

**XX SEMINARIO NACIONAL DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA-
BARRANQUILLA, COLOMBIA, 8 AL 10 DE AGOSTO DE 2012**

**EFFECTO DEL USO DE LA ECUACIÓN DE DARCY-WEISBACH VS LA
ECUACIÓN DE HAZEN-WILLIAMS EN EL DISEÑO DE REDES
MATRICES**

Rafael A. Flechas

*Investigador, Centro de Investigación en Acueductos y Alcantarillados de la Universidad de Los Andes –CIACUA–,
Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental, Bogotá, Colombia, rafalflechas@gmail.com*

RESUMEN:

En el diseño y análisis de redes de distribución de agua potable (RDAP), las ecuaciones más empleadas para calcular las pérdidas por fricción son: la ecuación de Darcy-Weisbach y la ecuación de Hazen-Williams. El uso de esta última ecuación empírica se ha popularizado alrededor del mundo por su facilidad de manejo. Sin embargo, el uso de ésta en el diseño de redes matrices, parte fundamental de RDAP, muchas veces se hace sin tener en cuenta sus límites de aplicabilidad. Por ello, en este artículo se analizó el efecto del uso de la ecuación de Darcy-Weisbach vs la Ecuación de Hazen-Williams en redes matrices, las cuales presentan tuberías de gran diámetro que transportan altos caudales. Con base en ello, se encontró que la ecuación de Hazen-Williams no cumple con los requisitos de diseño de estas redes, dado que no tiene en cuenta el efecto de la variación de la rugosidad relativa para números de Reynolds de gran magnitud.

PALABRAS CLAVES: Ecuación de Darcy-Weisbach, Ecuación de Hazen-Williams, redes matrices.

INTRODUCCIÓN

El creciente aumento de la demanda de agua en las ciudades, y la limitada oferta de agua que existe alrededor del mundo exige, por parte de los ingenieros, el diseño optimizado de las redes matrices, las cuales se encargan de transportar, con tuberías de gran diámetro, el agua desde las fuentes de abastecimiento hasta los tanques de almacenamiento, que posteriormente distribuyen este recurso vital a una población específica.

Para llevar a cabo dicho propósito, es necesario establecer con certeza la magnitud de las pérdidas por fricción que se generan en las tuberías. En este sentido, las ecuaciones más empleadas por los ingenieros para calcular dichas pérdidas son: la ecuación de Darcy-Weisbach [1] en conjunto con la ecuación de Colebrook-White [2], ecuaciones físicamente basadas, y la ecuación de Hazen-Williams [3], ecuación de origen experimental que es válida solamente en los rangos investigados para su formulación.

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

donde h_f son las pérdidas por fricción, L es la longitud de la tubería, V la velocidad de flujo, g es la aceleración de la gravedad, f es el factor de fricción, Re el número de Reynolds y k_s la rugosidad absoluta de la tubería.

donde C_{HW} es el coeficiente de la ecuación de Hazen-Williams, R es el radio hidráulico y S es la pendiente de la línea del gradiente hidráulico.

En relación con la ecuación de Darcy-Weisbach, se puede decir que ésta se puede aplicar para cualquier temperatura, rango de velocidades, diámetros y longitudes de tubería. Sin embargo, el cálculo de las pérdidas por fricción por medio de ésta se dificulta, dado que el factor de fricción es un parámetro difícil de cuantificar analíticamente, lo cual se refleja en la ecuación de Colebrook-White ya que no explícita para f . Este problema ocasionó la aparición de ecuaciones empíricas más sencillas de utilizar como la ecuación de Hazen-Williams [3], la cual es ampliamente utilizada en la actualidad por muchos ingenieros, debido a que presenta la ventaja de ser explícita para el cálculo de la velocidad. Sin embargo, el uso de esta ecuación empírica muchas veces se hace sin tener en cuenta las limitaciones inherentes que presenta desde el punto de vista hidráulico (Bombardelli & García, 2003), dado que esta ecuación utiliza un coeficiente de rugosidad que no depende solamente de la rugosidad absoluta de la tubería (k_s), sino de la velocidad, magnitud del diámetro y viscosidad del fluido (Vennard 1958, Diskin 1960; Liou 1998).

Teniendo en cuenta estas limitaciones, algunos investigadores (Diskin 1960, Barlow y Markland 1975, Jain et al 1978, Kamand 1988; Liou 1998) han propuesto metodologías para la aplicación adecuada de esta ecuación restringiendo su uso para un rango específico del número de Reynolds (Re) y diámetros. A pesar de todos estos esfuerzos, en la actualidad muchos de los ingenieros no consideran las implicaciones hidráulicas que puede tener el uso de dicha ecuación empírica en el diseño de redes matrices, las cuales presentan tuberías de gran diámetro que transportan altos caudales.

Por esta razón, en este artículo se pretende analizar el efecto del uso de la ecuación de Hazen-Williams vs. la ecuación de Darcy-Weisbach en el diseño de redes matrices. Para ello, se diseñaron distintas redes matrices hipotéticas utilizando las ecuaciones de Darcy-Weisbach y Hazen-Williams, bajo parámetros de presión mínima, temperatura y diferentes tipos de materiales, según la normativa colombiana. Luego, con base en estos diseños se establecieron las implicaciones hidráulicas en el diseño de éstas redes por el uso de una ecuación respecto al uso de la otra. Luego, teniendo en cuenta las implicaciones de la ecuación de Hazen-Williams en el diseño de las redes matrices, se propone la corrección de los coeficientes de Hazen-Williams, sugeridos en la normativa colombiana, a fin de minimizar el error en el cálculo de las pérdidas por fricción. Finalmente, se muestran algunas conclusiones con base en este análisis.

BASE TEORICA

Teniendo en cuenta las limitaciones inherentes que presenta la ecuación de Hazen-Williams, a lo largo del Siglo XX se han realizado diversos estudios para establecer cuáles son los efectos de utilizar esta ecuación en el cálculo de flujo de tuberías en comparación con la ecuación de Darcy-Weisbach. Vennard (1958) fue el primer investigador en establecer que la ecuación de Hazen-Williams no se podía aplicar en tuberías que presentaban flujo turbulento hidráulicamente rugoso (FTHR), dado que el coeficiente de ésta depende de las condiciones de flujo y la rugosidad relativa. Luego, a diferencia de este investigador, Diskin (1960) logró establecer los límites de aplicabilidad de esta ecuación para los diferentes tipos de flujo. Para ello, reorganizó la ecuación de Hazen-Williams en la forma de la ecuación de Darcy-Weisbach para obtener una relación potencial que relacionara el factor de fricción y el coeficiente de la ecuación de Hazen-Williams (Ecuación [4]):

Graficando la Ecuación [4] en el diagrama de Moody, Diskin (1960) concluyó que la ecuación de Hazen-Williams es aplicable en una parte de la zona de transición de este diagrama, para un rango de números de Reynolds y coeficientes de Hazen-Williams (100 y 160), donde las líneas de este diagrama son paralelas a las líneas dibujadas a partir de la Ecuación [4].

Teniendo en cuenta las limitaciones que presentaba la ecuación de Hazen-Williams, expuestas por Vennard (1958) y Diskin (1960), diversos investigadores (Barlow y Markland 1975, Jain et al 1978; Kamand 1988) intentaron corregir dicha ecuación a fin de obtener una mayor exactitud en el cálculo de las pérdidas por fricción en tuberías en comparación con la ecuación de Darcy-Weisbach. A pesar de estos esfuerzos, en la actualidad esta ecuación se sigue utilizando alrededor del mundo sin tener en cuenta los efectos que podría tener su uso en las redes de distribución de agua potable (RDAP) y específicamente en las redes con tuberías de gran diámetro. Por esta razón, recientemente los investigadores Liou (1998), Bombardelli y García (2003) realizaron algunos estudios para analizar dicho efecto.

Liou (1998) mostró cuantitativamente los efectos y las limitaciones que presenta la utilización de la ecuación de Hazen-Williams en tuberías. Para ello, este investigador, primero dedujo la relación que existe entre el coeficiente de esta ecuación empírica, el número de Reynolds y la rugosidad relativa, con base en la ecuación de Darcy-Weisbach [1], la ecuación de Colebrook-White [2] y la ecuación de Hazen-Williams [3], tal como se ilustra a continuación:

[5]

donde ν es la viscosidad cinemática del fluido.

Graficando los datos utilizados por Hazen & Williams (1905) para la formulación de su ecuación, a partir de la Ecuación [5], para un $k_s = 0.0003 \text{ m}$ y $\nu = 1.133 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (viscosidad cinemática del agua a una temperatura de 15.56°C), Liou (1998) coincide con Diskin en afirmar que estos datos se encuentran en la zona de transición del diagrama de Moody. Adicionalmente, este investigador logró establecer que por fuera de este rango de validez se pueden presentar errores de hasta el 40% en el cálculo de las pérdidas por fricción cuando se utiliza la Ecuación de Hazen-Williams en comparación a la Ecuación de Darcy-Weisbach. Por lo anterior, Liou recomienda evitar la utilización de la ecuación de Hazen-Williams para el cálculo de flujo de tuberías.

Luego, Bombardelli y García (2003), analizaron los efectos que tiene el uso de la ecuación de Hazen-Williams posteriormente al diseño de redes matrices con esta ecuación. Para ello, estos investigadores partieron del problema que se presentaba en una red matriz de una ciudad después de 5 años de operación, el cual era la disminución significativa de los coeficientes de Hazen-Williams calculados por firmas de ingeniería (entre 85 y 95 para tuberías de 2.29 m de diámetro) en comparación a los coeficientes utilizados inicialmente en el diseño de las tuberías del sistema ($C_{HW} = 120$, tuberías de concreto). Después de verificar que las mediciones hechas por estas firmas no presentaban error alguno, Bombardelli y García establecieron las causas de dichas mediciones. Estas estaban relacionadas con el tipo de flujo que se presentaba en la operación del sistema, ya que el aumento de la demanda y la continua operación del sistema generaban flujos que se ubicaban en el régimen de FTHR, régimen donde no es posible aplicar la ecuación de Hazen-Williams. Por lo anterior, estos investigadores recomiendan utilizar la ecuación de Darcy-Weisbach en el diseño de RDAP y redes matrices debido a que esta incluye todos los tipos de flujo.

METODOLOGIA

Para llevar a cabo los objetivos propuestos, se diseñaron y analizaron dos redes matrices utilizando las ecuaciones de Darcy-Weisbach y Hazen-Williams: una red matriz hipotética de la ciudad de Medellín, la cual consta de 685 nudos y 768 tuberías y está conformada por 3 embalses (Ver Figura 1), cuya oferta de agua es igual a $8 \text{ m}^3/\text{s}$ y se distribuye de la siguiente manera: Ayurá ($5 \text{ m}^3/\text{s}$) y Manantiales ($3 \text{ m}^3/\text{s}$). Adicionalmente, se escogió la red matriz Hanoi, red hipotética que consta de 34 tuberías y 31 nudos, los cuales presentan una demanda igual a $830 \text{ m}^3/\text{h}$.

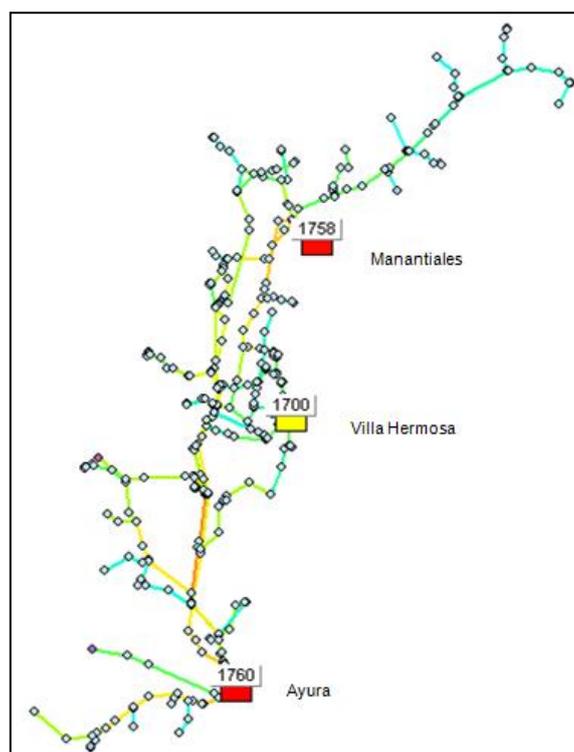


Figura 1.- Topología Red matriz hipotética de Medellín.

Para diseñar estas redes, se utilizó el programa REDES, programa creado en la Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia (1988), teniendo en cuenta los siguientes parámetros de diseño en común para estas redes:

- Método de diseño: Superficie Óptima del Gradiente Hidráulico.
- Presión mínima: 20 metros de columna de agua (mca).
- Materiales: CCP, GRP y Acero (Ver tabla 1).
- Temperatura: 15°C (solo aplica para los diseños con la ecuación de Darcy-Weisbach).

Tabla 1.- Valores de k_s y C_{HW} materiales seleccionados.

Material	k_s [mm]	C_{HW} [-]
CCP	0.12	120
GRP	0.03	150
Acero	0.45	120

Con base en lo anterior, se procedió a analizar estas redes, para cada uno de estos materiales, realizando comprobaciones de diseño mediante las herramientas computacionales EPANET (2000) y REDES (1988), a fin de obtener las pérdidas por fricción, caudales y presión de los nudos tanto para la ecuación de Hazen-Williams y Darcy-Weisbach. Con base en estos resultados, se procedió a calcular la variación del coeficiente de Hazen-Williams a partir de la ecuación [5] propuesta por Liou (1998) y su efecto en los errores en las pérdidas por fricción y distribución de presiones en las redes de estudio cuando se utiliza dicha ecuación empírica.

Luego, dependiendo si el error en las pérdidas por fricción, para cada material, en algunas tuberías de estas redes es mayor al 5%, se desarrolló un programa en Visual Basic para corregir los coeficientes de Hazen-Williams sugeridos en la normativa colombiana (Ver Tabla 1), para un rango de número de Reynolds y velocidades asociado a un diámetro mínimo, situación crítica en el diseño de redes matrices, dado que así se subestiman las pérdidas por fricción; se correría el riesgo de no cumplir con las presiones de operación en estas redes.

Posteriormente, se validaron los diseños obtenidos a partir de estos coeficientes corregidos, realizando comprobaciones de diseño utilizando la ecuación de Darcy-Weisbach para establecer la precisión de los mismos en cuanto a la distribución de presiones y cumplimiento de la presión mínima. Igualmente, se compararon los resultados de estos diseños con los obtenidos a partir de los coeficientes de Hazen-Williams sugeridos en la normativa colombiana.

Finalmente, teniendo en cuenta los límites de aplicabilidad de la ecuación de Hazen-Williams, los cuales están definidos por la zona de transición del diagrama de Moody (Diskin, 1960), y los establecidos para los coeficientes de Hazen-Williams corregidos, se analizaron los diseños obtenidos en el diagrama de Moody.

RESULTADOS

En el presente capítulo se presentan los resultados obtenidos en relación con los efectos del uso de la ecuación de Hazen-Williams vs la Ecuación de Darcy-Weisbach en redes matrices, específicamente para la red matriz hipotética de Medellín, dado que para la red Hanoi se encontraron resultados similares a esta. Para ello, este capítulo se dividirá en cuatro partes. En la primera, se analizará el efecto del uso de la ecuación de Hazen-Williams cuando se utiliza un coeficiente de rugosidad constante, sugerido en la normativa colombiana, en la estimación de las pérdidas por fricción y distribución de presiones. Luego, se ilustrarán los coeficientes de Hazen-Williams corregidos para los materiales de estudio. Posteriormente, en la tercera parte se mostrarán los resultados obtenidos en relación con el diseño de las redes matrices de estudio, utilizando tanto los coeficientes de Hazen-Williams corregidos y sugeridos en la normativa colombiana. En la última parte, se expondrá la comparación de estos diseños y su respectiva validación, utilizando la ecuación de Darcy-Weisbach.

Error pérdidas por Fricción

Con base en la metodología propuesta, se calcularon los errores en la estimación de las pérdidas por fricción utilizando la ecuación de Hazen-Williams, acorde a los coeficientes de esta ecuación sugeridos en la normativa colombiana para el Acero, CCP y GRP (Tabla 1). A partir de lo anterior, se obtuvo que los valores sugeridos de este coeficiente en la normativa colombiana para el Acero y CCP, sobreestiman las pérdidas por fricción hasta en un 40% y 20% respectivamente (ver Figura 2). Adicionalmente, en la Figura 2 se puede apreciar que estos coeficientes son válidos para un rango de número de Reynolds superior a 200.000 para el Acero y superior a 1.000.000 para CCP, dado que en estos rangos los errores en las pérdidas por fricción en la red matriz de Medellín no superan el 10%. Por su parte, para el material GRP, se puede ver en esta misma figura que el valor sugerido en la normativa colombiana es adecuado dado que los errores en las pérdidas por fricción no superan el 10% en la subestimación en las pérdidas por fricción. Pese a ello, se corre el riesgo de que para números de Reynolds inferiores a 10.000 o superiores a 1.000.000 se subestimen las pérdidas por fricción en la red y por lo tanto no se pueda cumplir con las presiones mínimas exigidas en la red de estudio.

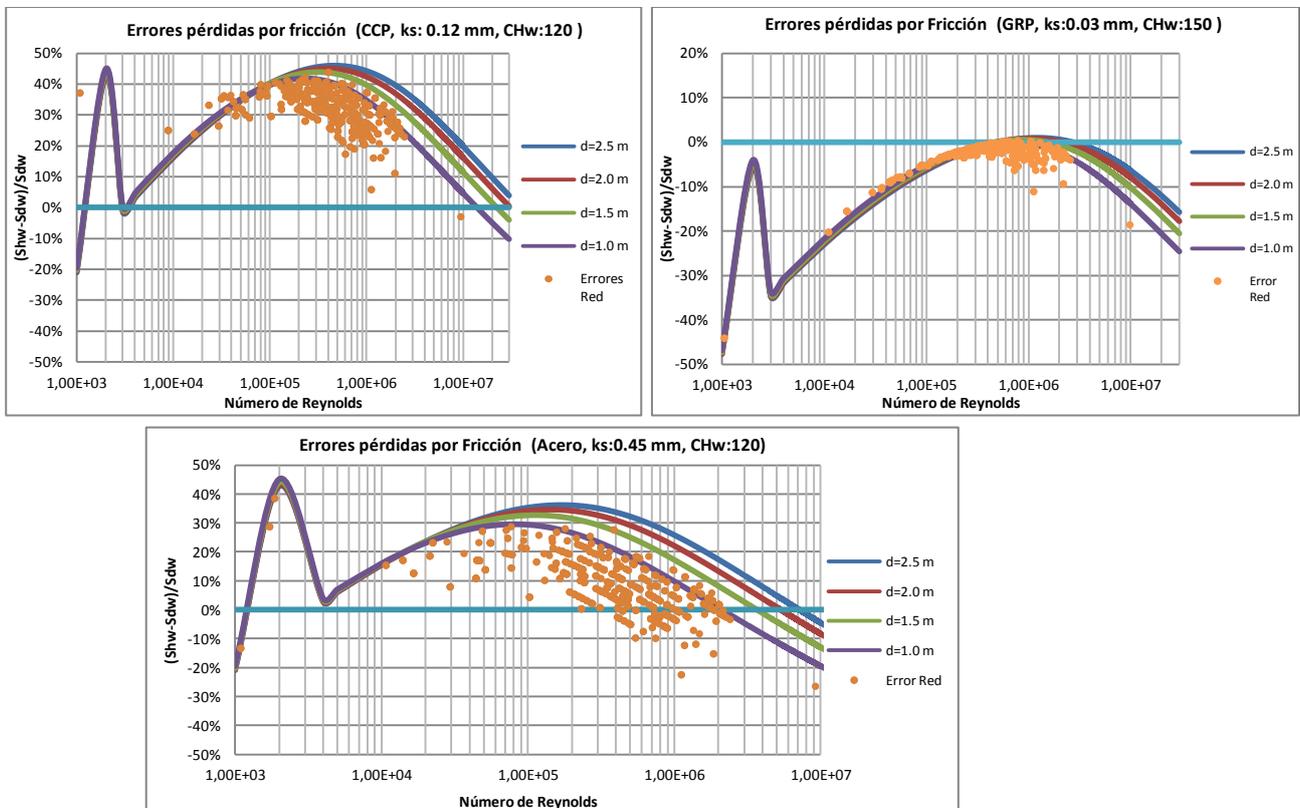
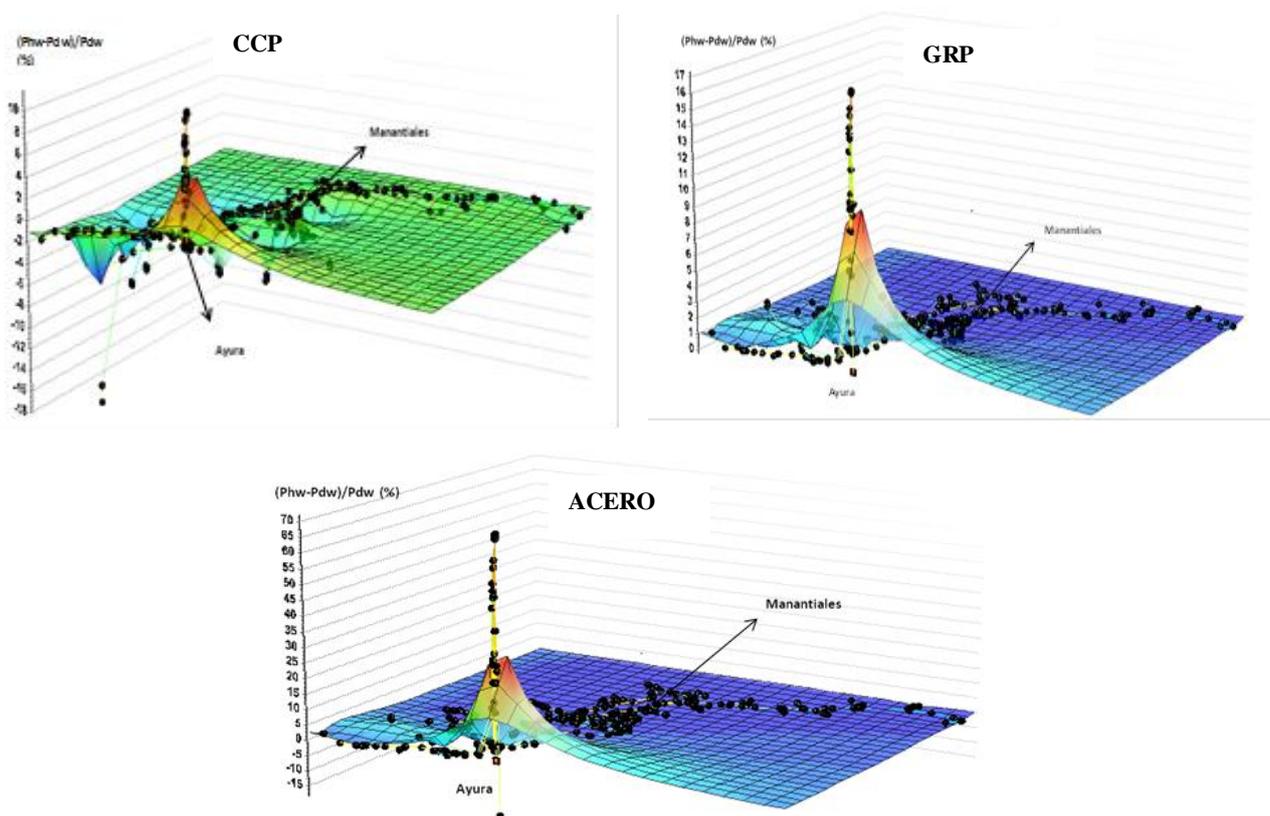


Figura 2.- Errores en las pérdidas por fricción en la red matriz hipotética de Medellín, utilizando la ecuación de Darcy-Weisbach y Hazen-Williams para el CCP, GRP y Acero.

Errores presiones de los nudos

Con base en la metodología propuesta, se obtuvo (Ver Figura 3) que los valores sugeridos del coeficiente de Hazen-Williams, acorde a la normativa colombiana, para el CCP, GRP y Acero sobreestiman las presiones en los nudos hasta en un 10%, 17% y 70% respectivamente, cerca al embalse de Ayurá, el cual suministra el mayor caudal a esta red ($5 \text{ m}^3/\text{s}$). Lo anterior, es consistente con los resultados obtenidos en cuanto a los errores en las pérdidas por fricción para estos materiales, dado que en este sector de la red matriz hipotética de Medellín se presentan números de Reynolds superiores a 9.000.000, rango en el cual los coeficientes de Hazen-Williams para estos materiales, tiende a subestimar las pérdidas por fricción por encima del 10%.



Figuras 3.- Errores en las presiones en los nudos de la red matriz hipotética de Medellín, utilizando la ecuación de Darcy-Weisbach y Hazen-Williams para el Acero, GRP y CCP

Corrección Coeficientes de Hazen-Williams

Teniendo en cuenta los anteriores resultados, se sugirió modificar los coeficientes de Hazen-Williams sugeridos en la normativa colombiana para el Acero, CCP y GRP (Ver Tabla 2), a fin de controlar el error en las pérdidas por fricción hasta en un 5%.

Tabla 2.- Corrección del Coeficiente de Hazen-Williams para los materiales de estudio.

Material	CHw	Re mínimo	Re máximo	Diámetro mínimo	Velocidad límite máxima
[-]	[-]	[-]	[-]	[mm]	[m/s]
CCP	144	4.50E+04	4.15E+05	500	0.95
GRP	147	7.00E+04	2.48E+06	500	5.6
Acero	139	2.50E+04	2.55E+05	1000	0.3

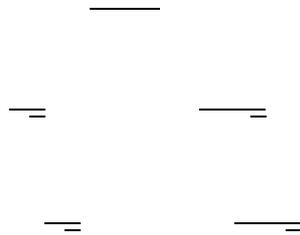
Validación y Análisis Diseños

Con base en los resultados obtenidos en los errores en las presiones en los nudos, se puede ver que el sector donde se presentan mayores errores en la estimación de la distribución de presiones de la red matriz hipotética de Medellín, es el sector delimitado por el Embalse de Ayurá. Por ello se decidió diseñar solamente el sector comprendido por este embalse, para los coeficientes de Hazen-Williams sugeridos en la normativa colombiana y los corregidos en este artículo. Luego de haber obtenido los diseños de esta red para dicho sector, se procedió a validar estos diseños a fin de verificar si en realidad cumplen con la presión mínima establecida (20 mca).

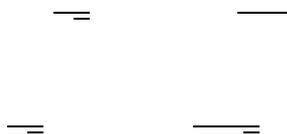
Posteriormente, se analizaron los factores de fricción obtenidos mediante estos diseños en la zona de transición del diagrama de Moody, zona que va desde la línea límite máxima donde se puede presentar flujo turbulento hidráulicamente liso (FTHL) hasta la línea límite mínima donde se puede presentar flujo turbulento hidráulicamente rugoso (FTHR). A continuación se ilustran las

ecuaciones que se utilizaron para delimitar el límite inferior y superior de la zona de transición, incluyendo las nuevas ecuaciones propuestas por el autor para estos límites con base en la ecuación de Colebrook-White y los límites establecidos por estos dos investigadores para esta zona (Flechas, 2010).

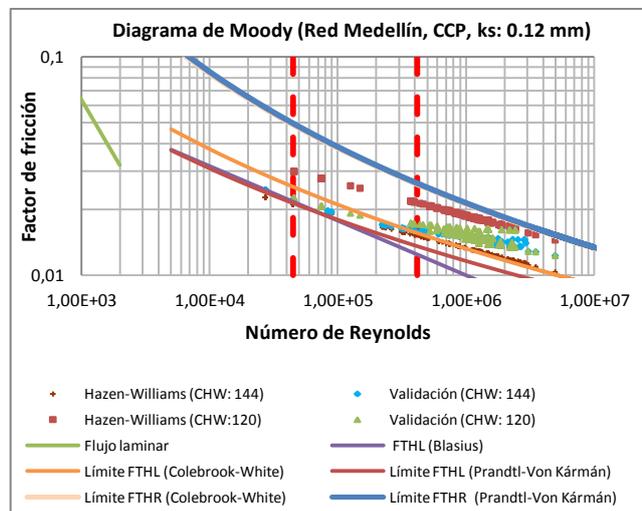
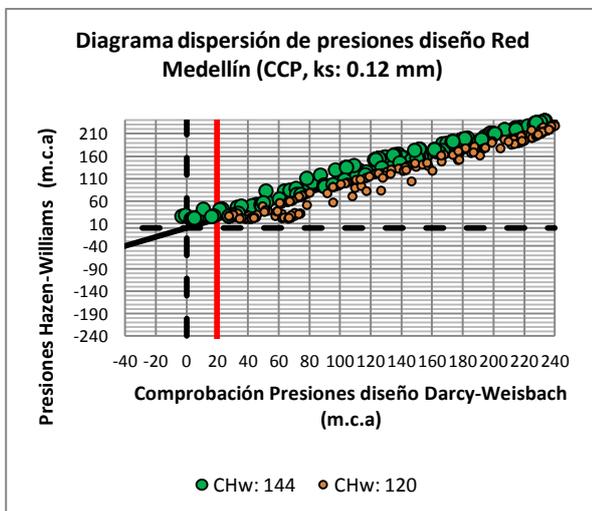
- Límite inferior zona de transición (Límite FTHL)



- Límite superior zona de transición (Límite FTTH)



A partir de lo anterior, se puede apreciar en la Figura 4 que el diseño obtenido a partir del coeficiente de Hazen-Williams corregido para el material CCP (CHw: 144) tiende a sobreestimar las presiones en la red matriz hipotética de Medellín. Así mismo, se puede ver en esta misma figura que este diseño no cumple con la presión mínima de diseño de esta red (20 mca). Por otro lado, el diseño obtenido a partir del coeficiente de Hazen-Williams sugerido en la normativa colombiana (CHw: 120) subestima las presiones en esta red, pero se encuentran por encima de la presión mínima de diseño. Lo anterior se explica ya que el coeficiente de Hazen-Williams corregido para este material subestima las pérdidas por fricción, dado que dicho coeficiente obliga a que el flujo en las tuberías en esta red sea FTHL, cuando en la realidad, para la rugosidad absoluta dada para el CCP, el flujo es turbulento transicional (Ver Figura 4) para los diámetros obtenidos en este diseño. Adicionalmente, los factores de fricción obtenidos a partir del coeficiente de Hazen-Williams corregido para el material CCP no se ubican en el rango de número de Reynolds establecido en la Tabla 2, lo cual no permite cumplir con la presión mínima de diseño (Ver Figura 4).



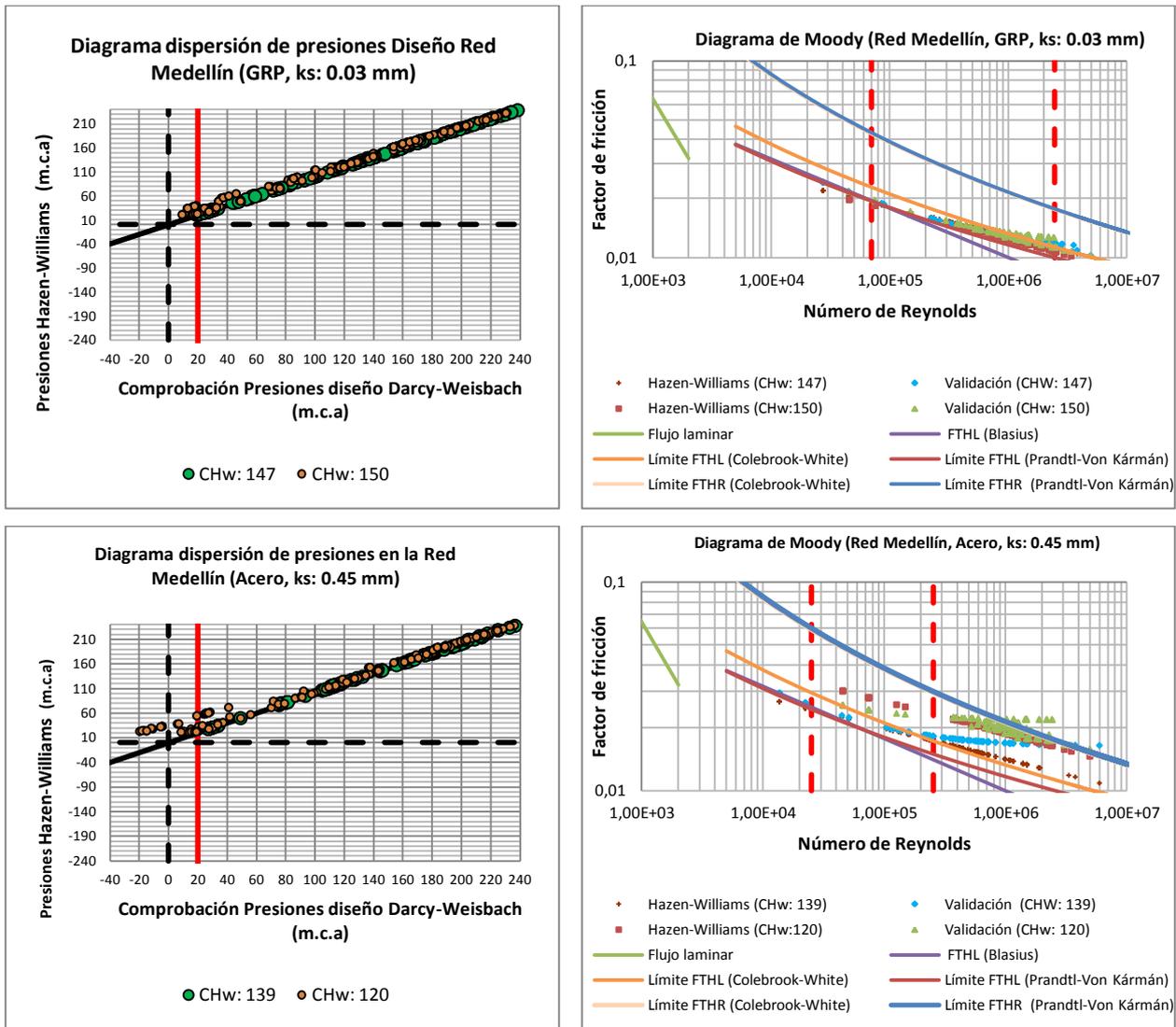


Figura 4.- Validación y análisis de los diseños obtenidos mediante los coeficientes de Hazen-Williams sugeridos en la normativa colombiana y los corregidos para los materiales Acero, CCP y GRP.

Por otro lado, para el material GRP, se puede ver en la Figura 4 que el diseño obtenido a partir del coeficiente de Hazen-Williams corregido (CHw: 147) tiende a igualar las presiones en la red matriz hipotética de Medellín, cumpliendo con la presión mínima de diseño de esta red (20 mca). Entre tanto, el diseño obtenido a partir del coeficiente de Hazen-Williams sugerido en la normativa colombiana (CHw: 150) para este material, subestima las presiones en esta red y en algunos nudos no se logra cumplir con la presión mínima de diseño. Lo anterior se explica dado que los factores de fricción obtenidos mediante el coeficiente de Hazen-Williams corregido para este material se localizan en el FTHL, según los límites de la zona de transición definidos por el autor (2010), donde es posible utilizar dicho coeficiente con buena precisión, con respecto a la ecuación de Darcy-Weisbach, según el rango de número de Reynolds definido para dicho coeficiente (Ver Tabla 2). Por su parte, para el coeficiente de Hazen-Williams sugerido en la normativa colombiana, los factores de fricción tienden subestimar las pérdidas por fricción para números de Reynolds superiores a 1.000.000.

Finalmente, con respecto a los diseños obtenidos para el Acero, se puede apreciar en la Figura 4 que los factores hidráulicos obtenidos a partir del diseño de esta red, utilizando la ecuación de Hazen-Williams y el coeficiente corregido para este material (CHw: 139), se localizan en la zona del flujo turbulento transicional, para números de Reynolds superiores a 200.000. De otro lado, para este mismo rango de números de Reynolds, los factores de fricción obtenidos en la validación de este diseño, se localizan en la zona de transición y tienden a ubicarse en el FTHR. Pese a lo anterior,

es importante resaltar que, en el rango de número de Reynolds definido para utilizar dicho coeficiente, los factores de fricción tanto del diseño como la validación del mismo, tienden a igualarse en el FTHL en el diagrama de Moody según el límite definido por el autor (2010) para este tipo de flujo (Ver Figura 4). Lo anterior, explica por qué el coeficiente de Hazen-Williams sugerido en este trabajo para este material permite cumplir con la presión mínima de diseño.

CONCLUSIONES

- Los coeficientes de Hazen-Williams sugeridos en la normativa colombiana no son correctos para el Acero y CCP, dado que estos valores tienden a sobrestimar las pérdidas por fricción y no tienen en cuenta la variabilidad que presenta dicho coeficiente en el comportamiento hidráulico de estas redes.
- A partir de los resultados obtenidos en la corrección de los coeficientes de Hazen-Williams, en especial para el Acero, CCP y GRP, se puede concluir que se logró tener en cuenta la variabilidad de estos y controlar hasta en un 5% las pérdidas por fricción para un rango específico de números de Reynolds y velocidades.
- Si se desea utilizar la ecuación de Hazen-Williams para el diseño de redes matrices para materiales como el Acero, CCP y GRP, se sugiere verificar si los factores de fricción obtenidos después de realizar la comprobación de diseño mediante la ecuación de Darcy-Weisbach se ubican en el FTHL en el diagrama de Moody, según el límite definido por el autor, a diferencia de lo establecido por Diskin y Liou.
- Teniendo en cuenta los efectos que tiene la variabilidad del coeficiente de Hazen-Williams en la estimación de las pérdidas por fricción en las redes de estudio, se sugiere utilizar en el diseño de las redes matrices la ecuación de Darcy-Weisbach, dado que ésta es físicamente basada, la cual se puede utilizar para cualquier fluido, rango de velocidades, diámetros y longitudes de tubería.

REFERENCIAS

- Barlow, J.F., and Markland, E.** (1975). "Converting the Hazen-Williams equation to the Colebrook function". *Water Power Dam Construction* , 331-334.
- Bombardelli & García M.**(2003). "Hydraulic Design of Large-Diameter Pipes". Recuperado 13 Marzo, 2010, de ascelibrary: [http://: www.ascelibrary.com](http://www.ascelibrary.com)
- Brown, G. O.** (2004). "The History of the Darcy-Weisbach equation for pipe flow resistance". Recuperado Marzo 4, 2010, de ascelibrary: <http://www.ascelibrary.org>
- Colebrook C.F.** (1939). "Turbulent Flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipes laws". *Proc. Institution Civil Engrs* , 393-422.
- Diskin, M.** (1960). The limits of applicability of the Hazen-Williams formula. *Houille Blanche* , 720-723.
- Flechas R.A.** (2010). *Efecto del uso de la Ecuación de Darcy-Weisbach vs la Ecuación de Hazen-Williams sobre los costos de diseños optimizados en acueductos, teniendo en cuenta la rugosidad de las tuberías, línea del gradiente hidráulico y temperatura*. Bogotá: Trabajo de Grado: Universidad de los Andes.
- Gardner Williams, A. H.** (1905). *Hydraulic tables: showing the loss of head due to the friction of water flowing in pipes, aqueducts, sewers, etc* (primera edición ed.). New York: Jhon Wiley & Sons.
- Jain, A. K., Mohan, D.M, and Khanna, P.** (1978). "Modified Hazen-Williams formula". *J. Environ. Eng. Div (ASCE)* , 137-146.
- Kamand, F. Z.** (1988). "Hydraulic Friction Factors for Pipe Flow". *ASCE* , 311-323.
- Liou, C. P.** (1998, septiembre). *Limitations and proper use of the Hazen-Williams equation*. Retrieved Marzo 5, 2010, from ascelibrary: <http://www.ascelibrary.com>
- Moody, L.** (1944). Friction factors for pipe flow. *Trans. ASME*. 671-684.
- Saldarriaga Valderrama, J. G.** (2007). *Hidráulica de tuberías: abastecimiento de agua, redes, riegos* . Bogotá, D.C.: Alfaomega: Uniandes.
- Vennard, J. K.** (1958). *Elementary Fluid Mechanics* (3rd ed.). New York: Wiley.