b>Cumple 85%</b>	SI		

**Gráfica 70. Solución de relación de llenado para pendiente 0,011 mediante programa de VBA.**

Como se puede observar en la gráfica anterior, efectivamente con este caudal de diseño está pendiente (S=0,011) alcanza su mayor relación de llenado permitida sin exceder el 85%, tal como se podía observar en la Gráfica 68. Ahora, se procede a verificar el comportamiento de las demás pendientes estudiadas en este proyecto de grado.



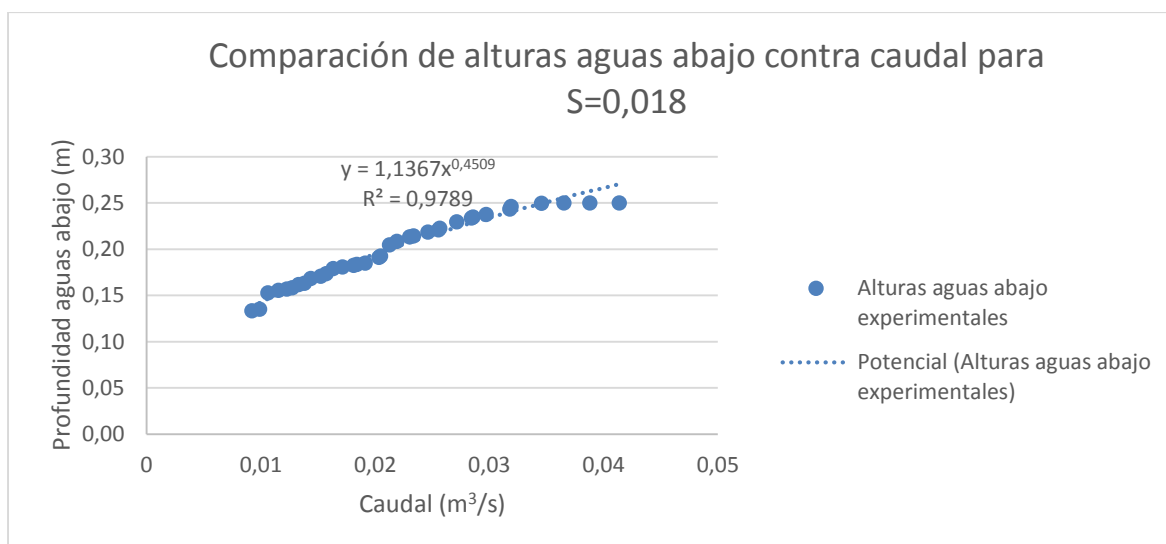
**Gráfica 71. Comparación de alturas con respecto al caudal de entrada para la pendiente de 0,016.**

Para encontrar la ecuación de la pendiente 0,016 se realizó una regresión de orden potencial al igual que la pendiente anterior, obteniendo un factor de correlación bastante positivo, lo cual demuestra que los resultados se ajustan muy bien a la ecuación. De esta forma, se verifica que se cumpla el caudal necesario requerido para una relación de llenado del 85% como se muestra en la Gráfica 68 (Relación de llenado más crítica para las cuatro pendientes trabajadas).

Q (m <sup>3</sup> /s)	0,025	Datos de Entrada (utilizar pendientes trabajadas 0,011-0,016-0,018-0,025)	Selección de Pendiente
S (-)	0,016		
d (m)	0,25		
y2 (m)	0,212	Resultados (verificar si relación de llenado cumple con lo estipulado por el RAS)	
y2/d (-)	0,849		
Cumple 85%	SI		

**Gráfica 72. Solución de relación de llenado para pendiente 0,016 mediante programa de VBA.**

Como se puede observar en la gráfica anterior, el máximo caudal que puede resistir esta tubería de 25 centímetros de diámetro es de 25 L/s (0,025 m<sup>3</sup>/s) para que se cumpla una relación de llenado del 85%. Para la pendiente de 0,018 se realiza el mismo procedimiento de regresión y se encuentra que también se acerca a una ecuación potencial con un factor de correlación bastante alto ( $R^2 = 0,9635$ ), y generando un buen ajuste. Por esta razón se va a calcular un caudal de diseño que mediante esta ecuación resista la tubería, cumpliendo la relación de llenado del 85%, para luego comparar con los datos experimentales mostrados en la Gráfica 68 (Relación de llenado óptima para las cuatro pendientes trabajadas).



**Gráfica 73. Comparación de alturas con respecto al caudal de entrada para la pendiente de 0,018.**

Se presenta la gráfica de la cual se realizó la regresión y se obtuvo la siguiente ecuación:

$$y = 0,8892x^{0,3884}$$

**Ecuación 115. Método de regresión para pendiente de 0,018.**



Para encontrar el caudal máximo permitido por esta pendiente, se procede a verificar en el programa de VBA, mostrando los siguientes resultados:

Q (m <sup>3</sup> /s)	0,024	Datos de Entrada (utilizar pendientes trabajadas 0,011-0,016-0,018-0,025)	Selección de Pendiente
S (-)	0,018		
d (m)	0,25		
y2 (m)	0,211	Resultados (verificar si relación de llenado cumple con lo estipulado por el RAS)	
y2/d (-)	0,846		
Cumple 85%	SI		

**Gráfica 74. Solución de relación de llenado para pendiente 0,018 mediante programa de VBA.**

Como era de esperarse, y como se había visto en los resultados experimentales, la pendiente de 0,018 se comporta de una forma muy similar a la pendiente anterior (S=0,016) pero está alcanzando su nivel máximo de 85% un poco antes (24L/s-0,024m<sup>3</sup>/s), tal como se mostraba anteriormente en la Gráfica 68 (Relación de llenado más crítica para las cuatro pendientes trabajadas). En definitiva, para la última pendiente y la más crítica (S=0,025) se realizó una regresión y se obtuvo la siguiente ecuación que más se ajustaba a los datos:

$$y = 0,8893x^{0,3715}$$

**Ecuación 116. Método de regresión para pendiente de 0,025.**

Luego, utilizando esta ecuación se puede obtener la capacidad máxima que posee la tubería con esta pendiente si exceder el 85% de relación de llenado aguas abajo.

Q (m <sup>3</sup> /s)	0,021	Datos de Entrada (utilizar pendientes trabajadas 0,011-0,016-0,018-0,025)	Selección de Pendiente
S (-)	0,025		
d (m)	0,25		
y2 (m)	0,212	Resultados (verificar si relación de llenado cumple con lo estipulado por el RAS)	
y2/d (-)	0,847		
Cumple 85%	SI		

**Gráfica 75. Solución de relación de llenado para pendiente 0,025 mediante programa de VBA.**

---

Finalmente, se puede encontrar que esta pendiente trabaja caudales mucho más bajos que las demás por tener una mayor inclinación soportando un caudal máximo de 21 L/s ( $0,021\text{m}^3/\text{s}$ ). Pero esta ecuación de aproximación sí demuestra mucha coherencia con los resultados obtenidos experimentalmente.

## 7. Conclusiones

---

Se determinó que las condiciones más adecuadas de la tubería para soportar una mayor cantidad de caudal se desarrollaban en la pendiente más pequeña ( $S=0,011$ ), llegando a alcanzar un caudal máximo de 31 L/s ( $0,031 \text{ m}^3/\text{s}$ ), manteniendo una relación de llenado menor al 85% aguas abajo de la tubería. También se pudo concluir que el comportamiento de todas las pendientes siguió una tendencia y por ende la pendiente más crítica que se encontró fue la de 0,025 resistiendo tan solo un caudal de 21 L/s ( $0,021 \text{ m}^3/\text{s}$ ).

Por otro lado, se encontró que en la tubería el flujo aguas arriba no representaba ninguna dependencia de la pendiente y se comportaba de una forma uniforme, lo cual concluyó que el flujo aguas arriba solo dependía del caudal de entrada. Por otro lado, se pudo encontrar que el comportamiento aguas abajo de la tubería después del resalto se presentaba como un flujo gradualmente variado y por ende iba alcanzando la presurización mucho antes que lo concluido en la ecuación teórica de Darcy Weisbach. Es por esta razón que para poder entender el comportamiento aguas abajo se trabajó la ecuación de momentum específico, el cual se conserva en un resalto hidráulico.

Al realizar la comparación de estos resultados experimentales con los teóricos se encontró un rango ciertamente grande de error, especialmente cuando se trabajó en los caudales más pequeños. Este tipo de error se puede asociar con dos diferentes causas: la primera, a la incertidumbre generada por el caudalímetro electromagnético el cual presenta una mayor variación en los datos a medida que se disminuía el caudal; la segunda, a la alta variación que presentó el sensor aguas abajo, lo cual pudo producir error en las medidas.

Al analizar los resultados teóricos aguas abajo con los experimentales, se descubrió que el momentum de los datos experimentales no se alcanzaba a conservar por lo cual se adjudicó que teóricamente el momentum en un resalto hidráulico se conserva exactamente en el punto donde comienza y el punto donde termina el resalto hidráulico. Lo anterior debido a que en el modelo que se trabajó este proyecto de grado, los sensores se encontraban separados a 4,05 metros entre sí, y por tanto no se pudo tomar la medición exacta del punto final del resalto, esta pudo haber sido una causa de desequilibrio en los datos.

Finalmente, se puede llegar a la conclusión que, para obtener un máximo funcionamiento de la tubería resistiendo mayores caudales a través de esta, luego de que ocurra el fenómeno del resalto hidráulico, la pendiente más adecuada a trabajar sería la pendiente más pequeña ( $S=0,011$ ) porque demostró un mejor comportamiento en todo el experimento y mostró unos resultados muchos más claros y concisos, como una mayor eficacia, generó mayores pérdidas de energía y tardó más en llegar a la presurización de la tubería, resistiendo caudales mayores sin generar daños ni sobrecargas en el sistema.

## 8. Glosario

---

**Altura aguas arriba:** Es la profundidad de flujo que se genera antes de que se ocasione el fenómeno del resalto hidráulico.

**Altura aguas abajo:** Es la profundidad de flujo que se genera después de que se ocasione el fenómeno del resalto hidráulico.

**Número de Froude:** El número de Froude se calcula para denominar si el comportamiento del flujo es supercrítico, subcrítico o crítico

**Longitud del resalto:** Esta distancia está medida desde donde comienza la turbulencia del fluido aguas abajo formando el resalto, hasta donde se estabiliza el fluido aguas arriba.

**Pérdidas de energía:** Es la energía que se disipa y pierde el flujo al producirse el fenómeno del resalto hidráulico.

**Eficiencia:** Es el porcentaje de energía que se pierde tras ocurrir el fenómeno del resalto hidráulico.

**Flujo crítico:** Este tipo de flujo se evidencia por ser el momento en el cual es más difícil de controlar el flujo, se diferencia por ser la zona de transición donde el flujo puede pasar de subcrítico a supercrítico o viceversa, generalmente es representado por tener un número de Froude igual a 1.

**Relación de llenado:** Se conoce como el porcentaje de llenado que tiene la tubería con respecto al flujo que transporta.

**Resalto hidráulico:** Es un fenómeno que se presenta cuando un flujo genera una transición de un estado supercrítico a un estado subcrítico

**Tubería presurizada:** Este término se utiliza para describir cuando la tubería se encuentra totalmente llena o soportando cargas de presión por que el flujo que contiene tiende a salir de allí.

## 9. Bibliografía

---

- Akan, A. O. (2006). *OPEN CHANNEL HYDRAULICS*. Canada: ELSEVIER.
- BANNER. (2013). *U-GAGE™ T30 Series with Analog and Discrete Outputs*. USA: Banner Engineering Corp.
- Chen, C. S. (1989). The hydraulic jump in a steeply sloping square conduit. *JOURNAL OF HYDRAULIC RESEARCH*, 385-399.
- CIVIL ENGINEERING PORTAL. (2011). *What are the effects of Hydraulic Jump?* Recuperado el 28 de Noviembre de 2011, de <http://www.engineeringcivil.com/what-are-the-effects-of-hydraulic-jump.html>
- Ead, S. A. (2002). HYDRAULIC JUMPS IN CIRCULAR CONDUITS. *Annual conference of the Canadian Society for Civil Engineering*, 6.
- FHWA. (2006). Hydraulic Design of Energy Dissipators for Culverts and Channels. *Hydraulic Engineering Circular*, 6-1 a 6-14.
- Francis, T. a. (2006). Hydraulic jump in circular and U-shaped channels. *Journal of Hydraulic Research vol. 44*, 567-576.
- French, R. H. (2007). The Momentum Principle. En R. H. French, *Open Channel Hydraulics* (págs. 93 - 111). Colorado, USA: Copyright.
- Gargano, R., & Hager, W. H. (2002). Undular Hydraulic Jump in Circular Conduits. *JOURNAL OF HYDRAULIC ENGINEERING*, 1008-1013.
- Ghamry, H. K., Shames, A., & Branch, F. (2002). *Hydraulic Jumps in Circular Conduits*. Québec: CSCE.
- Gonzales Rodríguez, M. (1992). *Estudio Experimental de Flujos Disipativos: I. Resalto Hidráulico*. Cantabria: Universidad de Cantabria.
- Hager, S. H. (1999). *HYDRAULIC JUMP IN CIRCULAR PIPES*. Canada: ProQuest Science Journals.
- Hager, W. H. (1990). CRITICAL FLOW. En W. Hager, *Wastewater Hydraulics* (págs. 137 - 172). Berlin: Springer.
- Kalinske, J. M. (1943). Closed Conduits Flow. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1435-1447.

- Kindsvater, E. W. (1938). Hydraulic Jump in Enclosed Conduits. *Engineering News Record*, 815-817.
- Kindsvater, E. W. (1938). Hydraulic Jump In Enclosed Conduits. *Engineering News Record*, 815 - 817.
- Michell, S. B. (2008). Hydraulic jumps in trapezoidal and circular channels. *ICE (Institution of Civil Engineers)*, 161-167.
- Montaño, L. E. (2012). *Diseño y construcción de un modelo para estudiar el comportamiento de resaltos hidráulicos en tuberías parcialmente llenas de seccion circular, con número de Froude supercríticos menores a 4*. Bogotá D.C.: Universidad de los Andes.
- Mortensen, J. D. (2009). *Factors Affecting Air Entrainment of Hydraulic Jumps within Closed Conduits*. utah: utah state university.
- Rajaratnam, N. (1965). Hydraulic Jump in Horizontal Conduits. *WATER POWER*, 80 - 83.
- Rajaratnam, N. (1965). Hydraulic Jump in Horizontal Conduits. En *Water Power* (págs. 80-85).
- Robertson, J. M., & Kalinske, A. A. (1943). Closed Conduit Flow. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1435-1447.
- Rodríguez, M. G. (1992). *The Hydraulic Jump*. Cantabria: Universidad de Cantabria.
- Silvester, R. (1964). HYDRAULIC JUMP IN ALL SHAPES OF HORIZONTAL CHANNELS. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 23 - 55.
- Silvester, R. (1964). HYDRAULIC JUMP IN ALL SHAPES OF HORIZONTAL CHANNELS. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 23-55.
- SMITH, C. D., & CHEN, W. (1989). The hydraulic jump in a steeply sloping square conduit. *JOURNAL OF HYDRAULIC RESEARCH*, 385 - 399.
- Stahl, H., & Hager, W. H. (1999). Hydraulic jump in circular pipes. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 368 -373.
- WaterMaster. (2013). *Caudalímetro electromagnético (Ficha técnica)*. Reino Unido: DSWM-E Edición 5.

## 10. Anexos

### Anexo I

**Tabla 10. Resultados obtenidos para la pendiente 0,011.**

Pendiente 0,011																		
Ensayo	Alturas	Q [L/s]	Yn [m]	$\Theta$ [Rad]	A [m <sup>2</sup> ]	D [m]	T	P	R	V (m/s)	Fr	Relación de llenado	Tipo de Resalto	Tipo de Resalto	E	$\Delta E$	$\Delta E/E1$ (%)	E2/E1
1	Aguas arriba	47,240	0,117	3,016	0,023	0,091	0,250	0,377	0,060	2,092	2,220	46,9%	Supercrítico	Y<d	0,340	0,043	12,643	0,874
	Aguas abajo	47,240	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,784	0,063	0,962	0,044	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,297			1,138
2	Aguas arriba	46,430	0,116	2,993	0,022	0,089	0,249	0,374	0,059	2,090	2,235	46,3%	Supercrítico	Y<d	0,338	0,043	12,606	0,874
	Aguas abajo	46,430	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,784	0,063	0,946	0,043	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,296			1,114
3	Aguas arriba	44,610	0,114	2,957	0,022	0,087	0,249	0,370	0,059	2,058	2,227	45,4%	Supercrítico	Y<d	0,329	0,037	11,328	0,887
	Aguas abajo	44,610	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,784	0,063	0,909	0,041	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,292			1,105
4	Aguas arriba	43,460	0,112	2,939	0,021	0,086	0,249	0,367	0,058	2,031	2,211	45,0%	Supercrítico	Y<d	0,323	0,034	10,555	0,894
	Aguas abajo	43,460	0,249	5,987	0,049	1,330	0,037	0,748	0,066	0,886	0,245	99,5%	Subcrítico	Y>d	0,289			1,094
5	Aguas arriba	42,320	0,111	2,922	0,021	0,085	0,248	0,365	0,058	2,003	2,193	44,5%	Supercrítico	Y<d	0,316	0,032	10,270	0,897
	Aguas abajo	42,320	0,245	5,724	0,049	0,708	0,069	0,715	0,068	0,866	0,329	98,1%	Subcrítico	Y>d	0,283			1,089
6	Aguas arriba	41,120	0,110	2,904	0,021	0,084	0,248	0,363	0,057	1,973	2,174	44,1%	Supercrítico	Y<d	0,309	0,031	9,887	0,901
	Aguas abajo	41,120	0,242	5,542	0,049	0,536	0,091	0,693	0,070	0,847	0,369	96,6%	Subcrítico	Y>d	0,278			1,086
7	Aguas arriba	40,350	0,110	2,901	0,021	0,084	0,248	0,363	0,057	1,940	2,140	44,0%	Supercrítico	Y<d	0,302	0,029	9,577	0,904
	Aguas abajo	40,350	0,237	5,367	0,048	0,435	0,111	0,671	0,072	0,838	0,406	94,8%	Subcrítico	Y>d	0,273			1,080
8	Aguas arriba	38,410	0,107	2,848	0,020	0,081	0,247	0,356	0,056	1,921	2,157	42,7%	Supercrítico	Y<d	0,295	0,027	9,184	0,908
	Aguas abajo	38,410	0,235	5,292	0,048	0,403	0,119	0,661	0,072	0,802	0,404	94,0%	Subcrítico	Y>d	0,268			1,105
9	Aguas arriba	37,620	0,104	2,809	0,019	0,079	0,247	0,351	0,055	1,939	2,207	41,7%	Supercrítico	Y<d	0,296	0,035	11,717	0,883

	Aguas abajo	37,620	0,229	5,100	0,047	0,338	0,139	0,638	0,074	0,799	0,439	91,5%	Subcrítico	$Y < d$	0,261			1,109
10	Aguas arriba	36,200	0,102	2,774	0,019	0,077	0,246	0,347	0,054	1,919	2,211	40,9%	Supercrítico	$Y < d$	0,290	0,035	12,199	0,878
	Aguas abajo	36,200	0,223	4,951	0,046	0,300	0,154	0,619	0,075	0,782	0,456	89,3%	Subcrítico	$Y < d$	0,254			1,124
11	Aguas arriba	35,560	0,101	2,762	0,019	0,076	0,246	0,345	0,054	1,904	2,203	40,6%	Supercrítico	$Y < d$	0,286	0,033	11,565	0,884
	Aguas abajo	35,560	0,223	4,939	0,046	0,297	0,156	0,617	0,075	0,770	0,451	89,1%	Subcrítico	$Y < d$	0,253			1,089
12	Aguas arriba	34,020	0,100	2,738	0,018	0,075	0,245	0,342	0,054	1,856	2,166	40,0%	Supercrítico	$Y < d$	0,276	0,026	9,390	0,906
	Aguas abajo	34,020	0,222	4,915	0,046	0,291	0,158	0,614	0,075	0,739	0,437	88,7%	Subcrítico	$Y < d$	0,250			1,098
13	Aguas arriba	33,430	0,099	2,718	0,018	0,074	0,244	0,340	0,053	1,855	2,181	39,5%	Supercrítico	$Y < d$	0,274	0,026	9,539	0,905
	Aguas abajo	33,430	0,221	4,890	0,046	0,286	0,160	0,611	0,075	0,728	0,435	88,4%	Subcrítico	$Y < d$	0,248			1,083
14	Aguas arriba	32,570	0,098	2,702	0,018	0,073	0,244	0,338	0,053	1,831	2,165	39,1%	Supercrítico	$Y < d$	0,269	0,026	9,573	0,904
	Aguas abajo	32,570	0,216	4,781	0,045	0,265	0,171	0,598	0,076	0,721	0,448	86,6%	Subcrítico	$Y < d$	0,243			1,062
15	Aguas arriba	31,460	0,098	2,699	0,018	0,073	0,244	0,337	0,053	1,774	2,101	39,0%	Supercrítico	$Y < d$	0,258	0,020	7,656	0,923
	Aguas abajo	31,460	0,213	4,698	0,045	0,250	0,178	0,587	0,076	0,707	0,451	85,1%	Subcrítico	$Y < d$	0,238			1,039
16	Aguas arriba	30,270	0,097	2,691	0,018	0,072	0,244	0,336	0,052	1,718	2,040	38,8%	Supercrítico	$Y < d$	0,248	0,016	6,268	0,937
	Aguas abajo	30,270	0,207	4,580	0,044	0,231	0,188	0,572	0,076	0,695	0,462	82,9%	Subcrítico	$Y < d$	0,232			1,045
17	Aguas arriba	29,410	0,096	2,673	0,017	0,071	0,243	0,334	0,052	1,695	2,026	38,4%	Supercrítico	$Y < d$	0,242	0,015	6,297	0,937
	Aguas abajo	29,410	0,203	4,489	0,043	0,218	0,195	0,561	0,076	0,689	0,471	81,2%	Subcrítico	$Y < d$	0,227			1,061
18	Aguas arriba	27,890	0,092	2,600	0,016	0,068	0,241	0,325	0,050	1,713	2,104	36,6%	Supercrítico	$Y < d$	0,241	0,021	8,842	0,912
	Aguas abajo	27,890	0,197	4,363	0,041	0,202	0,205	0,545	0,076	0,673	0,478	78,7%	Subcrítico	$Y < d$	0,220			1,086
19	Aguas arriba	26,860	0,089	2,558	0,016	0,065	0,239	0,320	0,049	1,713	2,137	35,6%	Supercrítico	$Y < d$	0,239	0,024	10,052	0,899
	Aguas abajo	26,860	0,192	4,277	0,040	0,192	0,211	0,535	0,076	0,663	0,483	76,9%	Subcrítico	$Y < d$	0,215			1,085
20	Aguas arriba	26,210	0,089	2,551	0,016	0,065	0,239	0,319	0,049	1,683	2,105	35,4%	Supercrítico	$Y < d$	0,233	0,020	8,637	0,914
	Aguas abajo	26,210	0,191	4,259	0,040	0,190	0,212	0,532	0,076	0,651	0,476	76,5%	Subcrítico	$Y < d$	0,213			1,072
21	Aguas arriba	25,100	0,086	2,514	0,015	0,063	0,238	0,314	0,048	1,667	2,115	34,6%	Supercrítico	$Y < d$	0,228	0,018	7,728	0,923
	Aguas abajo	25,100	0,191	4,245	0,040	0,189	0,213	0,531	0,076	0,625	0,460	76,2%	Subcrítico	$Y < d$	0,210			1,174
22	Aguas arriba	24,110	0,079	2,385	0,013	0,057	0,232	0,298	0,045	1,816	2,426	31,5%	Supercrítico	$Y < d$	0,247	0,040	16,189	0,838



	Aguas abajo	24,110	0,188	4,201	0,040	0,184	0,216	0,525	0,075	0,608	0,453	75,3%	Subcrítico	$Y < d$	0,207			1,149
23	Aguas arriba	23,060	0,078	2,366	0,013	0,056	0,231	0,296	0,044	1,772	2,387	31,1%	Supercrítico	$Y < d$	0,238	0,039	16,219	0,838
	Aguas abajo	23,060	0,180	4,060	0,038	0,169	0,224	0,508	0,075	0,608	0,472	72,2%	Subcrítico	$Y < d$	0,199			1,197
24	Aguas arriba	22,660	0,076	2,343	0,013	0,055	0,230	0,293	0,043	1,784	2,425	30,6%	Supercrítico	$Y < d$	0,239	0,042	17,570	0,824
	Aguas abajo	22,660	0,178	4,015	0,037	0,165	0,227	0,502	0,074	0,607	0,477	71,1%	Subcrítico	$Y < d$	0,197			1,197
25	Aguas arriba	21,530	0,074	2,296	0,012	0,053	0,228	0,287	0,042	1,781	2,469	29,5%	Supercrítico	$Y < d$	0,235	0,043	18,198	0,818
	Aguas abajo	21,530	0,175	3,964	0,037	0,160	0,229	0,496	0,074	0,587	0,468	70,0%	Subcrítico	$Y < d$	0,193			1,251
26	Aguas arriba	20,710	0,070	2,236	0,011	0,050	0,225	0,280	0,041	1,829	2,602	28,1%	Supercrítico	$Y < d$	0,241	0,053	21,914	0,781
	Aguas abajo	20,710	0,171	3,895	0,036	0,154	0,232	0,487	0,073	0,579	0,471	68,4%	Subcrítico	$Y < d$	0,188			1,240
27	Aguas arriba	19,530	0,068	2,199	0,011	0,049	0,223	0,275	0,039	1,799	2,602	27,3%	Supercrítico	$Y < d$	0,233	0,049	21,195	0,788
	Aguas abajo	19,430	0,168	3,848	0,035	0,150	0,235	0,481	0,073	0,553	0,456	67,3%	Subcrítico	$Y < d$	0,184			1,182
28	Aguas arriba	18,470	0,068	2,194	0,011	0,049	0,222	0,274	0,039	1,711	2,481	27,2%	Supercrítico	$Y < d$	0,217	0,038	17,562	0,824
	Aguas abajo	18,470	0,164	3,780	0,034	0,144	0,237	0,472	0,072	0,540	0,455	65,7%	Subcrítico	$Y < d$	0,179			1,127
29	Aguas arriba	16,700	0,065	2,145	0,010	0,046	0,220	0,268	0,038	1,637	2,426	26,1%	Supercrítico	$Y < d$	0,202	0,027	13,410	0,866
	Aguas abajo	16,700	0,162	3,748	0,034	0,141	0,239	0,469	0,072	0,495	0,420	64,9%	Subcrítico	$Y < d$	0,175			1,150
30	Aguas arriba	15,490	0,061	2,074	0,009	0,043	0,215	0,259	0,036	1,655	2,534	24,6%	Supercrítico	$Y < d$	0,201	0,030	14,802	0,852
	Aguas abajo	15,490	0,160	3,713	0,033	0,139	0,240	0,464	0,072	0,466	0,400	64,1%	Subcrítico	$Y < d$	0,171			1,158
31	Aguas arriba	14,750	0,059	2,037	0,009	0,042	0,213	0,255	0,035	1,651	2,573	23,8%	Supercrítico	$Y < d$	0,198	0,033	16,741	0,833
	Aguas abajo	14,750	0,154	3,613	0,032	0,131	0,243	0,452	0,070	0,464	0,410	61,7%	Subcrítico	$Y < d$	0,165			1,206
32	Aguas arriba	13,440	0,054	1,940	0,008	0,038	0,206	0,242	0,032	1,686	2,756	21,7%	Supercrítico	$Y < d$	0,199	0,043	21,375	0,786
	Aguas abajo	13,440	0,146	3,483	0,030	0,121	0,246	0,435	0,069	0,451	0,414	58,5%	Subcrítico	$Y < d$	0,157			1,177
33	Aguas arriba	12,450	0,054	1,932	0,008	0,038	0,206	0,241	0,032	1,600	2,625	21,6%	Supercrítico	$Y < d$	0,184	0,033	17,957	0,820
	Aguas abajo	12,450	0,142	3,408	0,029	0,116	0,248	0,426	0,067	0,434	0,407	56,6%	Subcrítico	$Y < d$	0,151			1,137
34	Aguas arriba	11,350	0,052	1,895	0,007	0,036	0,203	0,237	0,031	1,533	2,564	20,8%	Supercrítico	$Y < d$	0,172	0,029	17,116	0,829
	Aguas abajo	11,350	0,133	3,272	0,027	0,107	0,249	0,409	0,065	0,427	0,418	53,3%	Subcrítico	$Y < d$	0,142			1,161
35	Aguas arriba	10,480	0,050	1,852	0,007	0,035	0,200	0,231	0,030	1,505	2,575	19,9%	Supercrítico	$Y < d$	0,165	0,027	16,377	0,836

	Aguas abajo	10,480	0,130	3,219	0,026	0,103	0,250	0,402	0,064	0,407	0,405	51,9%	Subcrítico	Y<d	0,138			
--	-------------	--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------------	-----	-------	--	--	--

**Tabla 11. Resultados obtenidos para la pendiente 0,016.**

Pendiente 0,016																		
Ensayo	Alturas	Q [L/s]	Yn [m]	$\Theta$ [Rad]	A [m <sup>2</sup> ]	D [m]	T	P	R	V (m/s)	Fr	Relación de llenado	Tipo de Resalto	Tipo de Resalto	E	$\Delta E$	$\Delta E/E1$ (%)	E2/E1
1	Aguas arriba	45,160	0,119	3,044	0,023	0,092	0,250	1,961	5,931	1,961	2,062	47,6%	Supercrítico	Y<d	0,315	0,022	6,940	0,931
	Aguas abajo	45,160	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,920	0,121	0,920	0,042	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,293			1,077
2	Aguas arriba	44,220	0,116	3,001	0,022	0,090	0,249	1,978	5,926	1,978	2,109	46,5%	Supercrítico	Y<d	0,316	0,024	7,696	0,923
	Aguas abajo	44,220	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,901	0,121	0,901	0,041	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,291			1,079
3	Aguas arriba	43,340	0,114	2,970	0,022	0,088	0,249	1,981	5,922	1,981	2,135	45,7%	Supercrítico	Y<d	0,314	0,025	7,842	0,922
	Aguas abajo	43,340	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,883	0,121	0,883	0,040	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,290			1,068
4	Aguas arriba	42,160	0,113	2,943	0,021	0,086	0,249	1,966	5,917	1,966	2,138	45,0%	Supercrítico	Y<d	0,310	0,022	7,093	0,929
	Aguas abajo	42,160	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,859	0,121	0,859	0,039	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,288			1,061
5	Aguas arriba	41,210	0,111	2,922	0,021	0,085	0,248	1,951	5,913	1,951	2,136	44,5%	Supercrítico	Y<d	0,305	0,019	6,331	0,937
	Aguas abajo	41,210	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,840	0,121	0,840	0,038	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,286			1,031
6	Aguas arriba	39,830	0,111	2,910	0,021	0,084	0,248	1,902	5,911	1,902	2,091	44,2%	Supercrítico	Y<d	0,295	0,011	3,843	0,962
	Aguas abajo	39,830	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,811	0,121	0,811	0,037	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,284			1,003
7	Aguas arriba	38,340	0,110	2,895	0,021	0,083	0,248	1,852	5,907	1,852	2,047	43,8%	Supercrítico	Y<d	0,284	0,003	1,153	0,988
	Aguas abajo	38,340	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,781	0,121	0,781	0,036	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,281			1,002
8	Aguas arriba	37,740	0,109	2,880	0,020	0,083	0,248	1,842	5,904	1,842	2,046	43,5%	Supercrítico	Y<d	0,282	0,002	0,560	0,994
	Aguas abajo	37,740	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,769	0,121	0,769	0,035	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,280			0,994
9	Aguas arriba	37,090	0,108	2,866	0,020	0,082	0,248	1,830	5,900	1,830	2,043	43,1%	Supercrítico	Y<d	0,279	0,001	0,185	1,002
	Aguas abajo	37,090	0,250	6,281	0,049	155,228	0,000	0,756	0,038	0,756	0,019	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,279			1,004

10	Aguas arriba	36,490	0,106	2,829	0,020	0,080	0,247	1,852	5,891	1,852	2,093	42,2%	Supercrítico	Y<d	0,280	0,002	0,774	0,992
	Aguas abajo	36,490	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,743	0,121	0,743	0,034	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,278			1,005
11	Aguas arriba	35,770	0,104	2,800	0,019	0,078	0,246	1,858	5,882	1,858	2,122	41,5%	Supercrítico	Y<d	0,280	0,003	0,931	0,991
	Aguas abajo	35,770	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,729	0,121	0,729	0,033	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,277			0,993
12	Aguas arriba	34,420	0,101	2,759	0,019	0,076	0,245	1,847	5,868	1,847	2,139	40,5%	Supercrítico	Y<d	0,275	0,001	0,418	0,996
	Aguas abajo	34,420	0,249	6,006	0,049	1,423	0,034	0,702	1,673	0,702	0,188	99,5%	Subcrítico	Y>d	0,274			0,985
13	Aguas arriba	33,330	0,100	2,733	0,018	0,075	0,245	1,827	5,858	1,827	2,137	39,8%	Supercrítico	Y<d	0,270	0,001	0,389	1,004
	Aguas abajo	33,330	0,247	5,861	0,049	0,935	0,052	0,680	2,201	0,680	0,225	98,9%	Subcrítico	Y>d	0,271			0,982
14	Aguas arriba	32,200	0,097	2,697	0,018	0,073	0,244	1,819	5,844	1,819	2,155	39,0%	Supercrítico	Y<d	0,266	0,002	0,847	0,992
	Aguas abajo	32,030	0,242	5,546	0,049	0,539	0,090	0,659	3,122	0,659	0,287	96,6%	Subcrítico	Y>d	0,264			1,012
15	Aguas arriba	32,030	0,097	2,684	0,018	0,072	0,243	1,828	5,839	1,828	2,176	38,7%	Supercrítico	Y<d	0,267	0,004	1,555	0,984
	Aguas abajo	31,630	0,241	5,529	0,049	0,527	0,092	0,652	3,165	0,652	0,287	96,5%	Subcrítico	Y>d	0,263			1,015
16	Aguas arriba	31,630	0,096	2,666	0,017	0,071	0,243	1,833	5,831	1,833	2,197	38,2%	Supercrítico	Y<d	0,267	0,000	0,116	0,999
	Aguas abajo	32,200	0,244	5,681	0,049	0,659	0,074	0,660	2,754	0,660	0,260	97,8%	Subcrítico	Y>d	0,267			0,982
17	Aguas arriba	30,920	0,095	2,654	0,017	0,070	0,243	1,810	5,826	1,810	2,178	37,9%	Supercrítico	Y<d	0,262	0,003	0,995	0,990
	Aguas abajo	30,920	0,238	5,412	0,048	0,458	0,105	0,641	3,452	0,641	0,302	95,3%	Subcrítico	Y>d	0,259			0,977
18	Aguas arriba	29,710	0,094	2,635	0,017	0,069	0,242	1,769	5,817	1,769	2,144	37,5%	Supercrítico	Y<d	0,253	0,003	1,248	1,012
	Aguas abajo	29,710	0,237	5,360	0,048	0,432	0,111	0,618	3,572	0,618	0,300	94,8%	Subcrítico	Y>d	0,256			0,954
19	Aguas arriba	28,360	0,092	2,607	0,016	0,068	0,241	1,730	5,804	1,730	2,119	36,8%	Supercrítico	Y<d	0,245	0,006	2,578	1,026
	Aguas abajo	28,360	0,233	5,222	0,048	0,376	0,127	0,596	3,874	0,596	0,310	93,1%	Subcrítico	Y>d	0,251			0,975
20	Aguas arriba	27,480	0,089	2,562	0,016	0,066	0,240	1,746	5,781	1,746	2,175	35,7%	Supercrítico	Y<d	0,245	0,000	0,033	1,000
	Aguas abajo	27,480	0,227	5,052	0,047	0,324	0,144	0,587	4,210	0,587	0,329	90,8%	Subcrítico	Y<d	0,245			0,965
21	Aguas arriba	26,010	0,087	2,526	0,015	0,064	0,238	1,709	5,761	1,709	2,158	34,8%	Supercrítico	Y<d	0,236	0,003	1,269	1,013
	Aguas abajo	26,010	0,223	4,938	0,046	0,297	0,156	0,563	4,416	0,563	0,330	89,1%	Subcrítico	Y<d	0,239			0,966
22	Aguas arriba	25,130	0,086	2,503	0,015	0,063	0,237	1,687	5,747	1,687	2,150	34,3%	Supercrítico	Y<d	0,231	0,000	0,140	0,999
	Aguas abajo	25,130	0,214	4,736	0,045	0,257	0,175	0,561	4,746	0,561	0,354	85,8%	Subcrítico	Y<d	0,230			1,070

23	Aguas arriba	24,170	0,079	2,390	0,013	0,057	0,233	1,813	5,674	1,813	2,417	31,6%	Supercrítico	Y<d	0,247	0,023	9,193	0,908
	Aguas abajo	24,170	0,208	4,601	0,044	0,235	0,186	0,553	4,942	0,553	0,364	83,3%	Subcrítico	Y<d	0,224			1,147
24	Aguas arriba	23,260	0,075	2,312	0,012	0,054	0,229	1,891	5,617	1,891	2,604	29,9%	Supercrítico	Y<d	0,257	0,039	15,223	0,848
	Aguas abajo	23,260	0,203	4,481	0,043	0,217	0,196	0,546	5,101	0,546	0,374	81,0%	Subcrítico	Y<d	0,218			1,139
25	Aguas arriba	21,570	0,072	2,257	0,012	0,051	0,226	1,860	5,574	1,860	2,622	28,6%	Supercrítico	Y<d	0,248	0,039	15,894	0,841
	Aguas abajo	21,570	0,194	4,319	0,041	0,197	0,208	0,527	5,292	0,527	0,379	77,8%	Subcrítico	Y<d	0,209			1,104
26	Aguas arriba	20,170	0,071	2,242	0,011	0,051	0,225	1,769	5,561	1,769	2,511	28,3%	Supercrítico	Y<d	0,230	0,029	12,513	0,875
	Aguas abajo	20,170	0,188	4,203	0,040	0,184	0,216	0,509	5,414	0,509	0,379	75,3%	Subcrítico	Y<d	0,201			1,092
27	Aguas arriba	19,140	0,069	2,221	0,011	0,050	0,224	1,718	5,544	1,718	2,460	27,8%	Supercrítico	Y<d	0,220	0,022	10,171	0,898
	Aguas abajo	19,140	0,185	4,149	0,039	0,178	0,219	0,490	5,465	0,490	0,371	74,1%	Subcrítico	Y<d	0,198			1,045
28	Aguas arriba	17,554	0,067	2,179	0,011	0,048	0,222	1,653	5,507	1,653	2,412	26,9%	Supercrítico	Y<d	0,206	0,019	9,182	0,908
	Aguas abajo	17,540	0,176	3,983	0,037	0,162	0,228	0,475	5,609	0,475	0,377	70,4%	Subcrítico	Y<d	0,188			1,004
29	Aguas arriba	16,230	0,067	2,170	0,011	0,048	0,221	1,545	5,499	1,545	2,263	26,7%	Supercrítico	Y<d	0,188	0,003	1,654	0,983
	Aguas abajo	16,230	0,175	3,969	0,037	0,161	0,229	0,441	5,619	0,441	0,352	70,1%	Subcrítico	Y<d	0,185			0,964
30	Aguas arriba	15,020	0,065	2,132	0,010	0,046	0,219	1,496	5,464	1,496	2,229	25,8%	Supercrítico	Y<d	0,179	0,005	2,697	1,027
	Aguas abajo	15,020	0,175	3,962	0,037	0,160	0,229	0,410	5,625	0,410	0,327	69,9%	Subcrítico	Y<d	0,183			0,958
31	Aguas arriba	14,370	0,063	2,099	0,010	0,045	0,217	1,489	5,432	1,489	2,252	25,1%	Supercrítico	Y<d	0,176	0,004	2,202	1,022
	Aguas abajo	14,370	0,171	3,902	0,036	0,155	0,232	0,401	5,668	0,401	0,325	68,6%	Subcrítico	Y<d	0,180			0,901
32	Aguas arriba	13,170	0,062	2,077	0,009	0,044	0,215	1,403	5,410	1,403	2,145	24,6%	Supercrítico	Y<d	0,162	0,015	9,029	1,090
	Aguas abajo	13,170	0,169	3,868	0,035	0,151	0,234	0,372	5,692	0,372	0,305	67,8%	Subcrítico	Y<d	0,176			0,933
33	Aguas arriba	12,110	0,056	1,981	0,008	0,040	0,209	1,457	5,311	1,457	2,333	22,6%	Supercrítico	Y<d	0,165	0,004	2,305	1,023
	Aguas abajo	12,110	0,162	3,740	0,034	0,141	0,239	0,360	5,770	0,360	0,307	64,7%	Subcrítico	Y<d	0,168			0,958
34	Aguas arriba	11,070	0,053	1,914	0,008	0,037	0,204	1,458	5,235	1,458	2,414	21,2%	Supercrítico	Y<d	0,161	0,001	0,824	0,992
	Aguas abajo	11,070	0,154	3,605	0,032	0,130	0,243	0,350	5,836	0,350	0,309	61,5%	Subcrítico	Y<d	0,160			0,961
35	Aguas arriba	10,290	0,051	1,881	0,007	0,036	0,202	1,418	5,197	1,418	2,388	20,5%	Supercrítico	Y<d	0,154	0,001	0,376	0,996
	Aguas abajo	10,290	0,147	3,499	0,030	0,122	0,246	0,342	5,876	0,342	0,312	58,9%	Subcrítico	Y<d	0,153			

**Tabla 12. Resultados obtenidos para la pendiente 0,018.**

Pendiente 0,018																		
Ensayo	Alturas	Q [L/s]	Yn [m]	$\Theta$ [Rad]	A [m <sup>2</sup> ]	D [m]	T	P	R	V (m/s)	Fr	Relación de llenado	Tipo de Resalto	Tipo de Resalto	E	$\Delta E$	$\Delta E/E1$ (%)	E2/E1
1	Aguas arriba	41,370	0,109	2,892	0,021	0,083	0,248	2,002	6,251	2,002	2,215	43,8%	Supercrítico	Y<d	0,314	0,028	8,779	0,912
	Aguas abajo	41,370	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,843	0,129	0,843	0,038	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,286			1,038
2	Aguas arriba	38,800	0,107	2,856	0,020	0,081	0,247	1,930	6,242	1,930	2,162	42,9%	Supercrítico	Y<d	0,297	0,015	5,107	0,949
	Aguas abajo	38,800	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,790	0,129	0,790	0,036	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,282			1,045
3	Aguas arriba	36,530	0,102	2,769	0,019	0,076	0,246	1,944	6,214	1,944	2,245	40,7%	Supercrítico	Y<d	0,295	0,016	5,535	0,945
	Aguas abajo	36,530	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,744	0,129	0,744	0,034	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,278			1,019
4	Aguas arriba	34,560	0,099	2,729	0,018	0,074	0,245	1,901	6,198	1,901	2,227	39,7%	Supercrítico	Y<d	0,284	0,009	3,011	0,970
	Aguas abajo	34,560	0,250	6,153	0,049	3,016	0,016	0,704	1,071	0,704	0,129	99,9%	Subcrítico	Y>d	0,275			0,989
5	Aguas arriba	31,890	0,095	2,657	0,017	0,071	0,243	1,864	6,167	1,864	2,241	38,0%	Supercrítico	Y<d	0,272	0,004	1,555	0,984
	Aguas abajo	31,890	0,246	5,782	0,049	0,789	0,062	0,652	2,600	0,652	0,234	98,4%	Subcrítico	Y>d	0,268			1,036
6	Aguas arriba	31,790	0,093	2,630	0,017	0,069	0,242	1,900	6,154	1,900	2,307	37,4%	Supercrítico	Y<d	0,277	0,012	4,430	0,956
	Aguas abajo	31,790	0,244	5,635	0,049	0,613	0,080	0,652	3,053	0,652	0,266	97,4%	Subcrítico	Y>d	0,265			0,978
7	Aguas arriba	29,720	0,092	2,608	0,016	0,068	0,241	1,812	6,143	1,812	2,218	36,8%	Supercrítico	Y<d	0,259	0,002	0,950	0,990
	Aguas abajo	29,720	0,238	5,382	0,048	0,442	0,109	0,617	3,731	0,617	0,296	95,0%	Subcrítico	Y>d	0,257			0,984
8	Aguas arriba	28,580	0,090	2,581	0,016	0,067	0,240	1,785	6,128	1,785	2,208	36,2%	Supercrítico	Y<d	0,253	0,000	0,091	1,001
	Aguas abajo	28,580	0,235	5,292	0,048	0,403	0,119	0,597	3,945	0,597	0,300	94,0%	Subcrítico	Y>d	0,253			1,013
9	Aguas arriba	28,420	0,089	2,558	0,016	0,065	0,239	1,812	6,116	1,812	2,261	35,6%	Supercrítico	Y<d	0,256	0,005	1,806	0,982

	Aguas abajo	28,420	0,234	5,252	0,048	0,387	0,123	0,595	4,035	0,595	0,305	93,5%	Subcrítico	Y>d	0,252			0,969
10	Aguas arriba	27,130	0,088	2,548	0,016	0,065	0,239	1,747	6,110	1,747	2,188	35,4%	Supercrítico	Y<d	0,244	0,003	1,032	1,010
	Aguas abajo	27,130	0,230	5,125	0,047	0,345	0,137	0,575	4,310	0,575	0,313	91,8%	Subcrítico	Y<d	0,246			0,930
11	Aguas arriba	25,660	0,088	2,540	0,015	0,065	0,239	1,664	6,105	1,664	2,091	35,2%	Supercrítico	Y<d	0,229	0,009	4,060	1,041
	Aguas abajo	25,660	0,223	4,935	0,046	0,296	0,156	0,556	4,681	0,556	0,326	89,1%	Subcrítico	Y<d	0,238			0,993
12	Aguas arriba	25,530	0,085	2,497	0,015	0,062	0,237	1,724	6,079	1,724	2,202	34,2%	Supercrítico	Y<d	0,237	0,000	0,012	1,000
	Aguas abajo	25,530	0,221	4,896	0,046	0,287	0,160	0,556	4,752	0,556	0,331	88,4%	Subcrítico	Y<d	0,237			1,020
13	Aguas arriba	24,610	0,081	2,430	0,014	0,059	0,234	1,773	6,035	1,773	2,325	32,6%	Supercrítico	Y<d	0,242	0,008	3,384	0,966
	Aguas abajo	24,610	0,219	4,832	0,046	0,274	0,166	0,541	4,864	0,541	0,330	87,4%	Subcrítico	Y<d	0,233			1,056
14	Aguas arriba	23,370	0,077	2,351	0,013	0,056	0,231	1,824	5,976	1,824	2,472	30,7%	Supercrítico	Y<d	0,246	0,018	7,409	0,926
	Aguas abajo	23,370	0,214	4,734	0,045	0,256	0,175	0,522	5,027	0,522	0,329	85,7%	Subcrítico	Y<d	0,228			1,113
15	Aguas arriba	23,020	0,074	2,309	0,012	0,054	0,229	1,877	5,943	1,877	2,587	29,8%	Supercrítico	Y<d	0,254	0,027	10,678	0,893
	Aguas abajo	23,020	0,213	4,710	0,045	0,252	0,177	0,516	5,065	0,516	0,328	85,3%	Subcrítico	Y<d	0,227			1,056
16	Aguas arriba	21,910	0,074	2,301	0,012	0,053	0,228	1,802	5,936	1,802	2,494	29,6%	Supercrítico	Y<d	0,240	0,018	7,572	0,924
	Aguas abajo	21,910	0,209	4,608	0,044	0,236	0,186	0,501	5,221	0,501	0,329	83,5%	Subcrítico	Y<d	0,221			1,101
17	Aguas arriba	21,270	0,071	2,255	0,012	0,051	0,226	1,839	5,897	1,839	2,595	28,6%	Supercrítico	Y<d	0,244	0,027	10,963	0,890
	Aguas abajo	21,270	0,205	4,523	0,043	0,223	0,193	0,495	5,342	0,495	0,334	81,9%	Subcrítico	Y<d	0,217			1,066
18	Aguas arriba	20,480	0,071	2,254	0,012	0,051	0,226	1,773	5,897	1,773	2,502	28,5%	Supercrítico	Y<d	0,232	0,026	11,173	0,888
	Aguas abajo	20,480	0,193	4,286	0,041	0,193	0,210	0,505	5,640	0,505	0,367	77,1%	Subcrítico	Y<d	0,206			1,122
19	Aguas arriba	20,330	0,071	2,249	0,011	0,051	0,226	1,770	5,892	1,770	2,504	28,4%	Supercrítico	Y<d	0,231	0,026	11,447	0,886
	Aguas abajo	20,330	0,191	4,260	0,040	0,190	0,212	0,504	5,668	0,504	0,369	76,5%	Subcrítico	Y<d	0,204			1,043
20	Aguas arriba	19,140	0,071	2,247	0,011	0,051	0,225	1,670	5,890	1,670	2,364	28,4%	Supercrítico	Y<d	0,213	0,016	7,342	0,927
	Aguas abajo	19,140	0,185	4,145	0,039	0,178	0,219	0,491	5,789	0,491	0,372	74,0%	Subcrítico	Y<d	0,197			1,036
21	Aguas arriba	18,390	0,070	2,237	0,011	0,050	0,225	1,622	5,882	1,622	2,307	28,2%	Supercrítico	Y<d	0,205	0,009	4,527	0,955
	Aguas abajo	18,390	0,184	4,120	0,039	0,175	0,221	0,476	5,814	0,476	0,363	73,5%	Subcrítico	Y<d	0,195			1,068
22	Aguas arriba	18,120	0,069	2,205	0,011	0,049	0,223	1,657	5,853	1,657	2,390	27,4%	Supercrítico	Y<d	0,209	0,015	7,076	0,929

	Aguas abajo	18,120	0,182	4,096	0,038	0,173	0,222	0,472	5,836	0,472	0,363	73,0%	Subcrítico	$Y < d$	0,194			1,023
23	Aguas arriba	17,150	0,068	2,187	0,011	0,048	0,222	1,601	5,836	1,601	2,328	27,0%	Supercrítico	$Y < d$	0,198	0,007	3,625	0,964
	Aguas abajo	17,150	0,181	4,065	0,038	0,170	0,224	0,451	5,864	0,451	0,350	72,3%	Subcrítico	$Y < d$	0,191			1,043
24	Aguas arriba	16,340	0,065	2,132	0,010	0,046	0,219	1,626	5,783	1,626	2,423	25,8%	Supercrítico	$Y < d$	0,199	0,011	5,340	0,947
	Aguas abajo	16,340	0,179	4,037	0,038	0,167	0,225	0,434	5,890	0,434	0,339	71,6%	Subcrítico	$Y < d$	0,189			1,058
25	Aguas arriba	15,710	0,062	2,093	0,010	0,044	0,216	1,640	5,743	1,640	2,490	25,0%	Supercrítico	$Y < d$	0,200	0,017	8,271	0,917
	Aguas abajo	15,710	0,174	3,939	0,036	0,158	0,230	0,432	5,971	0,432	0,347	69,4%	Subcrítico	$Y < d$	0,183			1,052
26	Aguas arriba	15,240	0,062	2,088	0,010	0,044	0,216	1,600	5,738	1,600	2,433	24,9%	Supercrítico	$Y < d$	0,193	0,013	6,517	0,935
	Aguas abajo	15,240	0,171	3,892	0,036	0,154	0,233	0,427	6,007	0,427	0,348	68,3%	Subcrítico	$Y < d$	0,180			1,037
27	Aguas arriba	14,360	0,060	2,053	0,009	0,043	0,214	1,576	5,701	1,576	2,437	24,1%	Supercrítico	$Y < d$	0,187	0,010	5,240	0,948
	Aguas abajo	14,360	0,169	3,853	0,035	0,150	0,234	0,408	6,035	0,408	0,336	67,4%	Subcrítico	$Y < d$	0,177			1,019
28	Aguas arriba	13,800	0,060	2,039	0,009	0,042	0,213	1,540	5,686	1,540	2,397	23,8%	Supercrítico	$Y < d$	0,180	0,009	4,795	0,952
	Aguas abajo	13,800	0,163	3,765	0,034	0,143	0,238	0,406	6,092	0,406	0,343	65,3%	Subcrítico	$Y < d$	0,172			1,014
29	Aguas arriba	13,310	0,059	2,030	0,009	0,042	0,212	1,503	5,676	1,503	2,349	23,6%	Supercrítico	$Y < d$	0,174	0,004	2,511	0,975
	Aguas abajo	13,310	0,162	3,739	0,034	0,141	0,239	0,396	6,108	0,396	0,337	64,7%	Subcrítico	$Y < d$	0,170			0,978
30	Aguas arriba	12,730	0,059	2,022	0,009	0,041	0,212	1,452	5,667	1,452	2,279	23,5%	Supercrítico	$Y < d$	0,166	0,000	0,039	1,000
	Aguas abajo	12,730	0,158	3,681	0,033	0,136	0,241	0,388	6,140	0,388	0,336	63,3%	Subcrítico	$Y < d$	0,166			1,045
31	Aguas arriba	12,260	0,055	1,957	0,008	0,039	0,207	1,523	5,593	1,523	2,469	22,1%	Supercrítico	$Y < d$	0,173	0,009	5,233	0,948
	Aguas abajo	12,260	0,157	3,661	0,032	0,134	0,242	0,377	6,150	0,377	0,329	62,8%	Subcrítico	$Y < d$	0,164			1,108
32	Aguas arriba	11,530	0,051	1,874	0,007	0,036	0,201	1,604	5,493	1,604	2,711	20,4%	Supercrítico	$Y < d$	0,182	0,020	10,980	0,890
	Aguas abajo	11,530	0,156	3,635	0,032	0,132	0,242	0,359	6,163	0,359	0,315	62,2%	Subcrítico	$Y < d$	0,162			1,049
33	Aguas arriba	10,610	0,050	1,846	0,007	0,035	0,199	1,537	5,456	1,537	2,638	19,8%	Supercrítico	$Y < d$	0,170	0,011	6,736	0,933
	Aguas abajo	10,610	0,153	3,590	0,031	0,129	0,244	0,338	6,184	0,338	0,300	61,1%	Subcrítico	$Y < d$	0,159			0,994
34	Aguas arriba	9,880	0,049	1,832	0,007	0,034	0,198	1,461	5,438	1,461	2,525	19,5%	Supercrítico	$Y < d$	0,158	0,016	10,010	0,900
	Aguas abajo	9,880	0,135	3,302	0,027	0,109	0,249	0,365	6,269	0,365	0,354	54,0%	Subcrítico	$Y < d$	0,142			1,112
35	Aguas arriba	9,210	0,046	1,776	0,006	0,032	0,194	1,480	5,364	1,480	2,637	18,4%	Supercrítico	$Y < d$	0,158	0,018	11,462	0,885



	Aguas abajo	9,210	0,134	3,279	0,027	0,107	0,249	0,345	6,272	0,345	0,337	53,4%	Subcrítico	$Y < d$	0,140			
--	-------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------------	---------	-------	--	--	--

**Tabla 13. Resultados obtenidos para la pendiente 0,025.**

Pendiente 0,025																		
Ensayo	Alturas	Q [L/s]	Yn [m]	$\Theta$ [Rad]	A [m <sup>2</sup> ]	D [m]	T	P	R	V (m/s)	Fr	Relación de llenado	Tipo de Resalto	Tipo de Resalto	E	$\Delta E$	$\Delta E/E1$ (%)	E2/E1
1	Aguas arriba	43,670	0,113	2,945	0,021	0,086	0,249	2,032	6,260	2,032	2,208	45,1%	Supercrítico	$Y < d$	0,323	0,033	10,181	0,898
	Aguas abajo	43,670	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,890	0,129	0,890	0,041	100,0%	Subcrítico	$Y > d$	0,290			1,086
2	Aguas arriba	42,510	0,112	2,932	0,021	0,086	0,249	1,997	6,257	1,997	2,179	44,8%	Supercrítico	$Y < d$	0,315	0,027	8,570	0,914
	Aguas abajo	42,510	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,866	0,129	0,866	0,039	100,0%	Subcrítico	$Y > d$	0,288			1,059
3	Aguas arriba	41,270	0,111	2,924	0,021	0,085	0,249	1,950	6,255	1,950	2,134	44,6%	Supercrítico	$Y < d$	0,305	0,019	6,308	0,937
	Aguas abajo	41,270	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,841	0,129	0,841	0,038	100,0%	Subcrítico	$Y > d$	0,286			1,027
4	Aguas arriba	39,860	0,111	2,917	0,021	0,085	0,248	1,894	6,254	1,894	2,078	44,4%	Supercrítico	$Y < d$	0,294	0,010	3,490	0,965
	Aguas abajo	39,860	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,812	0,129	0,812	0,037	100,0%	Subcrítico	$Y > d$	0,284			1,047
5	Aguas arriba	39,150	0,108	2,870	0,020	0,082	0,248	1,925	6,242	1,925	2,146	43,2%	Supercrítico	$Y < d$	0,297	0,015	4,928	0,951
	Aguas abajo	39,150	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,798	0,129	0,798	0,036	100,0%	Subcrítico	$Y > d$	0,282			1,032
6	Aguas arriba	37,680	0,106	2,832	0,020	0,080	0,247	1,909	6,231	1,909	2,156	42,3%	Supercrítico	$Y < d$	0,291	0,011	3,916	0,961
	Aguas abajo	37,680	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,768	0,129	0,768	0,035	100,0%	Subcrítico	$Y > d$	0,280			1,053
7	Aguas arriba	36,820	0,103	2,780	0,019	0,077	0,246	1,942	6,215	1,942	2,233	41,0%	Supercrítico	$Y < d$	0,295	0,016	5,451	0,945
	Aguas abajo	36,820	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,750	0,129	0,750	0,034	100,0%	Subcrítico	$Y > d$	0,279			1,025
8	Aguas arriba	35,240	0,101	2,750	0,019	0,075	0,245	1,904	6,204	1,904	2,213	40,3%	Supercrítico	$Y < d$	0,286	0,009	3,247	0,968



	Aguas abajo	35,240	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,718	0,129	0,718	0,033	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,276			0,984
9	Aguas arriba	33,580	0,100	2,735	0,018	0,075	0,245	1,838	6,198	1,838	2,148	39,9%	Supercrítico	Y<d	0,272	0,002	0,724	1,007
	Aguas abajo	33,580	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,684	0,129	0,684	0,031	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,274			0,975
10	Aguas arriba	31,860	0,096	2,677	0,017	0,072	0,243	1,830	6,173	1,830	2,184	38,5%	Supercrítico	Y<d	0,267	0,005	1,706	1,017
	Aguas abajo	31,860	0,250	6,275	0,049	49,087	0,001	0,649	0,129	0,649	0,030	100,0%	Subcrítico	Y>d	0,271			0,941
11	Aguas arriba	30,530	0,095	2,665	0,017	0,071	0,243	1,771	6,168	1,771	2,123	38,2%	Supercrítico	Y<d	0,255	0,013	5,266	1,053
	Aguas abajo	30,530	0,249	6,044	0,049	1,642	0,030	0,622	1,611	0,622	0,155	99,6%	Subcrítico	Y>d	0,269			0,925
12	Aguas arriba	29,310	0,094	2,636	0,017	0,069	0,242	1,743	6,154	1,743	2,111	37,5%	Supercrítico	Y<d	0,249	0,018	7,250	1,072
	Aguas abajo	29,310	0,248	5,966	0,049	1,243	0,039	0,598	1,936	0,598	0,171	99,4%	Subcrítico	Y>d	0,267			0,908
13	Aguas arriba	28,300	0,093	2,616	0,017	0,068	0,241	1,714	6,143	1,714	2,092	37,0%	Supercrítico	Y<d	0,242	0,023	9,455	1,095
	Aguas abajo	28,300	0,248	5,938	0,049	1,142	0,043	0,577	2,047	0,577	0,172	99,3%	Subcrítico	Y>d	0,265			0,886
14	Aguas arriba	26,910	0,090	2,579	0,016	0,067	0,240	1,684	6,124	1,684	2,085	36,1%	Supercrítico	Y<d	0,235	0,025	10,820	1,108
	Aguas abajo	26,910	0,245	5,704	0,049	0,684	0,071	0,551	2,846	0,551	0,213	97,9%	Subcrítico	Y>d	0,260			0,868
15	Aguas arriba	25,660	0,089	2,556	0,016	0,065	0,239	1,640	6,111	1,640	2,047	35,6%	Supercrítico	Y<d	0,226	0,024	10,557	1,106
	Aguas abajo	25,660	0,235	5,299	0,048	0,406	0,118	0,536	3,924	0,536	0,268	94,1%	Subcrítico	Y>d	0,250			0,917
16	Aguas arriba	25,650	0,088	2,540	0,015	0,065	0,239	1,664	6,102	1,664	2,090	35,2%	Supercrítico	Y<d	0,229	0,026	11,513	1,115
	Aguas abajo	24,650	0,242	5,577	0,049	0,563	0,086	0,507	3,218	0,507	0,216	96,9%	Subcrítico	Y>d	0,255			0,895
17	Aguas arriba	24,260	0,084	2,466	0,014	0,061	0,236	1,686	6,056	1,686	2,180	33,4%	Supercrítico	Y<d	0,229	0,026	11,280	1,113
	Aguas abajo	24,260	0,242	5,547	0,049	0,540	0,090	0,499	3,301	0,499	0,217	96,7%	Subcrítico	Y>d	0,254			0,877
18	Aguas arriba	22,810	0,080	2,412	0,014	0,058	0,234	1,672	6,019	1,672	2,209	32,2%	Supercrítico	Y<d	0,223	0,023	10,344	1,103
	Aguas abajo	22,810	0,234	5,273	0,048	0,395	0,121	0,477	3,984	0,477	0,242	93,8%	Subcrítico	Y>d	0,246			0,897
19	Aguas arriba	22,310	0,079	2,395	0,013	0,058	0,233	1,665	6,006	1,665	2,216	31,8%	Supercrítico	Y<d	0,221	0,024	11,016	1,110
	Aguas abajo	22,310	0,234	5,256	0,048	0,389	0,123	0,467	4,023	0,467	0,239	93,6%	Subcrítico	Y>d	0,245			0,930
20	Aguas arriba	21,510	0,075	2,321	0,012	0,054	0,229	1,731	5,950	1,731	2,375	30,1%	Supercrítico	Y<d	0,228	0,016	6,888	1,069
	Aguas abajo	21,510	0,233	5,237	0,048	0,382	0,125	0,451	4,067	0,451	0,233	93,3%	Subcrítico	Y>d	0,244			0,935
21	Aguas arriba	20,310	0,072	2,258	0,012	0,051	0,226	1,751	5,897	1,751	2,467	28,6%	Supercrítico	Y<d	0,228	0,007	2,993	1,030

	Aguas abajo	20,310	0,225	4,993	0,047	0,309	0,150	0,437	4,571	0,437	0,251	89,9%	Subcrítico	$Y < d$	0,235			0,896
22	Aguas arriba	19,080	0,071	2,255	0,012	0,051	0,226	1,651	5,894	1,651	2,329	28,5%	Supercrítico	$Y < d$	0,210	0,021	9,930	1,099
	Aguas abajo	19,080	0,222	4,928	0,046	0,294	0,157	0,414	4,691	0,414	0,243	89,0%	Subcrítico	$Y < d$	0,231			0,876
23	Aguas arriba	18,470	0,071	2,250	0,012	0,051	0,226	1,605	5,890	1,605	2,270	28,5%	Supercrítico	$Y < d$	0,202	0,026	12,964	1,130
	Aguas abajo	18,470	0,220	4,880	0,046	0,284	0,161	0,403	4,779	0,403	0,242	88,2%	Subcrítico	$Y < d$	0,229			0,908
24	Aguas arriba	16,830	0,065	2,132	0,010	0,046	0,219	1,675	5,780	1,675	2,497	25,8%	Supercrítico	$Y < d$	0,208	0,002	0,878	0,991
	Aguas abajo	16,830	0,197	4,378	0,042	0,204	0,204	0,405	5,528	0,405	0,286	79,0%	Subcrítico	$Y < d$	0,206			0,943
25	Aguas arriba	15,420	0,062	2,094	0,010	0,044	0,216	1,607	5,741	1,607	2,438	25,0%	Supercrítico	$Y < d$	0,194	0,008	4,004	1,040
	Aguas abajo	15,420	0,195	4,325	0,041	0,198	0,207	0,376	5,591	0,376	0,270	77,9%	Subcrítico	$Y < d$	0,202			0,927
26	Aguas arriba	14,210	0,060	2,041	0,009	0,042	0,213	1,582	5,685	1,582	2,460	23,9%	Supercrítico	$Y < d$	0,187	0,008	4,036	1,040
	Aguas abajo	14,210	0,188	4,201	0,040	0,184	0,216	0,359	5,729	0,359	0,267	75,3%	Subcrítico	$Y < d$	0,195			0,937
27	Aguas arriba	13,280	0,057	1,996	0,008	0,040	0,210	1,568	5,635	1,568	2,492	22,9%	Supercrítico	$Y < d$	0,182	0,007	3,737	1,037
	Aguas abajo	13,280	0,183	4,111	0,039	0,174	0,221	0,344	5,819	0,344	0,263	73,3%	Subcrítico	$Y < d$	0,189			0,965
28	Aguas arriba	13,210	0,057	1,990	0,008	0,040	0,210	1,571	5,628	1,571	2,504	22,8%	Supercrítico	$Y < d$	0,183	0,004	2,398	1,024
	Aguas abajo	13,210	0,181	4,069	0,038	0,170	0,224	0,347	5,857	0,347	0,269	72,4%	Subcrítico	$Y < d$	0,187			1,018
29	Aguas arriba	12,920	0,055	1,944	0,008	0,038	0,207	1,633	5,575	1,633	2,663	21,8%	Supercrítico	$Y < d$	0,190	0,007	3,754	0,962
	Aguas abajo	12,920	0,177	4,002	0,037	0,164	0,227	0,347	5,917	0,347	0,274	70,9%	Subcrítico	$Y < d$	0,183			0,977
30	Aguas arriba	12,070	0,053	1,923	0,008	0,037	0,205	1,570	5,549	1,570	2,589	21,4%	Supercrítico	$Y < d$	0,179	0,009	4,831	0,952
	Aguas abajo	12,070	0,164	3,778	0,034	0,144	0,237	0,353	6,081	0,353	0,297	65,6%	Subcrítico	$Y < d$	0,170			1,018
31	Aguas arriba	11,480	0,052	1,899	0,007	0,037	0,203	1,542	5,521	1,542	2,573	20,9%	Supercrítico	$Y < d$	0,173	0,010	5,707	0,943
	Aguas abajo	11,480	0,157	3,663	0,033	0,135	0,242	0,353	6,146	0,353	0,307	62,9%	Subcrítico	$Y < d$	0,164			0,988
32	Aguas arriba	10,270	0,050	1,849	0,007	0,035	0,200	1,481	5,457	1,481	2,538	19,9%	Supercrítico	$Y < d$	0,162	0,001	0,502	0,995
	Aguas abajo	10,270	0,156	3,635	0,032	0,132	0,242	0,320	6,159	0,320	0,281	62,2%	Subcrítico	$Y < d$	0,161			1,060
33	Aguas arriba	9,100	0,044	1,727	0,006	0,030	0,190	1,577	5,292	1,577	2,889	17,5%	Supercrítico	$Y < d$	0,170	0,017	9,887	0,901
	Aguas abajo	9,100	0,149	3,530	0,031	0,124	0,245	0,298	6,205	0,298	0,270	59,6%	Subcrítico	$Y < d$	0,154			0,989
34	Aguas arriba	8,150	0,043	1,704	0,006	0,030	0,188	1,464	5,260	1,464	2,717	17,1%	Supercrítico	$Y < d$	0,152	0,009	5,786	0,942

	Aguas abajo	8,150	0,139	3,362	0,028	0,113	0,248	0,291	6,255	0,291	0,277	55,5%	Subcrítico	$Y < d$	0,143			0,963
35	Aguas arriba	7,420	0,042	1,686	0,005	0,029	0,187	1,372	5,234	1,372	2,574	16,7%	Supercrítico	$Y < d$	0,138	0,006	4,372	0,956
	Aguas abajo	7,420	0,127	3,179	0,025	0,101	0,250	0,295	6,278	0,295	0,297	50,9%	Subcrítico	$Y < d$	0,132			

## Anexo II

- Datos para pendiente de 0,011 aguas arriba

Tabla 14. Datos de Entrada para calcular ecuación de Darcy Weisbach.

Datos de Entrada	
$k_s$	1,50E-06
S	0,011
Viscosidad	1,14E-06

Tabla 15. Ecuaciones teóricas utilizando ley de Darcy Weisbach.

AGUAS ARRIBA													
d (m)	y/d (-)	$y_n$ (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (Darcy) (m/s)	Velocidad (Manning) (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)
0,25	10%	0,025	1,287	0,003	0,161	0,016	0,798	4417,461	0,002	44462,929	0,150	0,017	1,952
0,25	20%	0,050	1,855	0,007	0,232	0,030	1,233	6772,920	0,009	130468,977	0,200	0,035	2,107
0,25	30%	0,075	2,319	0,012	0,290	0,043	1,555	8546,649	0,019	233178,698	0,229	0,054	2,135
0,25	40%	0,100	2,739	0,018	0,342	0,054	1,803	9934,523	0,033	338908,322	0,245	0,075	2,105
0,25	50%	0,125	3,142	0,025	0,393	0,063	1,995	11011,803	0,049	437394,924	0,250	0,098	2,032

- **Datos para pendiente de 0,011 aguas abajo**

**Tabla 16. Ecuaciones teóricas utilizando ley de Darcy Weisbach.**

AGUAS ABAJO													
d (m)	y/d (-)	yn (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (Darcy) (m/s)	Velocidad (Manning) (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)
0,25	50%	0,125	3,142	0,025	0,393	0,063	1,995	11011,803	0,049	437394,924	0,250	0,098	2,032
0,25	60%	0,150	3,544	0,031	0,443	0,069	2,135	11809,300	0,066	519971,306	0,245	0,126	1,924
0,25	70%	0,175	3,965	0,037	0,496	0,074	2,226	12330,735	0,082	578545,352	0,229	0,160	1,776
0,25	80%	0,200	4,429	0,042	0,554	0,076	2,265	12550,609	0,095	604350,218	0,200	0,210	1,576
0,25	90%	0,225	4,996	0,047	0,625	0,075	2,235	12380,691	0,104	584350,313	0,150	0,310	1,281
0,25	100%	0,238	5,381	0,048	0,673	0,072	2,179	12057,738	0,105	547421,382	0,109	0,442	1,046

- **Datos de entrada para pendiente de 0,018 aguas arriba**

- 

**Tabla 17. Datos de Entrada para calcular ecuación de Darcy Weisbach.**

Datos de Entrada	
ks	1,50E-06
S	0,018
Viscosidad	1,14E-06

**Tabla 18. Ecuaciones teóricas utilizando ley de Darcy Weisbach.**

AGUAS ARRIBA													
d (m)	y/d (-)	yn (m)	teta (-)	Área (m <sup>2</sup> )	Perímetro (m)	Radio (m)	Velocidad (Darcy) (m/s)	Velocidad (Manning) (m/s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	Reynolds (-)	T (m)	D (m)	Froude (-)
0,25	15%	0,038	1,591	0,005	0,199	0,023	1,323	5690,787	0,006	107822,902	0,179	0,026	2,628
0,25	20%	0,050	1,855	0,007	0,232	0,030	1,578	6772,920	0,011	166896,476	0,200	0,035	2,695
0,25	30%	0,075	2,319	0,012	0,290	0,043	1,989	8546,649	0,025	298283,193	0,229	0,054	2,732
0,25	40%	0,100	2,739	0,018	0,342	0,054	2,307	9934,523	0,042	433532,982	0,245	0,075	2,692
0,25	45%	0,113	2,941	0,021	0,368	0,058	2,438	10509,341	0,052	498407,561	0,249	0,086	2,652

### Anexo III

**Tabla 19. Comparación de resultados teóricos con resultados experimentales en profundidades de flujo aguas abajo para todas las pendientes.**

S=0,011		S=0,016		S0,018		S=0,025	
Y2	Y2 Teóricos	Y2	Y2 Teórico	Y2	Y2 Teórico	Y2	Y2 Teóricos
0,250	0,219	0,250	0,208	0,250	0,210	0,250	0,215
0,250	0,215	0,250	0,208	0,250	0,200	0,250	0,210
0,249	0,211	0,250	0,208	0,250	0,198	0,250	0,206
0,245	0,209	0,250	0,206	0,250	0,194	0,250	0,200
0,242	0,205	0,250	0,205	0,246	0,187	0,250	0,200
0,237	0,202	0,250	0,200	0,244	0,187	0,250	0,198
0,235	0,198	0,250	0,195	0,238	0,181	0,250	0,197
0,229	0,198	0,250	0,194	0,235	0,178	0,250	0,195
0,223	0,196	0,250	0,192	0,234	0,177	0,250	0,188
0,223	0,194	0,250	0,192	0,230	0,173	0,250	0,186
0,222	0,188	0,250	0,192	0,223	0,166	0,249	0,180
0,221	0,187	0,249	0,190	0,221	0,166	0,248	0,177
0,216	0,185	0,247	0,187	0,219	0,166	0,248	0,167
0,213	0,181	0,242	0,186	0,214	0,166	0,245	0,167
0,207	0,175	0,241	0,186	0,213	0,165	0,235	0,165
0,203	0,169	0,244	0,183	0,209	0,165	0,242	0,165
0,197	0,168	0,238	0,183	0,205	0,165	0,242	0,165
0,192	0,168	0,237	0,177	0,193	0,161	0,234	0,162
0,191	0,166	0,233	0,174	0,191	0,161	0,234	0,160
0,191	0,165	0,227	0,173	0,185	0,154	0,233	0,160
0,188	0,164	0,223	0,170	0,184	0,150	0,225	0,160
0,180	0,163	0,214	0,167	0,182	0,150	0,222	0,153
0,178	0,163	0,208	0,165	0,181	0,147	0,220	0,150
0,175	0,163	0,203	0,165	0,179	0,146	0,197	0,149
0,171	0,162	0,194	0,164	0,174	0,145	0,195	0,143
0,168	0,159	0,188	0,161	0,171	0,143	0,188	0,139
0,164	0,154	0,185	0,156	0,169	0,140	0,183	0,137
0,162	0,147	0,176	0,150	0,163	0,137	0,181	0,137
0,160	0,145	0,175	0,143	0,162	0,134	0,177	0,136
0,154	0,143	0,175	0,138	0,158	0,131	0,164	0,133
0,146	0,141	0,171	0,136	0,157	0,131	0,157	0,131
0,142	0,135	0,169	0,130	0,156	0,131	0,156	0,125
0,133	0,128	0,162	0,129	0,153	0,128	0,149	0,123

0,130	0,125	0,154	0,126	0,135	0,123	0,139	0,114
0,123	0,120	0,147	0,122	0,134	0,120	0,127	0,100

## Anexo IV

Function y2()

Q = Cells(2, 3)

s = Cells(3, 3)

d = Cells(4, 3)

If s = 0.025 Then

$y2 = 0.8893 * Q^{0.3715}$

Cells(6, 3) = y2

rel = y2 / d

Cells(7, 3) = rel

If rel <= 0.85 Then

Cells(8, 3) = "SI"

Else

Cells(8, 3) = "NO"

End If

Elseif  $s = 0.018$  Then

$$y_2 = 1.1367 * Q^{0.4509}$$

$$\text{Cells}(6, 3) = y_2$$

$$\text{rel} = y_2 / d$$

$$\text{Cells}(7, 3) = \text{rel}$$

If  $\text{rel} \leq 0.85$  Then

$$\text{Cells}(8, 3) = \text{"SI"}$$

Else

$$\text{Cells}(8, 3) = \text{"NO"}$$

End If

Elseif  $s = 0.016$  Then

$$y_2 = 0.8892 * Q^{0.3884}$$

$$\text{Cells}(6, 3) = y_2$$

$$\text{rel} = y_2 / d$$

$$\text{Cells}(7, 3) = \text{rel}$$

if  $\text{rel} \leq 0.85$  Then

$$\text{Cells}(8, 3) = \text{"SI"}$$

Else

$$\text{Cells}(8, 3) = \text{"NO"}$$



End If

Elseif  $s = 0.011$  Then

$$y2 = 0.9946 * Q ^{0.4475}$$

$$\text{Cells}(6, 3) = y2$$

$$\text{rel} = y2 / d$$

$$\text{Cells}(7, 3) = \text{rel}$$

If  $\text{rel} \leq 0.85$  Then

$$\text{Cells}(8, 3) = \text{"SI"}$$

Else

$$\text{Cells}(8, 3) = \text{"NO"}$$

End If

Else

$$y2 = \text{"No Registrado en Laboratorio"}$$

$$\text{Cells}(6, 3) = y2$$

End If

End Function