

Universidad de los Andes
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería de
Sistemas y Computación

Tesis de Maestría
Germán Villalba Fernández de Castro



Universidad
de los Andes

Asesora: Silvia Takahashi
Coasesor: Juan Saldarriaga
Jurado: Andrés Medaglia
Jurado: Rafael Gómez

**Algoritmos de optimización Combinatoria aplicados al diseño de
redes de distribución de agua potable**

Bogotá, Julio de 2004

TABLA DE CONTENIDO

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 1 | <i>Introducción</i> | 5 |
| 2 | <i>Justificación</i> | 8 |
| 3 | <i>Objetivos</i> | 9 |
| 3.1 | Objetivos Generales | 9 |
| 3.2 | Objetivos Específicos | 9 |
| 4 | <i>Hidráulica de Tuberías</i> | 10 |
| 4.1 | El flujo y el fluido | 10 |
| 4.1.1 | Tipos de flujo. | 10 |
| 4.1.2 | Flujo en Redes de Acueducto | 11 |
| 4.2 | El número de Reynolds | 11 |
| 4.3 | Ecuaciones del cálculo de pérdidas por fricción | 12 |
| 4.4 | Redes cerradas | 13 |
| 4.4.1 | Ecuaciones de conservación de masa..... | 13 |
| 4.4.2 | Ecuaciones de conservación de energía | 14 |
| 4.5 | Método del Gradiente | 14 |
| 4.6 | Software de Simulación Hidráulica | 19 |
| 4.6.1 | REDES 2004..... | 19 |
| 4.6.2 | EPANET 2..... | 20 |
| 5 | <i>Diseño de Acueductos</i> | 22 |
| 5.1 | Ejemplo de diseño por fuerza bruta | 23 |
| 5.2 | Definiciones | 23 |
| 5.3 | Descripción | 24 |
| 5.4 | Variables de entrada de una simulación hidráulica | 25 |
| 5.5 | Variables de salida de una simulación hidráulica | 26 |
| 5.6 | Variables de Entrada del diseño de redes de distribución de agua potable | 27 |
| 5.7 | Variables de Salida del diseño de redes de distribución de agua potable | 28 |
| 6 | <i>Modelo del problema</i> | 29 |
| 6.1 | Especificación del problema | 29 |
| 6.2 | Restricciones del problema | 29 |
| 6.2.1 | Restricciones Hidráulicas..... | 29 |
| 6.2.2 | Restricciones Comerciales | 30 |
| 6.3 | Complejidad del Problema | 31 |
| 6.3.1 | Definiciones | 32 |
| Definición 1 | | 32 |
| Definición 2 | | 32 |
| Definición 3 | | 32 |
| Definición 4 | | 32 |
| Definición 5 | | 32 |
| Definición 6 | | 32 |

| | |
|--|-----------|
| Definición 7 | 32 |
| Definición 8 | 32 |
| 6.4 Requerimientos No Funcionales | 33 |
| 6.5 Metodología de Solución | 33 |
| 7 <i>Criterios de diseño</i>..... | 34 |
| 7.1 Criterio Tradicional | 34 |
| 7.1.1 Ventajas del Criterio Tradicional..... | 34 |
| 7.1.2 Desventajas del Criterio Tradicional..... | 34 |
| 7.2 Criterio de I-Pia Wu (Tuberías en Serie) | 34 |
| 7.2.1 Ventajas del Criterio de Wu..... | 35 |
| 7.2.2 Desventajas del Criterio de Wu..... | 36 |
| 7.3 Criterio de Featherstone (Redes de Tuberías)..... | 36 |
| 7.3.1 Ventajas del Criterio de Featherstone | 37 |
| 7.3.2 Desventajas del Criterio de Featherstone | 37 |
| 8 <i>Superficie Óptima de Presiones (SOP)</i>..... | 38 |
| 8.1 Cálculo de Distancias | 39 |
| 8.1.1 Distancia Euclidea 2D..... | 39 |
| 8.1.2 Distancia Euclidea 3D..... | 40 |
| 8.1.3 Distancia Topológica | 40 |
| 8.2 Ecuaciones de caída de la LGH ideal..... | 40 |
| 8.2.1 Ecuación Lineal..... | 42 |
| 8.2.2 Ecuación Cuadrática | 43 |
| 8.2.3 Ecuación de una catenaria | 44 |
| 8.2.4 Ecuación de un segmento elíptico..... | 45 |
| 8.2.5 Ecuación de una campana Gaussiana..... | 46 |
| 8.2.6 Ecuación Recíproca | 47 |
| 8.3 Ventajas del diseño basado en la determinación de la superficie óptima de presiones | 48 |
| 8.4 Desventajas del diseño basado en la determinación de la superficie óptima de presiones..... | 48 |
| 9 <i>Programación por Restricciones</i> | 49 |
| 9.1 Principios de la Programación por Restricciones..... | 50 |
| 9.2 Ejemplo de PR “El problema de las N reinas” | 50 |
| 9.2.1 Restricciones del problema de las N Reinas..... | 51 |
| 9.2.2 Solución del problema de las N Reinas..... | 52 |
| 9.3 Ventajas de la Programación por Restricciones..... | 58 |
| 9.4 Desventajas de la Programación por Restricciones..... | 58 |
| • Dado que la programación por restricciones guía la búsqueda de la solución, es posible que no encuentre el óptimo global..... | 58 |
| 10 <i>Algoritmos Genéticos</i>..... | 59 |
| 10.1 Modificaciones al Algoritmo Genético Estándar..... | 61 |
| 10.1.1 Operador de Mutación..... | 61 |
| 10.1.2 Inclusión de modelo base | 61 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 10.2 | Ventajas del Algoritmo Genético | 61 |
| 10.3 | Desventajas del Algoritmo Genético | 61 |
| 11 | <i>Enumeración Exhaustiva</i> | 63 |
| 11.1 | Método de Codificación | 63 |
| 11.2 | Ventajas de la Enumeración exhaustiva | 64 |
| 11.3 | Desventajas de la Enumeración exhaustiva | 64 |
| 12 | <i>Esquema de solución</i> | 65 |
| 12.1 | Montaje del sistema de solución | 65 |
| 12.2 | Ejemplo de diseño de Red | 66 |
| 12.3 | Soluciones independientes | 67 |
| 12.3.1 | Soluciones con Superficie Óptima de Presiones (SOP) | 68 |
| 12.3.2 | Soluciones con Programación por Restricciones (PR) | 69 |
| 12.3.3 | Soluciones con Algoritmos Genéticos (AG) | 71 |
| 12.3.4 | Solución por Enumeración Exhaustiva | 73 |
| 12.4 | Soluciones cooperativas | 75 |
| 12.4.1 | Superficie óptima de presiones y Programación por Restricciones (SOP-PR) | 76 |
| 12.4.2 | Superficie Óptima de Presiones y Algoritmos Genéticos (SOP-AG) | 77 |
| 12.4.3 | Programación por restricciones y Algoritmos Genéticos (PR-AG) | 78 |
| 12.4.4 | Algoritmos Genéticos y Programación por Restricciones (AG-PR) | 80 |
| 12.4.5 | Superficie Óptima de Presiones, Programación por Restricciones y Algoritmos Genéticos (SOP-PR-AG) | 82 |
| 12.4.6 | Superficie Óptima de Presiones, Algoritmos Genéticos y Algoritmo de Programación por Restricciones (SOP-AG-PR) | 83 |
| 12.4.7 | Solución recomendada (Diseño Rápido) | 84 |
| 13 | <i>Ejemplos ilustrativos</i> | 85 |
| 13.1 | Red 67 Tubos | 85 |
| 13.1.1 | Red 67 Tubos topografía plana | 87 |
| 13.1.2 | Red 67 Tubos topografía | 90 |
| 14 | <i>Ejemplos de la literatura</i> | 96 |
| 14.1 | Red de Hanoi | 96 |
| 15 | <i>Análisis de Resultados</i> | 105 |
| 15.1 | Complejidad de los Algoritmos de Optimización Combinatoria | 105 |
| 15.1.1 | Complejidad de SOP (Superficie Óptima de Presiones) | 106 |
| 15.1.2 | Complejidad de PR (Programación por Restricciones) | 107 |
| 15.1.3 | Complejidad de AG (Algoritmos Genéticos) | 108 |
| 16 | <i>Conclusiones</i> | 109 |
| 17 | <i>Recomendaciones</i> | 112 |
| 18 | <i>Referencias</i> | 113 |

1 Introducción

El agua se conduce desde las fuentes hasta los consumidores a través de tuberías que se conectan formando sistemas de distribución.

Una red de distribución de agua potable está compuesta por elementos como tubos, tanques, embalses, bombas, válvulas, nodos, etc, los cuales son necesarios para llevar el agua desde las fuentes hasta los consumidores.

Es de vital importancia realizar diseños que puedan garantizar la calidad del servicio al llevar el agua a cada nodo con una presión adecuada. Sin embargo, el problema de diseño de redes de distribución de agua potable es bastante complicado debido a la relación no lineal entre el flujo y las pérdidas de cabeza (carga) y a la presencia de variables discretas dado que los diámetros de las tuberías solo pueden tener valores discretos según la disponibilidad del mercado. Adicionalmente, la función de costos de las tuberías también tiene una relación no lineal con los diámetros.

El objetivo del diseño de redes de distribución de agua potable consiste en determinar el tamaño de los diámetros de las tuberías de la red de tal manera que se puedan satisfacer las demandas con una presión adecuada.

De hecho se ha demostrado que este problema es de complejidad NP-DURO (Yates et. al. 1984)¹; lo cual quiere decir que es un problema intratable para el cual no se conoce ningún método determinístico para solucionarlo en un tiempo polinomial.

El diseño de redes de distribución de agua potable de mínimo costo se puede ver como un problema de optimización combinatoria en donde las variables de decisión son los diámetros de cada una de las tuberías de la red.

En esta investigación, se plantea realizar el diseño de redes de distribución de agua potable a través de varios métodos que se pueden usar independiente o conjuntamente para encontrar diseños factibles de bajo costo en un tiempo razonable.

Los algoritmos propuestos son los siguientes:

- Diseño basado en la superficie óptima de presiones
- Programación por restricciones
- Algoritmos genéticos.

¹ Referencial Yates, D.F., A.B. Templeman & T.B. Boffey (1984). "The computational complexity of the problem of determining least capital cost designs for water supply networks". Engg. Optimization, 7(2), 142-155.

La metodología propuesta consiste en ensamblar un sistema que pueda usar la salida de cada algoritmo para seguir mejorando los resultados. El proceso se puede continuar hasta encontrar resultados satisfactorios.

El desarrollo de la metodología se implementó en el programa REDES (Villalba 2004)² desarrollado en el Centro de Investigaciones y Acueductos – CIACUA de la Universidad de Los Andes y los resultados obtenidos en problemas conocidos en la literatura como el de la red de Hanoi se validaron en EPANET (Rossman 1993)³.

El resto de este documento está organizado así:

El capítulo 2 es la justificación de hacer este tipo de investigación, es decir por que es importante el desarrollo de metodologías para realizar el diseño de redes de distribución de agua potable.

En el capítulo 3 están los objetivos de esta investigación.

El capítulo 4 es una breve descripción de la hidráulica y las ecuaciones necesarias para la realización del análisis hidráulico de una red (simulación hidráulica).

El capítulo 5 es una descripción informal del problema del diseño de redes de distribución de agua potable.

En el capítulo 6 se hace una especificación más formal que en el capítulo anterior y se describen las restricciones a las que está sujeta la solución del problema.

El capítulo 7 muestra los criterios de diseño más usados para resolver el problema, así como sus ventajas, desventajas y su forma de aplicación.

Los capítulos 8, 9 y 10 describen los algoritmos usados en esta investigación para resolver el problema de diseño de redes de distribución de agua potable.

El capítulo 11 muestra el método de enumeración exhaustiva, el cual se usa para validar el resultado de los algoritmos descritos en los capítulos 8, 9 y 10.

El capítulo 12 describe como construir un sistema de diseño de redes de distribución de agua potable a partir de los resultados individuales de la aplicación de los algoritmos descritos en los capítulos 8, 9 y 10.

² Referencia3 Villalba , G.A. "REDES 2004: Manual del Usuario" (2004), Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados CIACUA, Universidad de Los Andes, Departamento de Ingeniería Civil.

³ Referencia 4 Rossman, L.A. "EPANET, Users Manual" (1993), Risk Reduction Engineering Laboratory, U.S. Environmental Protection Agency, Cincinnati, Ohio.

El capítulo 13 ilustra con ejemplos el proceso de solución del problema de diseño con la metodología desarrollada en esta investigación.

El capítulo 14 resuelve un problema conocido en la literatura como la red de Hanoi. Este ejemplo es muy importante porque permite comparar objetivamente los resultados de esta investigación con los obtenidos por otros investigadores.

En el capítulo 15 están las conclusiones de esta investigación y en el capítulo 16 están algunas sugerencias para investigaciones posteriores.

El capítulo 17 contiene las referencias bibliográficas más usadas para el desarrollo de esta investigación. En este documento se hace referencia a las mismas en el pie de página de algunas secciones.

2 Justificación

El diseño de redes de distribución de agua potable es un tema de gran interés debido a su importancia para la sociedad. Más aún, muchas de las redes de tuberías existentes han reducido notablemente su capacidad de transporte o simplemente no suministran la cantidad de agua necesaria o la presión es demasiado baja.

Los costos asociados a la instalación, expansión y mantenimiento de los sistemas de distribución de agua son muy altos y representan una parte significativa del presupuesto de mantenimiento de las ciudades y municipios.

En la actualidad, hay diversos métodos para realizar diseños de redes de distribución de agua potable. Muchos de ellos dependen en gran parte de la experiencia del diseñador en la implementación de técnicas empíricas para la selección de los diámetros de las tuberías. Esto resulta muchas veces en diseños que funcionan desde el punto de vista hidráulico. Sin embargo no son óptimos desde el punto de vista económico porque tienden a generar diámetros grandes con altas presiones, incrementando así los costos de las tuberías, sus accesorios y costos de mantenimiento causados por altas presiones que originan pérdidas de agua, así como daños en las líneas de conducción.

Este problema es de vital importancia en países como Colombia en donde una buena parte de la población no cuenta con acueducto y sus recursos económicos son muy limitados. Un buen diseño puede ser la diferencia entre ejecutar un proyecto de construcción de acueducto y no hacerlo.

3 Objetivos

3.1 Objetivos Generales

- Analizar, diseñar e implementar una metodología que permita el diseño de redes de distribución de agua potable basado en una heurística para incluir criterios de optimización económicos e hidráulicos.
- Establecer un marco de trabajo que permita incluir varias alternativas de solución al problema del diseño de acueductos.
- Encontrar un algoritmo que permita encontrar una aproximación al diseño óptimo de redes de distribución de agua potable en un tiempo polinomial.

3.2 Objetivos Específicos

- Desarrollar un modelo de solución del problema del diseño de redes de distribución de agua potable.
- Desarrollar una metodología de diseño con criterios de optimización hidráulica basados en la determinación de la superficie óptima de presiones.
- Desarrollar una metodología de diseño con criterios de optimización combinatoria basados en la implementación de un algoritmo de programación por restricciones.
- Extender la implementación de un algoritmo genético existente para mejorar su rendimiento y acelerar el proceso de convergencia de la solución.
- Establecer un protocolo de comunicación entre los resultados generados por cada uno de los algoritmos empleados, permitiendo incluir soluciones existentes en problemas conocidos en la literatura.
- Hacer una comparación objetiva de los resultados de esta investigación con las mejores soluciones propuestas por otros autores en investigaciones internacionales mediante ejemplos propuestos en la literatura.

4 Hidráulica de Tuberías⁴

Este capítulo describe brevemente los conceptos y ecuaciones hidráulicas necesarias para realizar una simulación hidráulica, teniendo en cuenta que durante el proceso de diseño de redes de distribución de agua potable es necesario realizar un gran número de simulaciones hidráulicas.

4.1 El flujo y el fluido

Un fluido es una sustancia que no presenta resistencia al esfuerzo cortante, razón por la cual el fluido se deforma en presencia de éste. Tal es el caso del agua que se conduce en las redes de distribución.

4.1.1 Tipos de flujo.

Los flujos se pueden clasificar respecto a su variación espacial en:

- Flujo uniforme: si la presión y la velocidad se mantienen constantes en la distribución espacial del flujo.
- Flujo no uniforme: si dichas características varían de un punto a otro en el espacio.

Respecto a su variación el tiempo se pueden clasificar en:

- Flujo permanente: si la presión y la velocidad se mantienen constantes en el tiempo.
- Flujo no permanente: si las características varían de un punto a otro en el tiempo.

Según esta clasificación: se pueden encontrar 4 tipos de flujo:

- Flujo uniforme permanente: si la presión y la velocidad se mantienen constantes en la distribución espacial del flujo y no varían en el tiempo.
- Flujo no uniforme permanente: las características varían de un punto a otro en el espacio, pero permanecen constantes en el tiempo.
- Flujo uniforme no permanente: si la presión y la velocidad se mantienen constantes en la distribución espacial del flujo y varían en el tiempo, este tipo de flujo no se presenta en la realidad debido a que una modificación en las

⁴ Para una explicación más completa revise la siguiente referencia:
Saldarriaga, J.G. "Hidráulica de Tuberías" (1998). Editorial McGrawHill, Bogotá, Colombia.

características del flujo implican un cambio instantáneo en todo el flujo, lo cual es imposible.

- Flujo no uniforme permanente, las características varían de un punto a otro en el espacio, y no permanecen constantes en el tiempo.

4.1.2 Flujo en Redes de Acueducto

En el diseño de tuberías se usa el primer tipo de flujo (uniforme permanente), porque sus características no cambian en el espacio ni en el tiempo. Esto implica que el fluido no es acelerado y por lo tanto se encuentra en equilibrio dinámico.

En las redes de distribución el flujo está a presión, por lo tanto existe un equilibrio entre las fuerzas de presión y gravitacionales, con las de fricción.

4.2 *El número de Reynolds*

Se define el número de Reynolds como un factor adimensional que relaciona las fuerzas inerciales con las fuerzas viscosas. Para el caso de tuberías se define como:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \text{ Ecuación 4-1}$$

donde:

- v es la velocidad media del flujo.
- d es el diámetro de la tubería.
- ν es la viscosidad cinemática del fluido.

Se ha encontrado que para $Re < 2000$ el flujo es laminar (el flujo se mueve en capas que se deslizan unas sobre otras), a medida que el Re aumenta el flujo se hace cada vez más turbulento.

De acuerdo con lo anterior, el flujo dentro de conductos cerrados puede ser laminar o turbulento de acuerdo con el número de Reynolds.

En el flujo laminar las fuerza viscosas son más importantes que las fuerzas inerciales, el flujo se desplaza en láminas que se deslizan unas sobre otras sin mezclarse.

En el flujo turbulento, las fuerzas inerciales, son más importantes que las fuerzas viscosas, las partículas del fluido se mezclan unas con otras con movimientos aleatorios. Este tipo de fluido es más general que el laminar en las redes de distribución debido a las características del fluido (agua) y a las velocidades que se presentan en los sistemas de distribución.

Existen 3 tipos de flujo turbulento:

- Flujo turbulento Hidráulicamente liso.
- Flujo turbulento Hidráulicamente rugoso.
- Flujo en transición.

4.3 Ecuaciones del cálculo de pérdidas por fricción

La ecuación más general que describe las pérdidas por fricción es la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Ecuación 4-2}$$

en donde f es el factor de fricción.

Se sabe que para una tubería de sección circular

$$v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} \text{ Ecuación 4-3}$$

Por lo tanto:

$$h_f = f \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\left(\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} \right)^2}{2g} \text{ Ecuación 4-4}$$

$$h_f = 8 \cdot f \cdot \frac{l}{d} \cdot \left(\frac{Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g} \right) \text{ Ecuación 4-5}$$

De igual manera las pérdidas menores se pueden calcular de la siguiente manera:

$$h_m = k_m \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Ecuación 4-6}$$

$$h_m = k_m \cdot \left(\frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g} \right) \text{ Ecuación 4-7}$$

Para flujo laminar:

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \text{ Ecuación 4-8}$$

Para flujo turbulento:

La ecuación más general para describir el factor de fricción es la de flujo transicional (Colebrook-White):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log_{10} \left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \text{ Ecuación 4-9}$$

Las anteriores ecuaciones permiten relacionar las pérdidas de energía específica (cabeza) por fricción con el caudal que viaja por una tubería, éste es el fundamento del análisis y diseño de redes de distribución.

4.4 *Redes cerradas*

Una red de distribución cerrada es aquella en la cual las tuberías están ordenadas de tal forma que se cierran formando circuitos.

En las redes existen dos tipos de ecuaciones:

4.4.1 Ecuaciones de conservación de masa

Para cada nodo (unión) de la red hay una ecuación de conservación de masa (continuidad). La suma de los caudales que entran en el nodo es igual a la suma de los caudales que salen de él.

$$\sum_{j \in i} Q_{ij} + Q_i = 0 \text{ Ecuación 4-10}$$

Para $i = 1, \dots, n$ y j es un nodo vecino de i .

donde :

Q_{ij} = caudal que va del nudo j al i .

Q_i = caudal que entra o sale al nudo. (consumo o alimentación).

4.4.2 Ecuaciones de conservación de energía

Relacionan las pérdidas por fricción con el caudal que pasa por ese tubo, para cada tubo hay una ecuación de conservación de energía.

Al usar la metodología físicamente basada y comprobada experimentalmente de Darcy-Weisbach en conjunto con la ecuación de Colebrook-White, se pueden usar las siguientes ecuaciones:

$$h_{f_{ij}} = \left(\frac{8f_{ij} \cdot l_{ij}}{\pi^2 g \cdot d_{ij}^5} \right) Q_{ij}^2 \quad \text{Ecuación 4-11}$$

$$h_{f_{ij}} = a_{ij} \cdot Q_{ij}^2 \quad \text{Ecuación 4-12}$$

donde a_{ij} es una constante de la tubería ij .

$$a_{ij} = \left(\frac{8f_{ij} \cdot l_{ij}}{\pi^2 g \cdot d_{ij}^5} \right) \quad \text{Ecuación 4-13}$$

El uso de estas ecuaciones conduce a un sistema de ecuaciones no lineales que puede ser resuelto por algún método iterativo.

Uno de los mejores métodos es el del gradiente, el cual es usado por el programa "REDES" para el análisis y por lo tanto para el diseño de las redes.

4.5 Método del Gradiente

Una simulación hidráulica implica el cálculo de los caudales en cada una de las tuberías de la red y las presiones en cada uno de los nodos, para lo cual hay que resolver un sistema de ecuaciones no-lineales que puede ser resuelto por algún método iterativo.

El análisis de una red de tuberías se puede resolver como un sistema de N ecuaciones simultaneas altamente no lineales, con N incógnitas, (N puede ser el número de nodos o el número de tubos según el planteamiento del problema.) pero en los casos prácticos el sistema tiene un número tan elevado de incógnitas que se han desarrollado metodologías específicas para resolver este problema, el más exitoso es el método del gradiente⁵.

⁵ Saldarriaga, J.G. "Hidráulica de Tuberías" (1998). Editorial McGrawHill, Bogotá, Colombia.

A continuación se realizan algunas definiciones:

Forma general de la ecuación de resistencia:

$$h_f = \alpha Q^n + \beta Q + \gamma$$

Ecuación 4-14 Forma general de la ecuación de resistencia

donde

n : Exponente que depende de la ecuación de fricción utilizada (2.0 para el caso de Darcy - Weisbach)

α, β, γ : Parámetros característicos del tubo, la válvula y las bombas

NT : Número de tuberías de la red

NN : Número de nodos con cabeza piezométrica desconocida

[A12] : “Matriz de conectividad” asociada a cada uno de los nodos de la red. Su dimensión es NT X NN con sólo dos elementos diferentes de cero en cualquier fila. Se pone -1 en la columna correspondiente al nodo inicial del tramo i y 1 en la columna correspondiente al nodo final del tramo i

NS : Número de nodos de cabeza fija o conocida

[A10] : Matriz topológica tramo a nodo para los NS nodos de cabeza fija. Su dimensión es NT X NS con un valor igual a -1 en las filas correspondientes a los tramos conectados a nodos de cabeza fija

[Q] : Vector columna de los caudales en los tubos

[H] : Vector columna de las cabezas en los nodos

[Ho] : Vector columna de las cabezas en las fuentes

[A11] : Matriz diagonal de NT X NT. En cada i-ésimo valor en la diagonal, tiene la Ecuación 4-14 para el tubo i, dividida entre Q.

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 Q_1^{n_1-1} + \beta_1 + \frac{\gamma_1}{Q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{NT} Q_{NT}^{n_{NT}-1} + \beta_{NT} + \frac{\gamma_{NT}}{Q_{NT}} \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-15 [A11]

- [A21] : Matriz transpuesta de [A12]
- [q] : Vector de consumo (demanda) o de entrada (oferta) en cada nodo de la red, con dimensión $NT \times 1$
- [N] : Matriz diagonal n_1, n_2, \dots, n_{NT} , con dimensión $NT \times NT$
- [A11]' : Matriz con dimensión $NT \times NT$. En cada i -ésimo valor en la diagonal, tiene el primer término de la Ecuación 4-14 para el tubo i , dividido entre Q

$$[A_{11}]' = \begin{bmatrix} \alpha_1 Q_1^{n_1-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{NT} Q_{NT}^{n_{NT}-1} \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-16 [A11]'

[A11][Q] da un vector columna con la energía consumida en cada tubo

[A12][H] da un vector columna de la resta de la energía en el nodo final menos la energía en el nodo inicial de los tubos

[A11][Q] + [A12][H] da para cada tubo la diferencia D . Este valor debe ser igual a cero para los tubos que no están conectados a las fuentes. Debe ser la cabeza estática de la fuente para tubos conectados a fuentes, multiplicada por -1.

[A10][Ho] da para todos los tubos, la cabeza de la fuente que tienen conectada. Si el tubo no está conectado a una fuente, el valor es cero.

Entonces, la ecuación de conservación de energía en forma matricial se puede escribir de la siguiente manera:

$$[A11][Q] + [A12][H] = -[A10][H_0]$$

Ecuación 4-17 Forma matricial de la ecuación de conservación de energía

$[A21][Q]$ da para cada nodo, la suma de caudales que entran y salen. Debe ser 0 para caudales sin demanda y el valor demandado para los que lo tienen.

La ecuación de conservación de masa en forma matricial se puede de la siguiente manera:

$$[A21][Q] = [q]$$

Ecuación 4-18 Forma matricial de la ecuación de conservación de masa

La Ecuación 4-17 y la Ecuación 4-18 se pueden escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Q] \\ [H] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[A_{10}][H_0] \\ [q] \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-19 Ecuaciones de conservación compactas

El método del gradiente consiste en utilizar una expansión truncada de Taylor para resolver la Ecuación 4-19, ya que su parte superior es no lineal. Al aplicar simultáneamente el operador gradiente sobre las ecuaciones de masa y de energía, se obtiene la Ecuación 4-20.

$$\begin{bmatrix} [N][A_{11}]' & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [dQ] \\ [dH] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [dE] \\ [dq] \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-20 Derivada

Para cada iteración, el error en la energía actual para cada tubo está representado por $[dE]$. El error en el caudal para cada nodo está representado por $[dq]$. $[dE]$ se puede obtener de la Ecuación 4-17 de donde, $[dE]$ se hace 0 solo si la energía final más la gastada en el tubo se hace igual a la final.

$$[dE] = [A11][Q_i] + [A12][H_i] + [A10][H_0]$$

Ecuación 4-21 Error en la energía en los tubos

$[dq]$ se puede obtener de la Ecuación 4-18 de donde, $[dq]$ se hace 0 solo si la suma de caudales que entran o salen al nodo es igual a la demanda.

$$[dq] = [A_{21}][Q] - [q]$$

Ecuación 4-22 Error en la masa en los nodos

Entre iteraciones sucesivas:

$$[dQ] = [Q_{i+1}] - [Q_i]$$

$$[Q_{i+1}] = [Q_i] + [dQ]$$

Ecuación 4-23 Caudales en siguiente iteración

$$[dH] = [H_{i+1}] - [H_i]$$

$$[H_{i+1}] = [H_i] + [dH]$$

Ecuación 4-24 Cabezas en siguiente iteración

Entonces, con la Ecuación 4-23 y la Ecuación 4-24 se pueden encontrar las cabezas y caudales para cualquier iteración, a partir de los valores de la iteración anterior (o los supuestos, en caso de ser la primera iteración) y de la corrección generada por cada iteración ($[dQ]$ y $[dH]$). Esta corrección se obtiene de la Ecuación 4-20 al despejar $[[dQ]$
 $[dH]]$:

$$\begin{bmatrix} [dQ] \\ [dH] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [N][A_{11}]' & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [0] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [dE] \\ [dq] \end{bmatrix}$$

Donde $[dE]$ se obtiene de la Ecuación 4-21 y $[dQ]$ se obtiene de la Ecuación 4-22. El sistema que se desea resolver se convierte en:

$$\begin{bmatrix} [dQ] \\ [dH] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [N][A_{11}]' & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [0] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [[A_{11}][Q_i] + [A_{12}][H_i] + [A_{10}][H_o]] \\ [[A_{21}][Q_i] - [q]] \end{bmatrix}$$

Ecuación 4-25 Sistema para encontrar las correcciones en caudal y energía para la siguiente iteración

Reemplazando la solución de la Ecuación 4-25 en la Ecuación 4-23 y en la Ecuación 4-24, se llega a:

$$[H_{i+1}] = \{[A_{21}](N)[A_{11}]'\}^{-1} [A_{12}] \{[A_{21}](N)[A_{11}]'\}^{-1} ([A_{11}][Q_i] + [A_{10}][H_o]) - ([A_{21}][Q_i] - [q]) \}$$

$$[Q_{i+1}] = \{[1] - (N^{-1})[A_{11}]'\}^{-1} [A_{11}][Q_i] - \{(N)[A_{11}]'\}^{-1} ([A_{12}][H_{i+1}] + [A_{10}][H_o]) \}$$

4.6 Software de Simulación Hidráulica

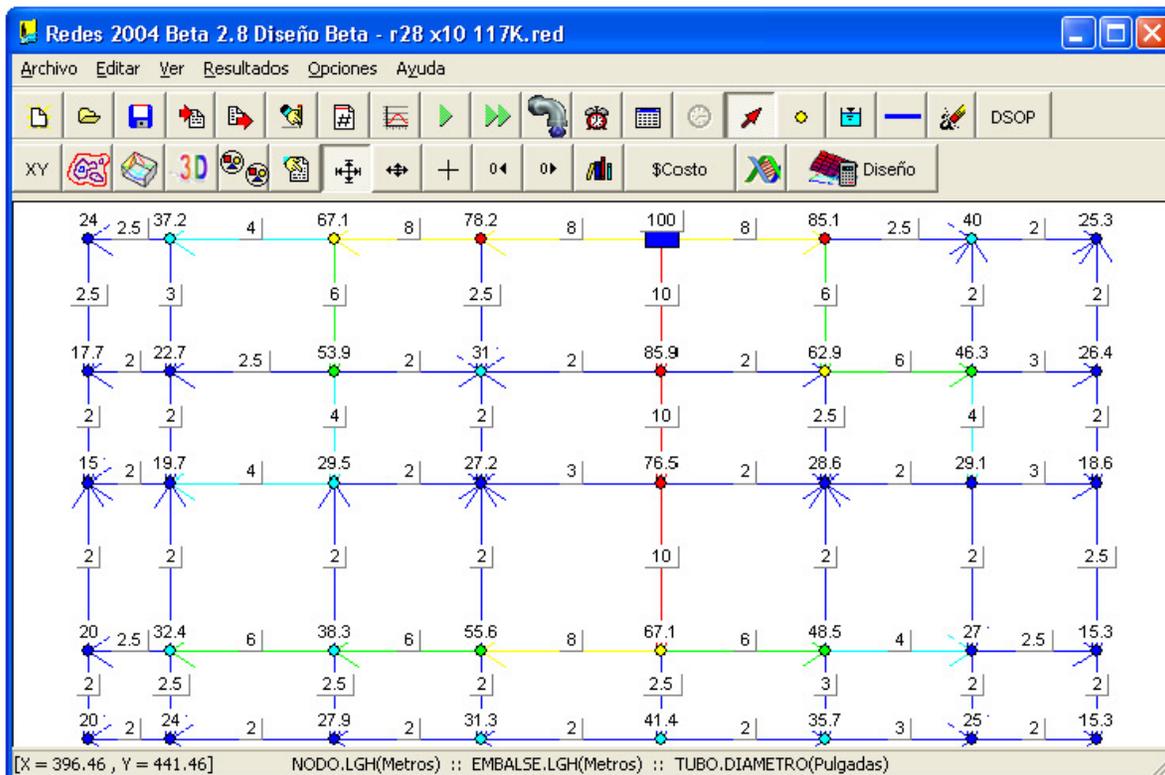
Esta sección contiene una breve descripción de los paquetes computacionales usados para la ejecución de las simulaciones hidráulicas necesarias para realizar el diseño de una red de distribución de agua potable.

4.6.1 REDES 2004

El programa REDES 2004⁶ es un software de simulación hidráulica estática y en periodo extendido y de calidad del agua, además cuenta con métodos de calibración.

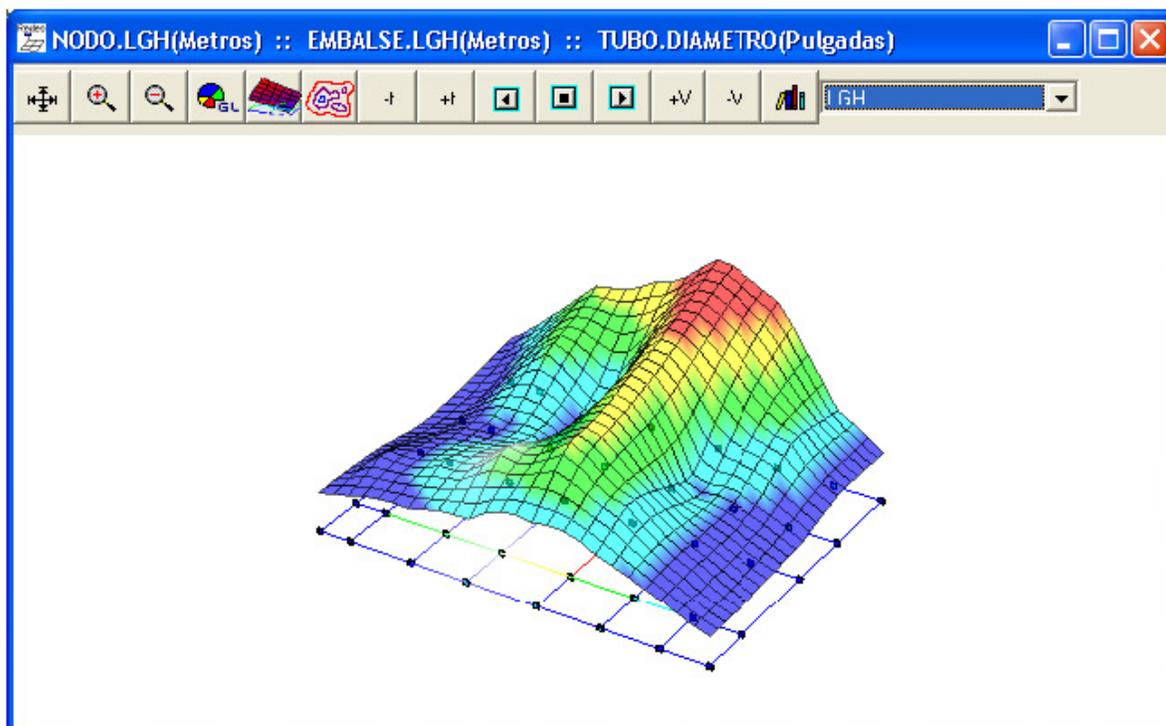
El resultado de esta investigación es la implementación del módulo de diseño que integra los 3 algoritmos desarrollados.

El programa REDES se ha venido desarrollando en el Centro de Investigaciones y Alcantarillados de la Universidad de Los Andes – CIACUA por más de 15 años bajo la dirección del ingeniero Juan Saldarriaga. Entre los años 2002-2004 el desarrollo ha estado a cargo del autor de esta investigación.



Gráfica 4-1 Ventana principal del programa REDES 2004

⁶ Referencia 3 Villalba, G.A. "REDES 2004: Manual del Usuario" (2004), Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados CIACUA, Universidad de Los Andes, Departamento de Ingeniería Civil.



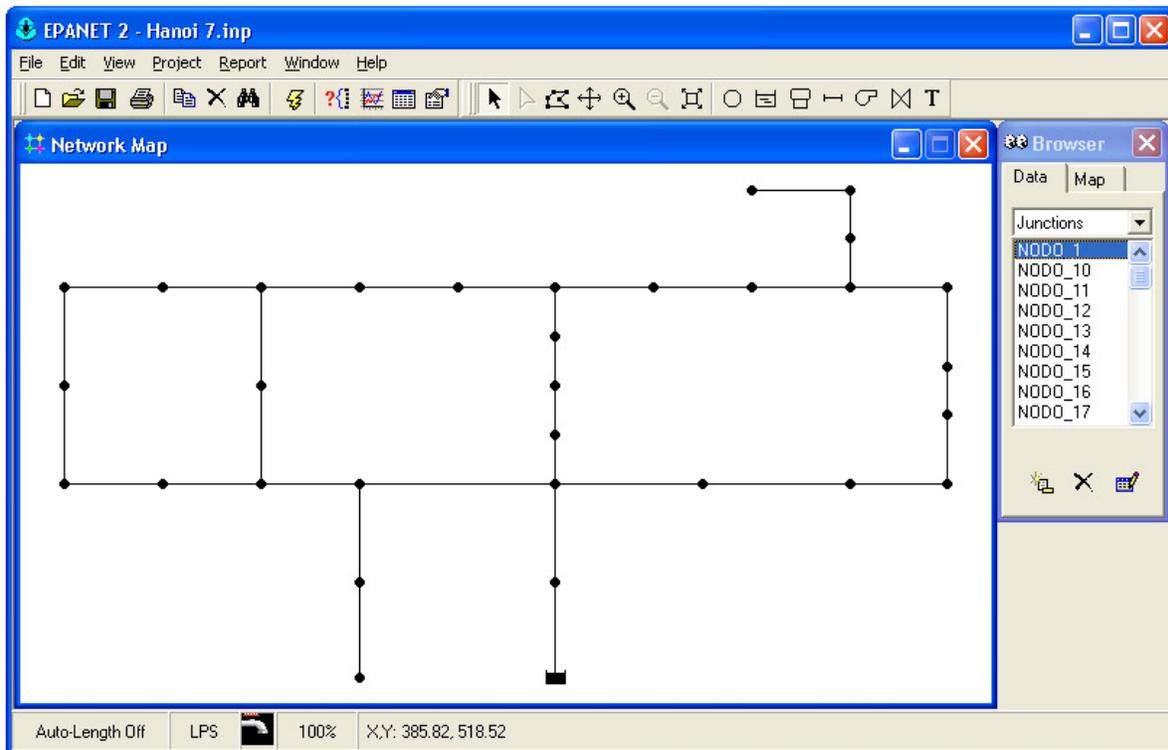
Gráfica 4-2 Ventana de visualización se superficies 3D del programa REDES 2004

4.6.2 EPANET 2

El programa EPANET 2⁷ es un software de simulación hidráulica ampliamente usado en todo el mundo. Este programa se ha convertido en un estándar y por eso se ha usado en esta investigación con el fin de establecer una comparación objetiva entre los resultados obtenidos en esta y en otras investigaciones.

EPANET ha sido desarrollado por Rossman en la agencia de protección ambiental de los Estados Unidos (Environmental Protection Agency –EPA).

⁷ 4 Rossman, L.A. "EPANET, Users Manual" (1993), Risk Reduction Engineering Laboratory, U.S. Environmental Protection Agency, Cincinnati, Ohio.



Gráfica 4-3 Ventana principal de EPANET 2

5 *Diseño de Acueductos*

A diferencia del análisis de una red de tuberías, al realizar el diseño de la red, no se conocen los diámetros de cada una de las tuberías de la red.

El problema de diseñar redes de distribución de agua potable consiste en determinar el diámetro que debe tener cada una de las tuberías de una red de distribución de agua potable, de tal manera que se satisfagan ciertas restricciones (presión mínima en los nodos, calidad del agua en las tuberías, satisfacción de las demandas en los nodos, etc), es un problema combinatorio, dado que cada uno de los diámetros de las tuberías representan una variable que puede tomar un valor discreto basada en un conjunto de diámetros comerciales.

Cada vez que se tenga una hipótesis de diámetros hay que realizar un análisis de la red para probar que se cumplen las restricciones.

Hay muchas combinaciones de diámetros que cumplen con las restricciones, entonces el problema de optimización consiste en encontrar una combinación que satisface las restricciones optimizando múltiples criterios. Los criterios más importantes son los siguientes:

1. Minimizar los costos constructivos.
2. Minimizar las fugas de agua (minimizar el costo asociado al agua que se fuga en un periodo de tiempo).
3. Maximizar la calidad del agua en la red (minimizar el tiempo de retención del agua en la tuberías).

Una base de diámetros comerciales común es la siguiente (en pulgadas):

| Base de Diámetros | | | |
|--------------------------|-----------------|---------------|-----------------|
| Índice | Diámetro | Índice | Diámetro |
| - | Pulgadas | - | Pulgadas |
| 1 | 2 | 11 | 18 |
| 2 | 2.5 | 12 | 20 |
| 3 | 3 | 13 | 24 |
| 4 | 4 | 14 | 30 |
| 5 | 6 | 15 | 36 |
| 6 | 8 | 16 | 42 |
| 7 | 10 | 17 | 48 |
| 8 | 12 | 18 | 60 |
| 9 | 14 | 19 | 72 |
| 10 | 16 | | |

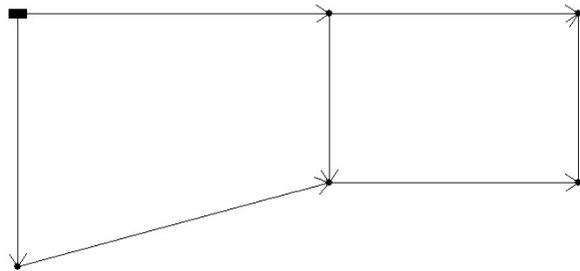
Tabla 5-1 Ejemplo de Base de Diámetros

Esta base tiene 19 diámetros posibles. Una red normal puede tener cientos o miles de tuberías, por eso el problema puede ser demasiado engorroso dada la cantidad de posibilidades, además para cada combinación de diámetros hay que correr la hidráulica de la red (análisis de la red), este problema es relativamente complejo y para redes grandes una sola corrida puede tomar un tiempo considerable.

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra la imposibilidad de resolver este problema por fuerza bruta.

5.1 Ejemplo de diseño por fuerza bruta

Una red de tuberías conecta un embalse con 6 nodos de consumo, la red esta compuesta por 7 tuberías.



Gráfica 5-1 - Ejemplo de Red de Distribución (7 Tuberías)

Para diseñar esta red con la base de diámetros comerciales vista anteriormente se requiere probar 19^7 combinaciones, lo que son aproximadamente 894 millones de posibilidades con igual número de simulaciones hidráulicas, si el algoritmo⁸ se demora 16 milisegundos en correr la hidráulica una vez, tomaría más de 165 días de computo continuo, lo cual ilustra la necesidad de emplear algún método para obtener una solución óptima o cercana al óptimo.

5.2 Definiciones

A continuación se hacen algunas definiciones necesarias para la comprensión del problema.

- **Nodo:** Un punto en el espacio en donde se ejerce la demanda de agua (Volumen/Tiempo).
- **Embalse:** Un punto en el espacio capaz de suministrar una cantidad infinita de agua con una cabeza hidráulica constante conocida (Línea de Gradiente Hidráulico constante).

⁸ Con el programa "Redes 2003" desarrollado en la Universidad de los Andes.

- Tubo: Elemento físico que sirve de unión entre los nodos y los embalses.
- Red: Conjunto formado por nodos y embalses unidos por los tubos correspondientes.

5.3 Descripción

El diseño de una red de distribución de agua potable consiste en determinar el diámetro que debe tener cada una de las tuberías que componen la red de manera que sea posible llevar el agua desde las fuentes hasta cada nodo de la red manteniendo una presión por encima de una presión mínima que se determina según las normas técnicas o el criterio del diseñador.

Para diseñar una red es necesario conocer las coordenadas X, Y y Z de cada uno de los nodos, así como el caudal demandado en cada uno de ellos, la LGH (línea de gradiente hidráulico) de cada una de las fuentes de la red, la conectividad entre los nodos de la red (a través de tubos) y las características físicas de las tuberías (longitud, rugosidad, coeficiente de pérdidas menores, etc).

Este problema se ha resuelto tradicionalmente por ensayo y error orientado por la experiencia del diseñador. De esta manera, es posible encontrar una solución factible al problema; sin embargo, este método no tiene ningún criterio de optimización económico, lo cual lleva a diseños funcionales desde el punto de vista hidráulico pero con unos costos bastante elevados.

Una red de distribución de agua potable está compuesta por una serie de elementos físicos como nodos y embalses que están conectados entre si mediante tuberías, a través de las cuales fluye determinado caudal de agua. Cada nodo tiene un caudal demandado asociado, el cual determina el caudal que fluye por cada tubería; la magnitud y el sentido del flujo en conjunto con las características físicas de las tuberías determinan la caída de la línea de energía del agua LGH (línea de gradiente hidráulico) entre la fuente y cada uno de los nodos.

5.4 Variables de entrada de una simulación hidráulica

A continuación se muestra una tabla con las variables necesarias para el cálculo de una simulación hidráulica.

| Variables de Entrada | | | |
|----------------------|----------------------------------|---|-------------------------------|
| Tipo | Nombre | Descripción | Dimensión |
| Nodos | X | Coordenada X del nodo | Longitud |
| | Y | Coordenada Y del nodo | Longitud |
| | Z | Coordenada Z del nodo (Elevación) | Longitud |
| | Demanda | Caudal demandado en ese nodo. | Longitud ³ /Tiempo |
| Fuentes | X | Coordenada X de la fuente | Longitud |
| | Y | Coordenada Y de la fuente | Longitud |
| | Z | Coordenada Z de la fuente (Elevación) | Longitud |
| | LGH | Elevación de la línea piezométrica del agua. | Longitud |
| Tubos | Unión Inicial | Identificador de la unión (nodo o fuente) inicial del tubo. | Adimensional |
| | Unión Final | Identificador de la unión (nodo o fuente) final del tubo. | Adimensional |
| | Longitud | Longitud del tubo. | Longitud |
| | Diámetro | Diámetro interno real del tubo. | Longitud |
| | Rugosidad | Rugosidad de la pared interna del tubo. | Longitud |
| | Coefficiente de pérdidas menores | Suma de los coeficientes de pérdidas menores en el tubo. | Adimensional |

Tabla 5-2 Variables de Entrada en una Simulación Hidráulica

5.5 Variables de salida de una simulación hidráulica

Las variables calculadas en una simulación hidráulica se muestran en la siguiente tabla.

| Variables de Salida | | | |
|---------------------|----------------------|---|--------------------------------------|
| Tipo | Nombre | Descripción | Dimensión |
| Nodos | LGH | Línea de Gradiente Hidráulico del Nodo | Longitud |
| | Presión ⁹ | Presión en el nodo. | Masa/(Longitud*Tiempo ²) |
| Fuentes | Demanda | Suma se los Caudales demandados en esa fuente. | Longitud ³ /Tiempo |
| Tubos | Caudal | Caudal que fluye en ese tubo. | Longitud ³ /Tiempo |
| | Velocidad | Velocidad del flujo en el tubo. | Longitud |
| | Pérdidas Totales | Perdidas de energía producto de la fricción entre el flujo y la pared de la tubería más las pérdidas menores. | Longitud |

Tabla 5-3 Variables de Salida de una Simulación Hidráulica

⁹ Normalmente esta variable se da en MCA (Metros Cabeza de Agua)

5.6 Variables de Entrada del diseño de redes de distribución de agua potable

A continuación se muestra una tabla con las variables necesarias para el diseño de una red de distribución de agua potable. Se resaltan las variables propias del proceso de diseño.

| Variables de Entrada | | | |
|----------------------|----------------------------------|---|---|
| Tipo | Nombre | Descripción | Dimensión |
| Nodos | X | Coordenada X del nodo | Longitud |
| | Y | Coordenada Y del nodo | Longitud |
| | Z | Coordenada Z del nodo (Elevación) | Longitud |
| | Pmin | Presión mínima de diseño. | Masa/(Longitud*Tiempo²) |
| | Demanda | Caudal demandado en ese nodo. | Longitud ³ /Tiempo |
| Fuentes | X | Coordenada X de la fuente | Longitud |
| | Y | Coordenada Y de la fuente | Longitud |
| | Z | Coordenada Z de la fuente (Elevación) | Longitud |
| | LGH | Elevación de la línea piezométrica del agua. | Longitud |
| Tubos | Unión Inicial | Identificador de la unión (nodo o fuente) inicial del tubo. | Adimensional |
| | Unión Final | Identificador de la unión (nodo o fuente) final del tubo. | Adimensional |
| | Longitud | Longitud del tubo. | Longitud |
| | Diámetros Disponibles | Lista de los diámetros comerciales disponibles. | |
| | Rugosidad | Rugosidad de la pared interna del tubo. | Longitud |
| | Coefficiente de pérdidas menores | Suma de los coeficientes de pérdidas menores en el tubo. | Adimensional |

Tabla 5-4 Variables de Entrada en el diseño de una red de distribución de agua potable

5.7 Variables de Salida del diseño de redes de distribución de agua potable

Las variables calculadas en el diseño de una red de distribución de agua potable es el diámetro de cada una de las tuberías de la red, para lo cual se deben hacer varias simulaciones hidráulicas.

| Variables de Salida | | | |
|---------------------|------------------|---|--------------------------------------|
| Tipo | Nombre | Descripción | Dimensión |
| Nodos | LGH | Línea de Gradiente Hidráulico del Nodo | Longitud |
| | Presión | Presión en el nodo. | Masa/(Longitud*Tiempo ²) |
| Fuentes | Demanda | Suma se los Caudales demandados en esa fuente. | Longitud ³ /Tiempo |
| Tubos | Caudal | Caudal que fluye en este tubo. | Longitud ³ /Tiempo |
| | Velocidad | Velocidad del flujo en el tubo. | Longitud |
| | Pérdidas Totales | Perdidas de energía producto de la fricción entre el flujo y la pared de la tubería más las perdidas menores. | Longitud |
| | Diámetro | El diámetro interno real de la tubería. | Longitud |

Tabla 5-5 Variables de Salida en el diseño de una red de distribución de agua potable

6 Modelo del problema

6.1 Especificación del problema

El diseño de redes de distribución de agua potable se puede modelar como problema de optimización combinatoria en donde las variables de decisión son los diámetros de cada una de las tuberías de la red. El problema consiste en determinar un conjunto de diámetros tal que se minimice una función de costo sujeta a restricciones hidráulicas, comerciales, etc. Se puede especificar de la siguiente manera:

Se quiere minimizar la función de costos:

$$C = \sum_{i=1}^{Nt} K \cdot L_i \cdot D_i^x$$

Ecuación 6-1

donde C es el costo total asociado al valor comercial de las tuberías, Nt es el número de tubos de la red, Li es la longitud de la i-ésimo tubo de la red, K y x son parámetros que se determinan por regresión según la tabla de costos de determinado fabricante en función del diámetro, Di es el diámetro del i-ésimo tubo de la red.

Los parámetros K y x no tienen un significado físico relevante, son solamente valores que relacionan el costo con los parámetros físicos longitud y diámetro del tubo.

La

Ecuación 6-1 se encuentra sujeta a algunas restricciones que se describen a continuación.

6.2 Restricciones del problema

El problema de diseño de redes de distribución de agua potable está sujeta a una serie de restricciones que debe cumplir la solución del mismo para que se considere válida. Además el proceso de solución debe poder encontrar soluciones cercanas a la mejor solución en un tiempo razonable. Las restricciones son las siguientes:

6.2.1 Restricciones Hidráulicas

- Conservación de Masa
El caudal que entra en un nodo menos el caudal que sale de él debe ser igual al caudal demandado en ese nodo:

$$\sum_{i=1}^{N_{tj}} Q_{ij} = q_j \quad \text{Ecuación 6-2}$$

en donde N_{tj} es el número de tubos conectados al nodo j , Q_{ij} es el caudal en el tubo que va de la unión i a la unión j (incluye el signo), q_j es el caudal demandado en el j -ésimo nodo de la red, para j que pertenece al intervalo $[1, N_n]$ en donde N_n es el número de nodos de la red.

- **Conservación de Energía**

La suma de las pérdidas de energía en cualquier circuito debe ser igual a cero o a la energía suministrada por una bomba si hay alguna:

$$\sum_{i=1}^{N_c} hf_i + hm_i = E_{bomba_i} \quad \text{Ecuación 6-3}$$

en donde N_c es el número de circuitos en la red, i es el i -ésimo circuito de la red, hf_i es la suma de la pérdida de energía debida a la fricción del agua con las paredes de los tubos del i -ésimo circuito, hm_i son la pérdidas menores de energía producida por elementos en los tubos (codos, etc) en el i -ésimo circuito, E_{bomba_i} es la energía suministrada por las bombas en ese circuito (normalmente no hay bombas y este valor es cero).

- **La presión en cada nodo debe ser mayor a un valor dado. (Variable de entrada).**

Cada uno de los nodos de la red debe tener una presión superior a una presión mínima dada:

$$Min(P_i) \succ P_{min} \quad \text{Ecuación 6-4}$$

donde P_i es la presión en el i -ésimo nodo de la red, i pertenece al intervalo $[1, N_n]$, donde N_n es el número de nodos de la red, P_{min} es un parámetro de diseño que es conocido.

6.2.2 Restricciones Comerciales

Los diámetros solo pueden tomar valores discretos dados por la disponibilidad de diámetros de cada fabricante de tuberías. Se puede expresar de la siguiente manera:

$$D_i \in CD_{com} \quad \text{Ecuación 6-5}$$

i pertenece al intervalo $[1, N_t]$, donde N_t es el número de tubos de la red.

D_i es el diámetro del i -ésimo tubo. CD_{com} es el conjunto de los diámetros comerciales disponibles para determinado fabricante de tuberías.

Se ha demostrado que la solución de este problema con todas estas restricciones es un problema **NP-DURO** (Yates et. al. 1984). Las restricciones hidráulicas de conservación de masa y de conservación de energía, pueden ser manejadas por un motor de cálculo hidráulico (como el programa REDES o EPANET). La restricción de presión mínima depende del conjunto de diámetros que se está probando.

La restricción comercial se maneja al permitir únicamente que los resultados del método sean los diámetros comerciales que son parámetros de entrada (es posible trabajar con valores continuos en algunas etapas del proceso de diseño, pero los resultados finales son diámetros comerciales que pertenecen al conjunto de los que se especificaran como parámetros de entrada).

6.3 Complejidad del Problema

Se ha gastado una cantidad considerable de esfuerzo en la solución de problemas de diseño de redes de distribución de agua potable con variables discretas y se han sugerido varias formas de abordar el problema. Estas formas se pueden clasificar en 2 clases: **C₁** y **C₂**.

La clase **C₁** está compuesta de aquellas aproximaciones en las cuales se reduce el problema a la solución de una secuencia de problemas de programación lineal¹⁰. La reducción se hace asumiendo que la sección de un tubo entre 2 nodos adyacentes esta hecha de N sub-secciones, con la j-ésima sub-sección teniendo el más grande de los N diámetros comerciales.

La clase **C₂** contiene las aproximaciones que asumen que la sección entre 2 nodos adyacentes es uniforme, es decir solo tiene 1 diámetro.

El desarrollo de la solución de esta investigación pertenece a la clase C2, pues es la forma natural de modelar el problema sin tener que dividir el tubo en secciones ficticias que no representan la naturaleza del mismo.

Los problemas que pertenecen a la clase **C₂** no pueden ser solucionados exactamente por ningún método conocido (exceptuando la enumeración exhaustiva o fuerza bruta).

A continuación se harán algunas definiciones para precisar la dimensión del problema (usadas por Horowitz y Sahni¹¹).

¹⁰ En la Referencia 1 (Yates, D.F., A.B. Templeman & T.B. Boffey (1984). "The computational complexity of the problem of determining least capital cost designs for water supply networks". Engg. Optimization, 7(2), 142-155.) se hace referencia a los trabajos de Alperovits y Shamir, Kally.

¹¹ Referencia 2 Horowitz E., Sahni S.J. "Fundamentals of computer Algorithms". Computer Science Press. (1978).

6.3.1 Definiciones

Definición 1

Un algoritmo determinístico es aquel en el cual cada operación esta únicamente definida.

Definición 2

Un algoritmo no-determinístico es aquel en el cual cada operación no está únicamente definida, pero es una de un conjunto de posibilidades. {Esto implica que el algoritmo debe escoger una salida para ciertas operaciones. Sin embargo, se puede considerar que el algoritmo evalúa todas las posibles salidas y escoge una correcta, si esta existe}.

Definición 3

Un problema de decisión es un problema para el cual hay una o dos posibles soluciones correspondientes a los valores "falso" o "verdadero".

Definición 4

Un algoritmo de tiempo polinomial es aquel cuyo tiempo de ejecución (el número de operaciones de bits elementales hechas en una cadena de entrada de longitud N) está acotado por algún polinomio $p(N)$. La clase de problemas de decisión que se pueden resolver por estos algoritmos se denota por **P**.

Definición 5

NP es definido como la clase de problemas de decisión que pueden ser resueltos por un algoritmo no-determinístico en un tiempo polinomial.

Definición 6

Un problema L_1 se reduce a otro problema L_2 , o $L_1 \propto L_2$, si y solo si cualquier instancia de L_1 se puede resolver por un algoritmo determinístico para resolver L_2 en un tiempo polinomial. Esta definición implica que si se tiene un algoritmo polinomial para resolver L_2 entonces se puede solucionar L_1 en un tiempo polinomial.

Definición 7

Se dice que un problema es **NP-duro** (NP-hard) si cada problema en **NP** se reduce a él; es **NP-completo** si también cae en **NP**.

Definición 8

Se dice que un algoritmo soluciona un problema si, cuando es aplicado a cualquier instancia del problema, el algoritmo siempre garantiza producir una solución para esa instancia.

Si para un problema particular existe un algoritmo polinomial para resolverlo, entonces ese problema se considera bien resuelto, en caso contrario el problema se considera intratable.

Como cualquier problema **NP-duro** puede considerarse al menos tan difícil de resolver que cualquier problema **NP**, establecer la intratabilidad de un solo problema **NP-completo** implicaría que todos los problemas **NP-duros** son intratables.

Se ha demostrado que el problema del diseño de redes de distribución de agua potable de costo mínimo con una aproximación de la clase **C₂** es un problema **NP-duro** (Yates et al 1984) razón por la cual es importante el estudio de alternativas de solución con métodos aproximados, pues la solución exacta requiere de un tiempo no acotado por ningún algoritmo de complejidad polinómica.

6.4 *Requerimientos No Funcionales*

- El método de solución debe ser capaz de encontrar una “buena” solución para una amplia variedad de topologías, demandas en los nodos, topografías, etc.
- El método de solución debe ser capaz de encontrar una “buena” solución en un tiempo “razonable” según el tamaño de la red, es decir, el algoritmo debe tener un complejidad polinómica, no mayor a $O(n^3)$.

6.5 *Metodología de Solución*

Los investigadores han abordado el problema de diseño óptimo de redes de distribución de agua potable con diferentes métodos como programación lineal, programación no lineal, programación dinámica y programación entera.

En esta investigación la solución propuesta esta basada en 3 algoritmos que se explican en los siguientes capítulos.

La solución se implementó como el módulo de diseño del programa REDES 2004 desarrollado en el Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados de la Universidad de Los Andes – CIACUA.

7 Criterios de diseño

Este capítulo describe brevemente algunos de los criterios de diseño más importantes.

7.1 Criterio Tradicional

Este criterio se refiere a lo que ha sido la práctica más común del diseño de redes de distribución de agua potable. Realmente no tiene ninguna función objetivo y depende enteramente del criterio subjetivo del diseñador, es decir el diseño se basa en el pre-dimensionamiento de las tuberías de la red y luego se procede a aumentar o disminuir los diámetros de tal manera que se cumplan las presiones en los nodos, lo cual se verifica haciendo una simulación hidráulica con ayuda de algún programa como "Redes" o "Epanet".

7.1.1 Ventajas del Criterio Tradicional

- No requiere que el diseñador tenga entrenamiento especial en técnicas de optimización.

7.1.2 Desventajas del Criterio Tradicional

- No tiene ningún criterio de optimización económica.
- El comportamiento hidráulico puede cumplir con unos requisitos mínimos de operación pero no hay un criterio de optimización hidráulica.
- Es un proceso muy dispendioso que depende únicamente del criterio y la experiencia de la persona que diseña.
- No es un método objetivo.
- No se puede hacer un seguimiento del proceso.
- El uso del software se limita a la simulación hidráulica, pero no usa una herramienta especializada en el diseño.

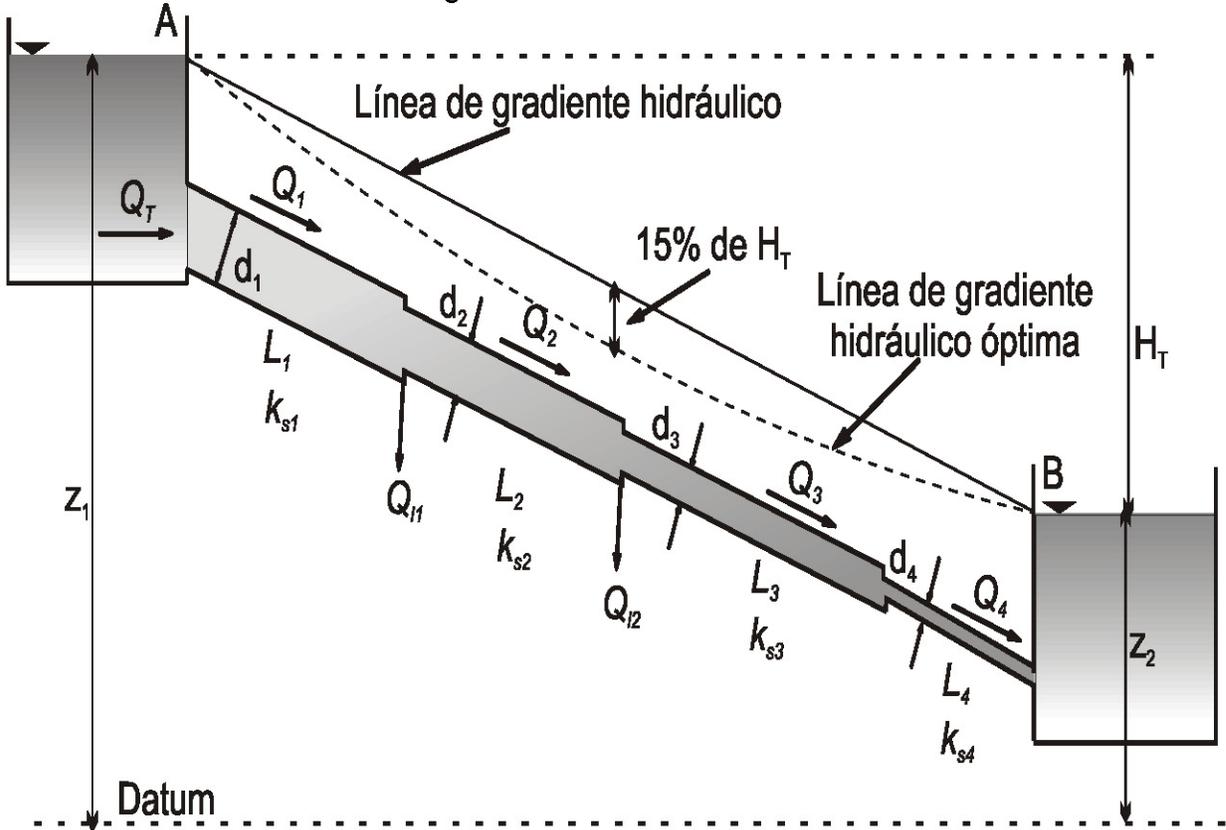
7.2 Criterio de I-Pia Wu (Tuberías en Serie)

En el año de 1974, el investigador chino I-Pia Wu¹², estableció que el diseño óptimo desde el punto de vista de los costos de una tubería en serie con caudales laterales en los nodos se obtenía cuando la línea de gradiente hidráulico hace parte de una curva cóncava formada por tramos rectos, con una flecha del 15% de la cabeza total, pero la diferencia entre esa curva y la línea recta es de tan solo un

¹² Wu. I-pai, "Design of Drip irrigation Lines,"(1975). Journal of the irrigation and Drainage Division, Vol. 101, No IR4, December 1975. ASCE..

2%, por lo tanto ésta se puede tomar como función objetivo en el diseño de tuberías en serie.

Gráficamente el criterio es el siguiente:



Este criterio establece la LGH (línea de gradiente hidráulico) objetivo y luego se determinan los diámetros como en el diseño de una tubería simple, dado que se conoce la diferencia de LGH entre el nodo inicial y el nodo final y eso determina las pérdidas de energía que debe haber en cada tubería. En una tubería en serie es posible determinar con exactitud el caudal que va por cada tubo.

Si los diámetros son valores continuos es posible obtener una respuesta casi perfecta, sin embargo hay que aproximar los diámetros a un diámetro comercial disponible, pero esto se logra fácilmente mediante un proceso iterativo que asigna los diámetros en orden según su cercanía a la fuente y va calculando la hidráulica en cada iteración para garantizar que las presiones en todos los nodos son superiores a la presión mínima establecida.

7.2.1 Ventajas del Criterio de Wu

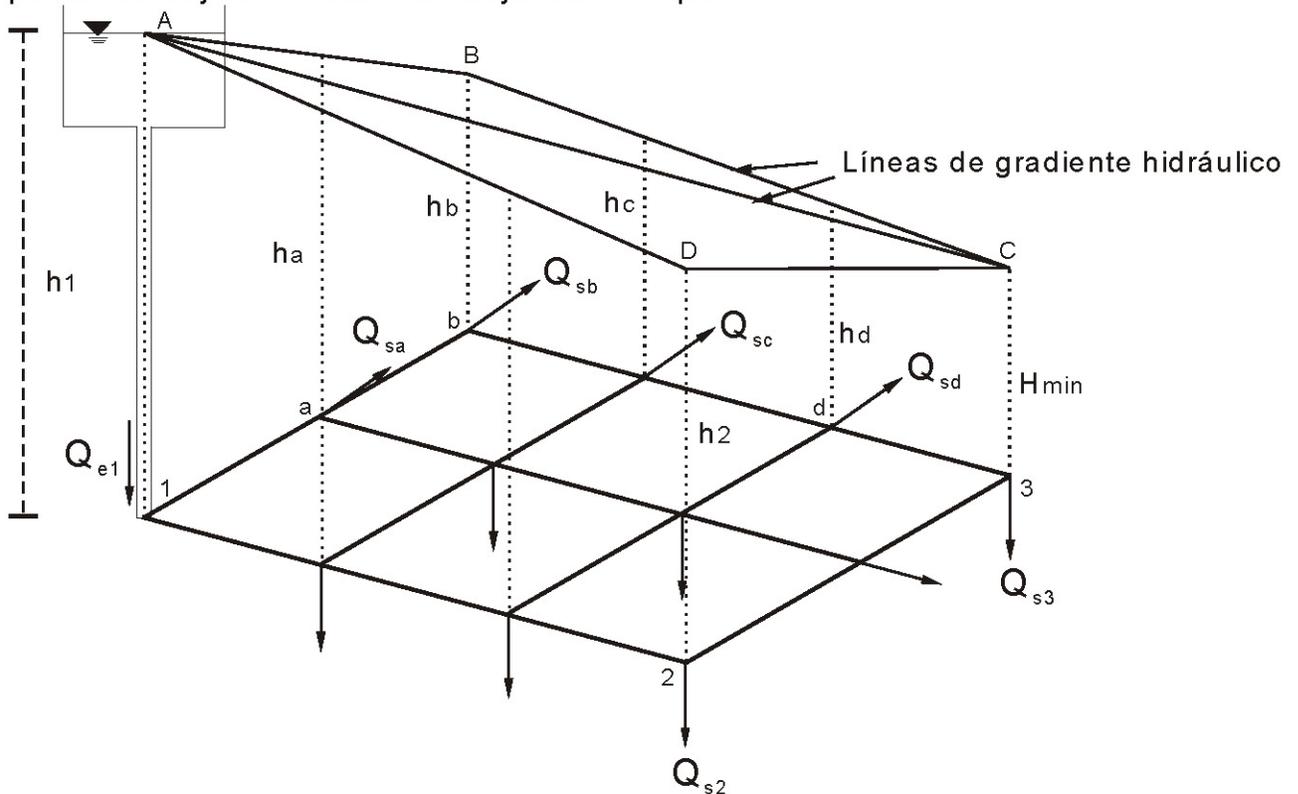
- Es un criterio de optimización global que ha demostrado su efectividad en el diseño de tuberías en serie.
- Es fácil de programar.
- Puede ser implementado por un algoritmo de tiempo polinomial no mayor a n^2 .

7.2.2 Desventajas del Criterio de Wu

- Está limitado al diseño de tuberías en serie y no fue pensado para el problema del diseño de redes de distribución de agua potable.

7.3 Criterio de Featherstone¹³ (Redes de Tuberías)

El criterio de Featherstone es una extensión del criterio de Wu, el cual propone que para una red de distribución las cabezas piezométricas (LGH) hacen parte de un plano general, cuyo punto más alto es el tanque o estación de bombeo y el punto más bajo es el nodo más alejado del tanque.



Gráfica 7-1 Criterio de Featherstone

Los planos ABC y ABD deben formar parte de un mismo plano general. Las líneas punteadas representan las alturas piezométricas de cada uno de los nodos de la red. El punto 3 representa el nodo más alejado y, por consiguiente el de cabeza piezométrica mínima (LGH). El punto 1 representa el tanque de abastecimiento de agua.

¹³ Saldarriaga, J.G. "Hidráulica de Tuberías" (1998). Editorial McGrawHill, Bogotá, Colombia.

7.3.1 Ventajas del Criterio de Featherstone

- Sirve para el diseño de redes de distribución de agua potable.
- Se puede programar fácilmente.
- Puede ser implementado por un algoritmo de tiempo polinomial no mayor a n^2 .
- Funciona bien en redes planas.
- Funciona bien en redes cuadriculadas.

7.3.2 Desventajas del Criterio de Featherstone

- No funciona muy bien en redes con topografía.
- No funciona muy bien en redes con topologías complejas.
- Lo anterior implica que en la práctica no se obtienen buenos diseños cuando se diseñan redes reales.

8 Superficie Óptima de Presiones (SOP)

Este método es fruto de esta investigación, la idea es hacer una extensión de los criterios de Wu y Featherstone que permita el diseño optimizado de redes de distribución de agua potable sin importar la complejidad de la topología de la red ni las características topográficas de la misma.

Este método consiste en el cálculo de la LGH (LGH ideal) que debería tener cada uno de los nodos de la red para que los diámetros resultantes de las tuberías tengan un costo cercano al mínimo.

Este criterio es similar al criterio de Wu (Wu 1975) para tuberías en serie, pero aplicado al diseño de redes de distribución de agua potable al igual que el criterio de Featherstone, pero pensado en servir para cualquier topología y/o topografía. Para calcular esta superficie de LGH es necesario definir la presión mínima requerida en los nodos y una ecuación que modele la caída de la LGH ideal.

Se ha encontrado que aplicando una ecuación cuadrática análoga a la usada en el criterio de Wu se pueden obtener buenos resultados, aunque con el propósito de mantener la generalidad del método, la ecuación se ha parametrizado para permitir cambiarla en ejecución de acuerdo a las características propias de cada red.

Una vez se tiene la LGH objetivo en cada uno de los nodos de la red se procede a hacer el diseño de cada uno de los tubos de la red como una tubería simple con los caudales obtenidos en una iteración anterior; esto da una mejor aproximación al caudal que debe ir por cada tubería. Este procedimiento se repite hasta que la LGH obtenida sea muy similar a la LGH ideal.

Esto daría un diseño casi perfecto si los diámetros fueran continuos, pero en realidad son números discretos y finitos, lo cual hace que se tenga que aproximar el diámetro real a un diámetro comercial.

Como resultado de este proceso se obtiene una red diseñada que cumple con las restricciones de mínima presión en los nodos y que se realizó siguiendo un criterio de optimización económica e hidráulica; sin embargo los diámetros obtenidos son números reales continuos que no pertenecen al conjunto de los diámetros comerciales definidos según la disponibilidad o criterio del diseñador.

La aproximación del diámetro se puede hacer al anterior, al siguiente o al más cercano diámetro comercial disponible, en esta investigación se determinó que una buena opción es aproximar al siguiente diámetro comercial para no violar la restricción de presión mínima en los nodos y posteriormente disminuir los diámetros mediante un proceso de optimización basado en un algoritmo de programación por restricciones, aunque también es posible aproximar al anterior diámetro comercial y luego aumentar los diámetros con otro procedimiento de

programación por restricciones, luego de lo cual se puede intentar nuevamente el procedimiento de disminución de diámetros.

La determinación de la superficie óptima de presiones se calcula siguiendo los siguientes pasos:

1. Determinar las distancias de los nodos a las fuentes.
2. Aplicar una función en términos de la distancia calculada en el punto anterior para calcular la LGH ideal.
3. Asignar unos diámetros iniciales a los tubos de la red, pueden ser iguales (por ejemplo se puede asignar un diámetro de 10 pulgadas a todos los tubos de la red).
4. Asignar a cada tubo una pérdida de energía igual a la diferencia de LGH entre sus nodos inicial y final.
5. Con los diámetros actuales y las pérdidas de energía del punto 4 se hace una simulación hidráulica para calcular los caudales en cada uno de los tubos de la red y la LGH en los nodos.
6. Con los caudales obtenidos en el punto anterior y las pérdidas del punto 4 se calculan los diámetros de cada tubo.
7. Se repiten los puntos 5-6 hasta que la diferencia entre la LGH obtenida en el punto 6 y la LGH ideal (punto 2) sea menor a un error máximo admisible.

A continuación se explica como realizar los pasos 1 y 2.

8.1 Cálculo de Distancias

La primera etapa de la determinación de la superficie óptima de presiones consiste en el cálculo de la distancia entre los nodos y las fuentes.

Cada fuente o nodo tiene una coordenadas X,Y y Z (elevación) que determinan su posición geográfica según un marco de referencia.

Antes de continuar se van a hacer las siguientes definiciones:

8.1.1 Distancia Euclidea 2D

La distancia euclidea en dos dimensiones es la distancia entre dos puntos teniendo en cuenta sólo sus coordenadas X y Y.

En este caso la distancia euclidea 2D entre un el nodo-i y la fuente-0 se calcula según la siguiente ecuación:

$$De2D = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \quad \text{Ecuación 8-1}$$

8.1.2 Distancia Euclidea 3D

La distancia euclidea en tres dimensiones es la distancia entre dos puntos teniendo en cuenta sus coordenadas X, Y y Z.

En este caso la distancia euclidea 3D entre un el nodo-i y la fuente-0 se calcula según la siguiente ecuación:

$$De3D = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} \quad \text{Ecuación 8-2}$$

8.1.3 Distancia Topológica

A diferencia de la distancia euclidea la distancia topológica depende de la topología de la red y no de solo de las coordenadas de las fuentes y de los nodos.

Para calcula la distancia topológica no es suficiente una ecuación, hay que implementar un algoritmo que calcule la distancia mínima entre dos vértices de un grafo. En este caso un vértice sería la fuente y el otro el nodo-i.

$$Dt = \text{DistanciaMinimaGrafo}(\text{fuente}_0, \text{nodo}_i) \quad \text{Ecuación 8-3}$$

En esta investigación se determinó que la distancia que se debe usar para el cálculo de la superficie óptima de presiones es la distancia topológica, porque es la distancia que representa el recorrido real del agua en la red y por lo tanto es proporcional a las pérdidas de energía en la misma.

$$\text{Distancia} = Dt \quad \text{Ecuación 8-4}$$

8.2 Ecuaciones de caída de la LGH ideal

Una vez se han calculado las distancia entre los nodos y las fuentes el siguiente paso es aplicar una ecuación que relacione la distancia con la línea de gradiente hidráulico objetivo (LGH ideal).

Estas ecuaciones permiten determinar la superficie óptima de presiones para una red con una o varias fuentes. Para facilitar la explicación se va a ilustrar el caso con una sola fuente.

Para determinar esta ecuación se parte de los siguientes conceptos:

1. Se conoce la LGH ideal máxima. Esta es igual a la LGH de la fuente.

$$LGH_{ideal\ max} = LGH_0 \quad \text{Ecuación 8-5}$$

En donde LGH_0 es la LGH de la fuente.

2. Se puede determinar la LGH ideal mínima. La LGH ideal en el punto más alejado debe ser igual a la elevación máxima de los nodos de la red más la presión mínima de diseño.

$$LGH_{ideal\ min} = Max(z) + P_{min} \quad \text{Ecuación 8-6}$$

3. La LGH en el nodo-i debe ser un valor entre la LGH ideal mínima y la LGH ideal máxima.

$$LGH_{ideal\ max} = Ecuación (0)$$

$$LGH_{ideal\ i} = Ecuación (distancia_i) \quad \text{Ecuación 8-7}$$

$$LGH_{ideal\ min} = Ecuación (distancia_{max})$$

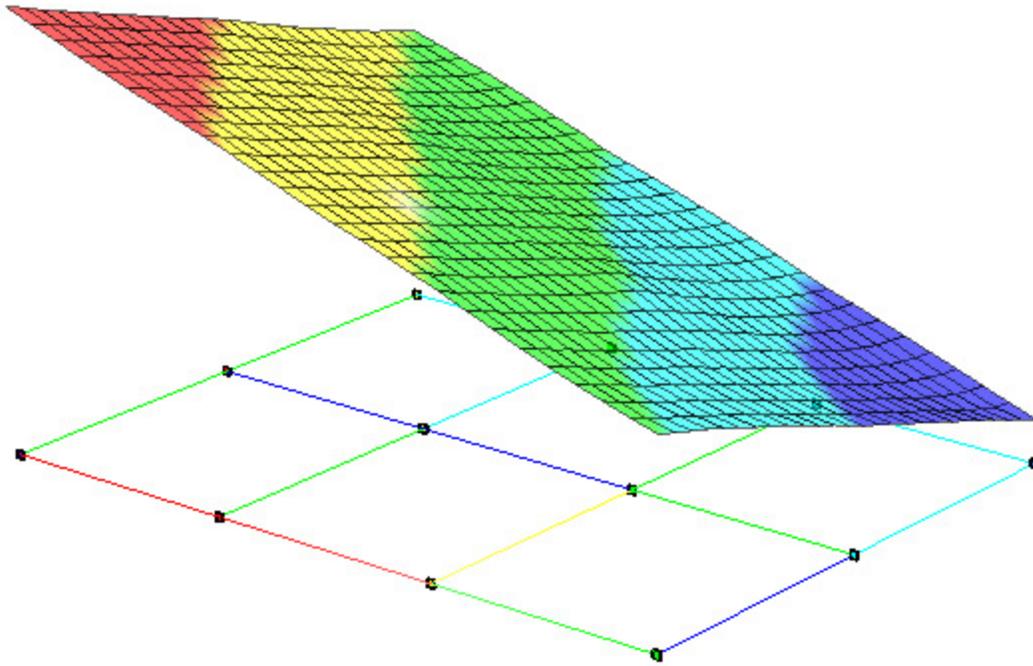
En donde "Ecuacion(distancia)" es una ecuación que relaciona la LGH ideal con la distancia entre la fuente y los nodos, $distancia_i$ es la distancia entre la fuente y el nodo-i y $distancia_{max}$ es la distancia entre la fuente y el nodo más alejado.

A continuación se muestran algunas de las ecuaciones que se probaron para modelar esta relación.

8.2.1 Ecuación Lineal

Modela una relación lineal entre la LGH ideal y la distancia entre los nodos y las fuentes.

$$LGH_{ideal} = \left(\frac{LGH_{ideal_{min}} - LGH_{ideal_{max}}}{dis_{tan\ cia_{max}}} \right) \cdot dis_{tan\ cia} + LGH_{max} \quad \text{Ecuación 8-8}$$



Gráfica 8-1 Superficie Óptima de Presiones calculada con una ecuación lineal

8.2.2 Ecuación Cuadrática

Modela una relación cuadrática entre la LGH ideal y la distancia entre los nodos y las fuentes.

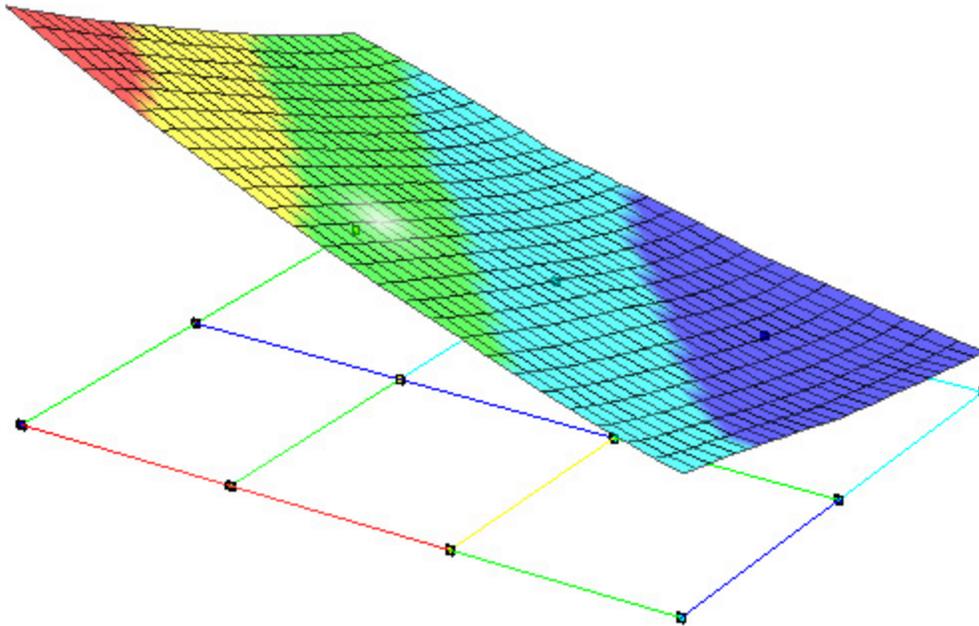
$$LGHideal_i = A \cdot distancia_i^2 + B \cdot distancia_i + C$$

$$A = \left(\frac{LGHideal_{max} - LGHideal_{min}}{distancia_i^2} \right)$$

$$B = (-2 \cdot A \cdot distancia_i^2)$$

$$C = LGHideal_{max}$$

Ecuación 8-9



Gráfica 8-2 Superficie Óptima de Presiones calculada con una ecuación cuadrática

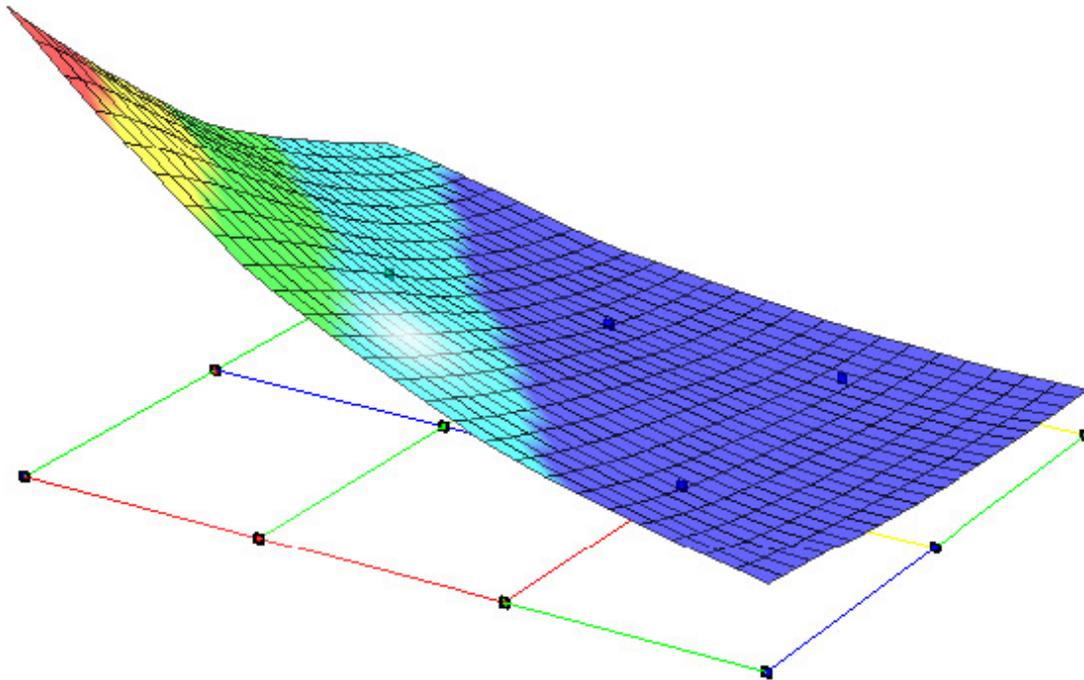
8.2.3 Ecuación de una catenaria

Modela la relación entre la LGH ideal y la distancia entre los nodos y las fuentes mediante una catenaria.

$$LGH_{ideal_i} = LGH_{ideal_{min}} \cdot \cosh\left(\frac{dis \tan \alpha_{max} - dis \tan \alpha_i}{\alpha}\right)$$

$$\alpha = \frac{dis \tan \alpha_{max}}{\cosh^{-1}\left(\frac{LGH_{max}}{LGH_{min}}\right)}$$

Ecuación 8-10



Gráfica 8-3 Superficie Óptima de Presiones calculada con la ecuación de una catenaria

8.2.4 Ecuación de un segmento elíptico

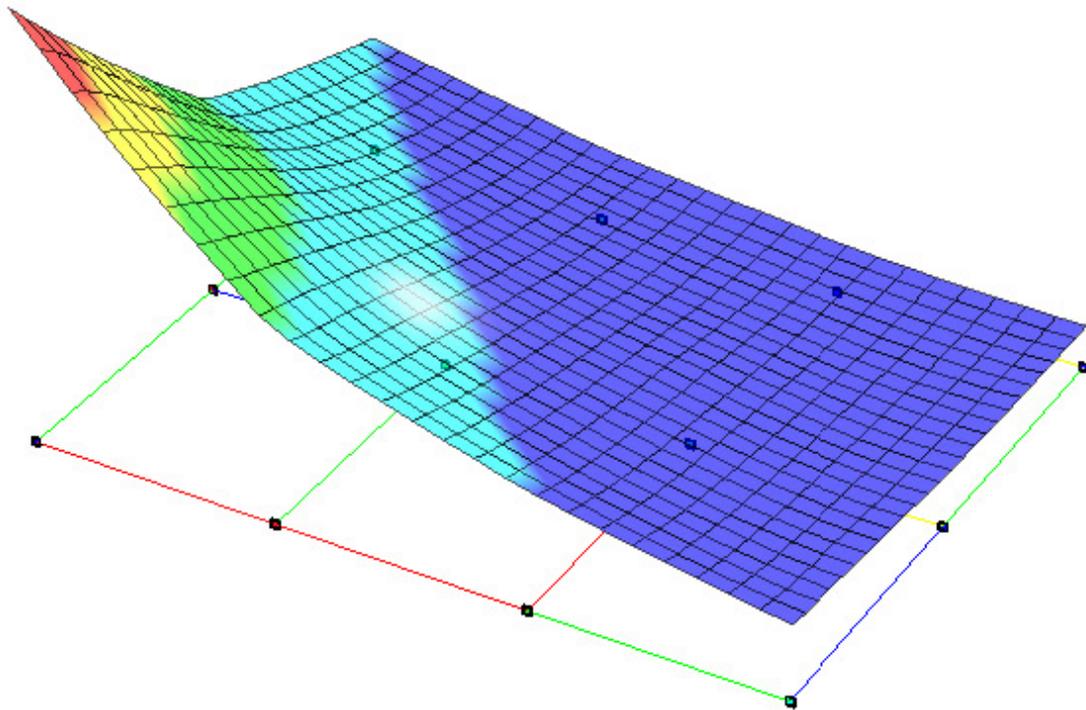
Modela la relación entre la LGH ideal y la distancia entre los nodos y las fuentes mediante un segmento de elipse.

$$LGH_{ideal_i} = LGH_{ideal_{max}} - \left[1 - (dis\ tan\ cia_{max} - dis\ tan\ cia_i)^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} \right]$$

$$a = dis\ tan\ cia_{max} - dis\ tan\ cia_{min}$$

$$b = LGH_{ideal_{max}} - LGH_{ideal_{min}}$$

Ecuación 8-11

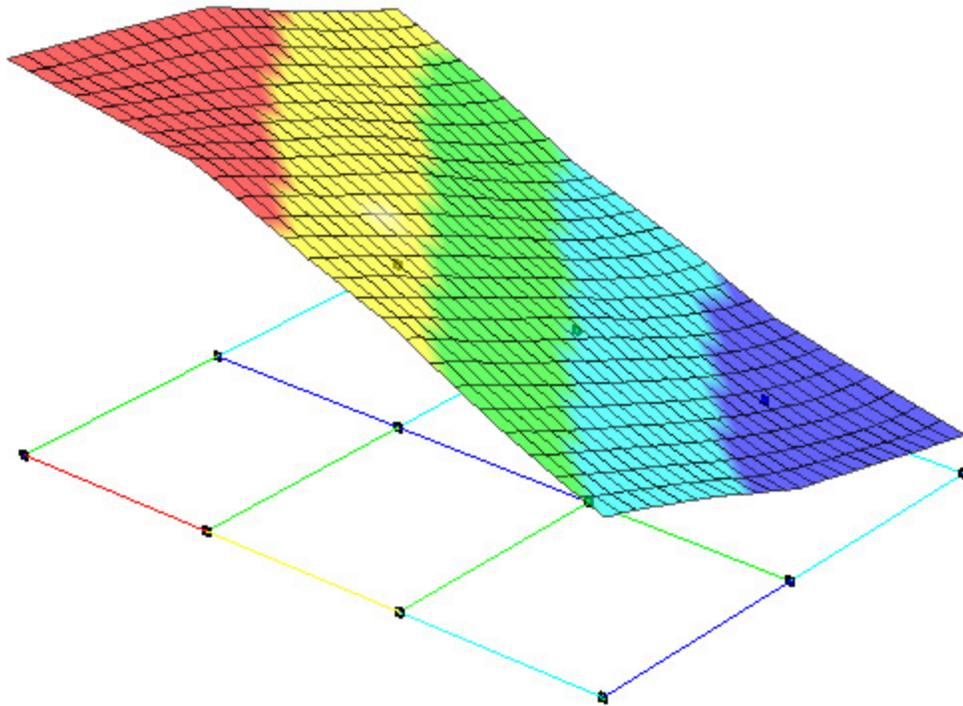


Gráfica 8-4 Superficie Óptima de Presiones calculada con la ecuación de un segmento de elipse

8.2.5 Ecuación de una campana Gaussiana

Modela la relación entre la LGH ideal y la distancia entre los nodos y las fuentes mediante la ecuación de una campana Gaussiana.

$$LGH_{ideal} = \frac{\alpha}{\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{-\text{distancia}_{\max}^2}{2 \cdot \ln\left(\frac{LGH_{ideal\ min}}{LGH_{ideal\ max}}\right)}} \quad \text{Ecuación 8-12}$$
$$\alpha = LGH_{ideal\ max} \cdot \sigma$$

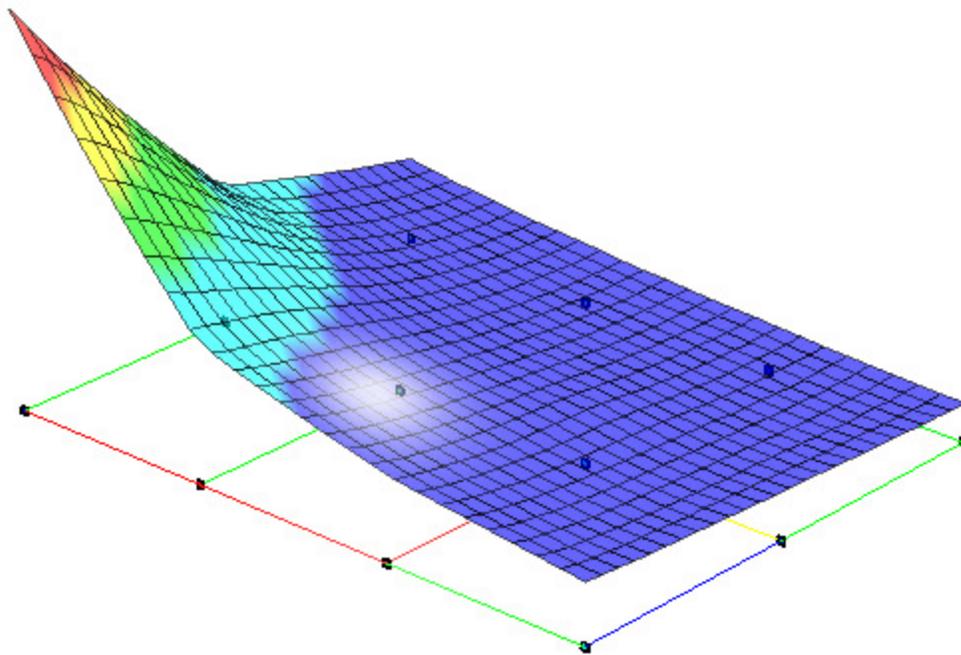


Gráfica 8-5 Superficie Óptima de Presiones calculada con la ecuación de una campana Gaussiana

8.2.6 Ecuación Recíproca

Modela la relación entre la LGH ideal y la distancia entre los nodos y las fuentes mediante la ecuación de una curva recíproca.

$$LGH_{ideal_i} = \frac{1}{\alpha \cdot distancia_i + \beta}$$
$$\alpha = \left(\frac{1}{LGH_{ideal_{min}} - \beta} \right) \cdot \left(\frac{1}{distancia_{max}} \right) \quad \text{Ecuación 8-13}$$
$$\beta = \left(\frac{1}{LGH_{ideal_{max}}} \right)$$



Gráfica 8-6 Superficie Óptima de Presiones calculada con una ecuación recíproca

8.3 Ventajas del diseño basado en la determinación de la superficie óptima de presiones

- La solución obtenida es muy precisa.
- El método converge muy rápidamente, en la mayoría de los casos el algoritmo de cálculo requiere un tiempo polinomial no mayor a $O(n)$ en algunos caso incluso $O(k)$. En la práctica solo se requieren unas pocas iteraciones sin importar el tamaño de la red.
- Incluye un criterio de optimización muy claro que se puede parametrizar en términos de la ecuación que modela la caída de la LGH entre las fuentes y los nodos.
- La respuesta obtenida respeta las restricciones hidráulicas.

8.4 Desventajas del diseño basado en la determinación de la superficie óptima de presiones

- La respuesta obtenida NO respeta las restricciones comerciales, es decir, los diámetros obtenidos tienen valores reales continuos en vez de los diámetros discretos disponibles.
- El punto anterior indica que el método por si solo no da una respuesta factible, aunque sirve para orientar la solución al combinarlo con otros métodos como la programación por restricciones y los algoritmos genéticos.

9 Programación por Restricciones

Una de las raíces de la programación por restricciones es la inteligencia artificial donde los investigadores se enfocan en el uso de lógica y deducción para la resolución de problemas complejos.

La *programación por restricciones*¹⁴ es un paradigma para la solución de problemas combinatorios de optimización. Estos problemas combinatorios de optimización se pueden resolver definiéndolos como varias instancias de un problema de satisfacción de restricciones (Constraint Satisfaction Problem - CSP).

Una instancia de un CSP se describe por un conjunto de variables, un conjunto de posibles valores para cada variable y un conjunto de restricciones entre las variables. Al conjunto de los posibles valores de una variable se le denomina el dominio de la variable.

Una restricción entre variables expresa las combinaciones de los valores de las variables que están permitidos, las restricciones pueden ser implícitas (p.e. una fórmula aritmética) o explícitas en donde cada restricción se expresa como un conjunto de parejas de valores que cumplen la restricción.

Un ejemplo de una restricción implícita es la siguiente: "La presión mínima en cada nodo debe ser mayor a 15 mca" (cuando la variable de decisión es el diámetro de la tubería). Un ejemplo de restricción explícita sería: "La tubería xx debe tener un diámetro igual a 10 pulgadas".

La pregunta que se desea responder para una instancia de un CSP es si existe una combinación de valores que satisfagan todas las restricciones, a esta combinación se le denomina una solución del CSP.

Una de las ideas claves de la *programación por restricciones* es que las restricciones se pueden usar activamente para reducir el esfuerzo computacional necesario para resolver problemas combinatorios. Las restricciones se usan para verificar la validez de la solución y para remover valores del dominio de las variables, deducir nuevas restricciones y detectar inconsistencias.

Las deducciones específicas que resultan en la remoción de valores del dominio se llaman reducciones de dominio (domain reductions).

¹⁴ Baptiste P, Le Pape C, Nuijten W. "Constraint-based scheduling : applying constraint programming to scheduling problems" (2001).
Saraswat V, Van Hentenryck P. "Principles and Practice of Constraint Programming" (1995).

Al conjunto de valores del dominio de una variable que no han sido invalidados por la propagación de restricciones se le denomina dominio actual (current domain) de esa variable.

En general un problema CSP es NP completo (el problema de diseño de redes de distribución de agua potable es NP-Duro), la propagación de restricciones es usualmente incompleta. Esto significa que se deducen algunas pero no todas las consecuencias de un conjunto de restricciones. En particular la propagación de restricciones no puede detectar todas las inconsistencias; este hecho implica que se deba usar un algoritmo de búsqueda para determinar si el CSP tiene solución.

La mayoría de las búsquedas se hacen con algoritmos de búsqueda en árboles. Los dos componentes principales del algoritmo son:

1. Como ir hacia adelante, la definición de que decisiones tomar en un punto de la búsqueda.
2. Como devolverse al detectar inconsistencias (*backtracking*)

La estrategia de que hacer en un punto de la búsqueda se conoce como la heurística de búsqueda (*search heuristic*). En general las decisiones que se toman corresponden a la adición de nuevas restricciones.

9.1 Principios de la Programación por Restricciones

- Deducción de restricciones adicionales a partir de las existentes por razonamiento lógico. Es posible mantenerse en la región factible de la solución de un problema y cada vez que se deducen restricciones adicionales se va limitando el espacio de búsqueda haciéndolo cada vez más pequeño.
- Aplicación de algoritmos de búsqueda para explorar el espacio de solución. En cada instancia de un proceso de solución de un problema CSP es necesario contar con la ayuda de un algoritmo de búsqueda que determina el orden de ejecución del algoritmo principal.

El éxito de un algoritmo de programación por restricciones está en combinar adecuadamente los dos principios anteriores según el conocimiento que se tenga del problema que se desea resolver.

9.2 Ejemplo de PR “El problema de las N reinas”

A continuación se muestra uno de los ejemplos más populares para ilustrar varios de los aspectos de solución de un CSP, se trata del problema de las N-reinas, se trata de poner N reinas en un tablero de ajedrez sin que ninguna quede al alcance de otra según su movimiento horizontal, vertical u horizontal.

El problema tiene una importancia práctica limitada, pero es muy bueno para mostrar aspectos como el modelamiento, la propagación de restricciones, la búsqueda y el “*backtracking*”.

El problema de las N reinas puede ser modelado introduciendo N variables enteras x_i , cada una representando la posición de la reina en la i-ésima fila, el dominio de cada variable es el conjunto de los enteros entre 1 y N.

9.2.1 Restricciones del problema de las N Reinas

Las restricciones del problema se pueden expresar de la siguiente manera:

Para cada par (i,j) donde $i \neq j$,

$x_i \neq x_j$ garantiza que las columnas son diferentes y

$x_i + i \neq x_j + j$ garantizan que las diagonales son diferentes.

$x_i - i \neq x_j - j$

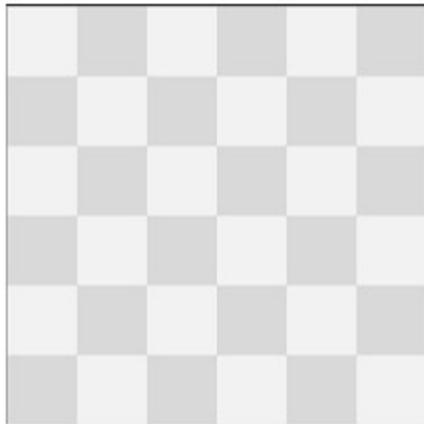
En la siguiente figura se muestra la solución de este problema, teniendo en cuenta:

- Se determinan los valores de cada variable desde x_1 hasta x_n .
- Para este ejemplo se toma $N = 6$.

9.2.2 Solución del problema de las N Reinas

La siguiente figura muestra un tablero vacío de 6x6 que representa el espacio de búsqueda de la solución del problema. Cada fila del tablero es una variable x_i que toma un valor entre 1 y 6, estos valores son la posición de la reina en la fila correspondiente.

Al principio cada una de las variables x_i con i entre 1 y 6 tiene un conjunto de posibles valores válidos.



$$x_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$x_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$x_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$x_4 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$x_5 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$x_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Ecuación 9-1 Dominio Actual Paso 0



$$x_1 = 3$$

$$x_2 = \{1,5,6\}$$

$$x_3 = \{2,4,6\}$$

$$x_4 = \{1,2,4,5\}$$

$$x_5 = \{1,2,4,5,6\}$$

$$x_6 = \{1,2,4,5,6\}$$

Ecuación 9-2 Dominio Actual Paso 1



$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = \{4,6\}$$

$$x_4 = \{2,4,5\}$$

$$x_5 = \{2,5,6\}$$

$$x_6 = \{2,4,6\}$$

Ecuación 9-3 Dominio Actual Paso 2



$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 4$$

$$x_4 = 2$$

$$x_5 = 5$$

$$x_6 = \{\emptyset\}$$

Ecuación 9-4 Dominio Actual Paso 3 (inconsistencia)



$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 6$$

$$x_4 = \{2,4\}$$

$$x_5 = \{2,5\}$$

$$x_6 = \{2,4\}$$

Ecuación 9-5 Dominio Actual Paso 3'



- $x_1 = 3$
- $x_2 = 1$
- $x_3 = 6$
- $x_4 = 2$
- $x_5 = 5$
- $x_6 = \{\emptyset\}$

Ecuación 9-6 Dominio Actual Paso 4 (Inconsistencia)



- $x_1 = 3$
- $x_2 = \{5,6\}$
- $x_3 = \{2,4,6\}$
- $x_4 = \{1,2,4,5\}$
- $x_5 = \{1,2,4,5,6\}$
- $x_6 = \{1,2,4,5,6\}$

Ecuación 9-7 Dominio Actual Paso 1'



- $x_1 = 3$
- $x_2 = 5$
- $x_3 = 2$
- $x_4 = 4$
- $x_5 = 1$
- $x_6 = \{\emptyset\}$

Ecuación 9-8 Dominio Actual Paso 2' (Inconsistencia)



- $x_1 = 3$
- $x_2 = 6$
- $x_3 = \{2,4\}$
- $x_4 = \{1,2,5\}$
- $x_5 = \{1,2,4,5\}$
- $x_6 = \{1,4,5\}$

Ecuación 9-9 Dominio Actual Paso 2''



$$\begin{aligned}
 x_1 &= 3 \\
 x_2 &= 6 \\
 x_3 &= 2 \\
 x_4 &= \{5\} \\
 x_5 &= \{1,5\} \\
 x_6 &= \{1,4\}
 \end{aligned}$$

Ecuación 9-10 Dominio Actual Paso 3''



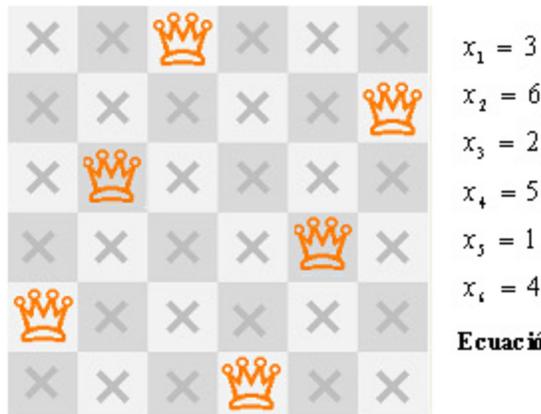
$$\begin{aligned}
 x_1 &= 3 \\
 x_2 &= 6 \\
 x_3 &= 2 \\
 x_4 &= 5 \\
 x_5 &= \{1\} \\
 x_6 &= \{1,4\}
 \end{aligned}$$

Ecuación 9-11 Dominio Actual Paso 4'



$$\begin{aligned}
 x_1 &= 3 \\
 x_2 &= 6 \\
 x_3 &= 2 \\
 x_4 &= 5 \\
 x_5 &= 1 \\
 x_6 &= \{4\}
 \end{aligned}$$

Ecuación 9-12 Dominio Actual Paso 5



Ecuación 9-13 Dominio Actual Paso 6 (Solución Encontrada!)

Anteriormente se ilustró el proceso de solución de un algoritmo de programación por restricciones. Cada vez que se escoge un valor de un conjunto de posibilidades se hace de acuerdo a una función heurística que determina cual valor se debe seleccionar y una vez hecho esto se introducen nuevas restricciones y se propagan de tal manera que se reduce considerablemente el espacio de búsqueda. Es posible que durante el proceso se detecten algunas inconsistencias y esto lleva a que se deba volver hacia atrás (backtracking) hasta el ultimo estado consistente y a partir de allí continuar el proceso descartando la rama en la cual se encontró una inconsistencia.

En este ejemplo se avanza hasta encontrar una contradicción al quedar vacío el dominio de una variable, se vuelve a la última decisión a partir de la cual se puede tomar una decisión alternativa y se continúa el proceso hasta encontrar una solución.

En el ejemplo se mostró como la combinación del modelo, la heurística de búsqueda, la propagación de restricciones y la estrategia de backtracking definen el rendimiento de un algoritmo de CP, cuando se quiere mejorar el rendimiento de un algoritmo de CP hay que trabajar al menos en uno de estos aspectos.

El problema de diseño de redes de distribución de tuberías puede ser tratado con esta metodología, dado que se tiene un dominio finito de diámetros, el problema consistiría en empezar con una combinación de diámetros de tal manera que se satisfagan todas las restricciones del problema, después hacer una serie de iteraciones de tal manera que en cada iteración se varia el diámetro de un determinado tubo y se recalcula la hidráulica de toda la red, después de lo cual se verifica si se siguen cumpliendo o no las restricciones, una vez se encuentre una violación a las restricciones se hace "backtracking", en cada iteración hay que propagar nuevas restricciones que junto a las restricciones iniciales del problema ayuden a restringir el espacio de búsqueda para poder obtener una buena solución de una manera eficiente.

La dificultad de esta metodología radica en encontrar una heurística adecuada capaz de dirigir eficientemente el proceso de búsqueda y propagar unas

restricciones que minimicen la cantidad de iteraciones requeridas para hallar una “buena” solución del problema. Se dice que la solución es “buena” porque este tipo de problemas tiene múltiples soluciones y solo una exploración exhaustiva podría garantizar que la solución hallada corresponde al óptimo global del espacio de soluciones posibles, esta opción está descartada de entrada dada la complejidad del problema y el tiempo de cálculo requerido puede ser gigantesco.

Se puede pensar en una metodología de propagación de gradientes para hallar el “óptimo”, sin embargo nada asegura que el óptimo hallado corresponda al óptimo global, por lo que se podría llegar a un óptimo local muy alejado del óptimo global.

Una buena combinación de heurísticas y técnicas de propagación de restricciones puede llevar de manera eficiente a encontrar una solución cercana al óptimo, pero el éxito depende de varios factores, como la implementación de los algoritmos, que en algunos casos dependen mucho del problema específico que se esté tratando de solucionar.

Al aplicar este tipo de algoritmos al diseño de redes de distribución de agua potable es posible llegar a un buen nivel de optimización a partir de una solución que ya cumple las restricciones hidráulicas y comerciales o a partir de una solución que viola ligeramente las restricciones hidráulicas. Por esta razón funciona muy bien al usarlo en conjunto con un diseño basado en la superficie óptima de presiones.

9.3 Ventajas de la Programación por Restricciones

- Es capaz de encontrar una buena solución rápidamente.
- Los resultados obtenidos son factibles y cumplen todas las restricciones del problema, tanto las restricciones hidráulicas como las comerciales.
- Es posible combinar los resultados obtenidos por otros métodos de tal manera que se obtengan mejores soluciones en un tiempo pequeño.
- La complejidad del algoritmo está acotada por $O(n)$, donde n es el número de tubos de la red. (Sección 15.1.2 Complejidad de PR (Programación por Restricciones))
- A partir de un estado inicial siempre se va a llegar al mismo estado final. Es decir el algoritmo es ídem potente ya que al correrlo una o varias veces consecutivas se va a obtener el mismo resultado.

9.4 Desventajas de la Programación por Restricciones

- Dado que la programación por restricciones guía la búsqueda de la solución, es posible que no encuentre el óptimo global.

10 Algoritmos Genéticos

Los algoritmos genéticos son métodos de optimización combinatoria que se han venido usando ampliamente en los últimos años para resolver el problema de diseño óptimo de redes de distribución de agua potable. El algoritmo genético implementado en esta investigación está basado en un algoritmo genético estándar¹⁵, pero se ha incluido un nuevo operador de mutación que permite transiciones más suaves entre un modelo y otro.

Los algoritmos genéticos son un método de búsqueda aleatoria por el espacio de solución. Esto implica que no se puede garantizar encontrar el mínimo global, ni siquiera un mínimo global de la función de costo. Este tipo de algoritmos van buscando por el espacio de solución seleccionando los mejores individuos que representan una posible solución del problema. La aplicación de este tipo de algoritmos en esta y en otras investigaciones ha mostrado que después de un número razonable de generaciones se encuentre una solución cuyo costo sea relativamente bajo.

Los algoritmos genéticos no son formalmente algoritmos de optimización, pero la práctica ha mostrado que son una buena forma de aproximarse a la solución de problemas cuya naturaleza los hace intratables por métodos clásicos.

El algoritmo genético usado en esta investigación no incluye el manejo de restricciones, pero estas se pueden simular al incluir un término de penalización en la ecuación de costo que crece en función de la magnitud de la violación de las restricciones. Esto implica que no se puede evitar que algunos (o todos) los individuos de determinada generación tengan violaciones en las restricciones del problema; sin embargo al adicionar un término de penalización a la función de costo hace que la función de costo sea muy alta en los individuos con violaciones a las restricciones del problema. Esto hace que después de cierto número de iteraciones la gran mayoría de los individuos se mantengan dentro del espacio factible de solución del problema.

Cuando se crea la primera generación de manera aleatoria es muy posible que muchos de los individuos no cumplan con las restricciones. Además es posible que al combinar dos individuos que si cumplen con las mismas, sus descendientes no cumplan con las restricciones.

En la práctica se han obtenido buenos resultados al simular de esta manera las restricciones del problema, el único inconveniente práctico radica en la gran cantidad de iteraciones necesarias para obtener buenas soluciones aún en problemas relativamente pequeños, lo cual los hace poco prácticos para el diseño de redes de mayor tamaño.

¹⁵ Lopez , C.S. "Diseño de Redes de Distribución de Agua Potable de Mínimo Costo con Algoritmos Genéticos". Proyecto de Grado en Ingeniería Civil. Universidad de Los Andes, Junio de 2003 .

Como se verá en los siguientes capítulos, cuando los algoritmos genéticos se usan en combinación con el diseño basado en la superficie óptima de presiones y un proceso de optimización basado en un algoritmo de programación de restricciones, se obtienen muy buenos resultados en un tiempo de cálculo razonable según el tamaño del problema.

Un individuo es la representación de una red particular, la cual está descrita por un vector de diámetros que determinan las presiones en los nodos de la misma.

Los algoritmos genéticos hacen uso de conceptos biológicos como la relación entre el fenotipo (las características físicas de un individuo) y su genotipo (la codificación de su ADN) para simular procesos como la reproducción.

En el caso del diseño de redes de distribución de agua potable el fenotipo es equivalente a la respuesta hidráulica, es decir las presiones en cada uno de los nodos de la red; mientras que el genotipo es equivalente a un código que de alguna manera representa los diámetros en cada uno de los tubos de la red.

En esta investigación se usó un método de codificación muy sencillo que consiste en que el código genético de un individuo sea un vector de NT elementos, donde NT es el número de tubos de la red y cada elemento representa el valor de diámetro del i -ésimo tubo, para i entre 1 y NT .

El algoritmo genético genera aleatoriamente un conjunto de individuos iniciales, a este conjunto se le denomina generación inicial. A partir de la generación inicial es posible generar un nuevo conjunto de individuos a través de operadores genéticos como reproducción y mutación. El procedimiento se realiza N_{gen} veces, donde N_{gen} es el número de generaciones.

En esta investigación el número de generaciones y el número de individuos en cada generación son parámetros del algoritmo que se definen antes de iniciar la ejecución del mismo.

El algoritmo genético usado y extendido en esta investigación realiza un número determinado de simulaciones hidráulicas que es función del número de generaciones y del número de individuos de cada generación, las cuales son parámetros que se determinan antes de la ejecución del mismo. No tiene un criterio de parada prematuro porque cuando se ejecuta el algoritmo se espera que la solución mejore eventualmente a pesar de no obtener mejores resultados durante varias generaciones consecutivas.

10.1 Modificaciones al Algoritmo Genético Estándar

En esta investigación se partió del desarrollo de un algoritmo genético implementado previamente y se le hicieron algunas modificaciones para mejorar su rendimiento y acelerar la convergencia del mismo.

Estas modificaciones se muestran a continuación.

10.1.1 Operador de Mutación

Se incluyó un nuevo operador de mutación que altera el diámetro de un modelo basado en el diámetro de su padre y solo se permite cambiarlo por el diámetro inmediatamente anterior o siguiente.

Este operador permite una transición más suave entre un modelo y otro y disminuye los efectos secundarios producto del carácter aleatorio del algoritmo.

10.1.2 Inclusión de modelo base

Se incluyó la opción de introducir un modelo base a partir del cual se generan los demás modelos en lugar de tener que generar cada modelo de manera aleatoria cada vez que se ejecuta el algoritmo.

Esta opción permite empezar la ejecución de un algoritmo genético desde una ejecución anterior, lo que hace posible que en cada ejecución se obtengan valores cada vez mejores en vez de obtener resultados totalmente aleatorios en cada ejecución.

Esta opción también permite combinar el algoritmo genético con otros algoritmos como la superficie óptima de presiones y la programación por restricciones, haciendo posible encadenar un sistema completo según se requiera.

10.2 Ventajas del Algoritmo Genético

- Se pueden obtener buenos resultados que cumplen con las restricciones hidráulicas y comerciales.
- Son capaces de mejorar soluciones existentes al combinarse con otros algoritmos.
- No quedan atrapados en óptimos locales.
- Pueden brindar muchas alternativas de solución para que un experto humano determine cual es mejor según su propio criterio.
- El algoritmo es capaz de llegar a una o varias soluciones en un tiempo razonable, sin embargo no converge tan rápido como los métodos anteriores.

10.3 Desventajas del Algoritmo Genético

- Es difícil estimar el número de iteraciones necesarias para obtener resultados satisfactorios dado que no se conoce adecuadamente la dependencia entre el

número de generaciones y la cantidad de individuos de cada generación con la convergencia del algoritmo.

- En general requieren de un número relativamente grande de iteraciones comparado con los métodos anteriores.
- No garantizan encontrar el óptimo global, ni siquiera un óptimo local.
- No son estrictamente métodos de optimización.
- No manejan directamente las restricciones, las cuales se introducen mediante funciones de penalización que son muy sensibles a los valores de los coeficientes que se definen en la ejecución del algoritmo.
- La configuración de los parámetros adecuados de ejecución del algoritmo son relativamente complejos y pueden confundir a usuarios poco experimentados.

11 Enumeración Exhaustiva

Los métodos de enumeración exhaustiva consisten en calcular de manera sistemática todas las posibles combinaciones o estados de determinado problema. En el caso del diseño de redes de distribución de agua potable se trata de calcular todas las combinaciones de diámetros posibles en cada una de las tuberías de la red.

El tamaño del espacio de búsqueda en este caso está dado por:

$$S = ND^{NT}$$

Ecuación 11-1 Tamaño del Espacio de Búsqueda

La Ecuación 11-1 muestra el tamaño del espacio de búsqueda “S”, en donde ND es el número de diámetros comerciales disponibles para el diseño y NT es el número de tuberías de la red.

11.1 Método de Codificación

Para poder enumerar cada una de las posibles combinaciones de diámetros para cada uno de los tubos de la red se hace un procedimiento similar al de la codificación de los colores que es capaz de mostrar el monitor de un computador.

En ese caso se tienen 3 dimensiones **R**(rojo), **G**(verde) y **B**(azul) y cada color tiene un nivel de cada una de las dimensiones asociadas. Cada nivel está representado por un número entre 0 y 255. Es decir 256 valores posibles.

Si se aplica la Ecuación 11-1 se obtiene $S = 256^3 = 16777216$, que es el número de colores que se pueden desplegar en pantalla.

Cada color está identificado por un código **RGB** que es un número entre 0 (Negro) y 16777215 (Blanco).

En este caso el código está dado por la siguiente ecuación:

$$Cod = R + 255 \cdot G + 255^2 \cdot B$$

Ecuación 11-2 Codificación de Colores

Para el caso del diseño se hace una generalización de esta ecuación:

$$Cod = \sum_{i=0}^{NT-1} i \cdot (ND^i - 1)$$

Ecuación 11-3 Codificación de Diseños

En la Ecuación 11-3 NT es el número de tuberías de la red, ND es el número de diámetros comerciales disponibles para el diseño, la variable i representa el índice de un diámetro en la lista ordenada de diámetros comerciales disponibles.

Este método de codificación permite una enumeración completa y ordenada de los posibles diseños de una red y se pueden realizar fácilmente los diseños al recorrerlos en un ciclo dado un índice o contador desde 0 hasta S-1.

El método de codificación es de gran utilidad, ya que permite generar un diseño dado su código, esto funciona muy bien cuando se desea guardar un diseño para trabajarlo después.

11.2 Ventajas de la Enumeración exhaustiva

- Asegura encontrar el óptimo global, dado que evalúa todas las posibilidades.

11.3 Desventajas de la Enumeración exhaustiva

- El tiempo requerido para enumerar y evaluar todas las posibles soluciones de un problema combinatorio es demasiado grande aún en problemas pequeños, lo cual limita su aplicación a ejemplos muy pequeños que pueden servir solo para evaluar el rendimiento de otros algoritmos.

12 Esquema de solución

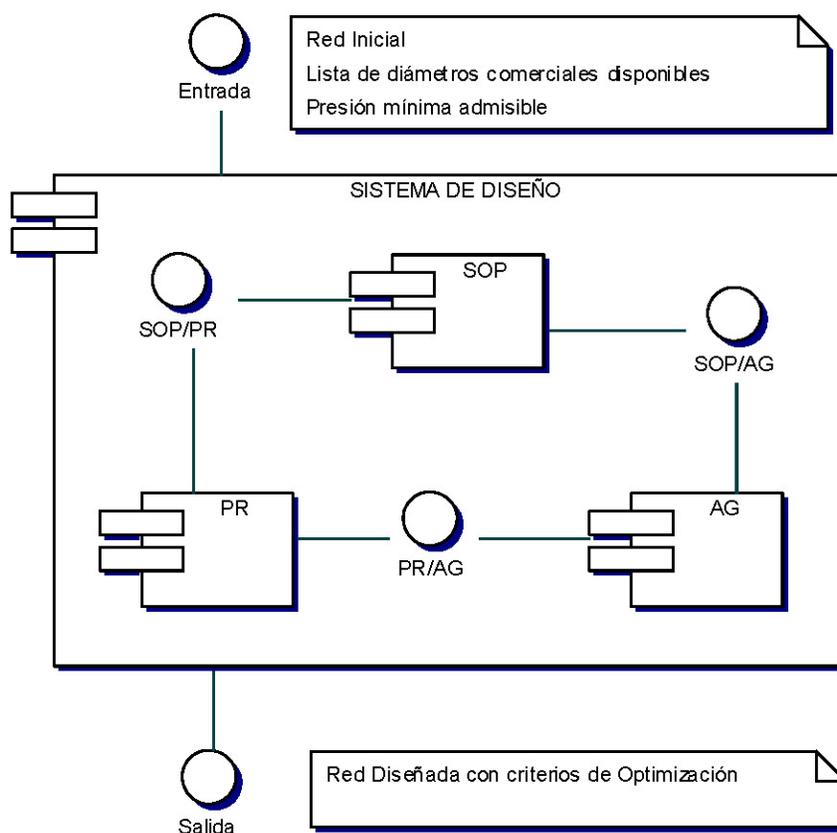
La solución propuesta en esta investigación consiste en hacer uso de los métodos descritos en los capítulos anteriores para resolver el problema del diseño de redes de distribución de agua potable.

Este capítulo ilustra el resultado obtenido por cada componente del sistema de manera separada, luego de manera cooperativa entre dos componentes del sistema y finalmente el resultado de la integración del sistema en diferentes configuraciones.

12.1 Montaje del sistema de solución

La idea fundamental de esta investigación es integrar efectivamente diferentes métodos para resolver el problema del diseño.

Para poder cumplir con este objetivo, cada uno de los algoritmos debe poder comunicar sus resultados a los otros métodos para que este los tome como entrada y produzca una salida que a su vez le sirva de entrada a otro método y de esa manera iterar sobre los diferentes métodos en cualquier orden el número de veces que sea necesario hasta obtener resultados satisfactorios.



Gráfica 12-1 Sistema de Diseño de Redes de Distribución de Agua Potable

En la Gráfica 12-1

SOP = Superficie Óptima de Presiones

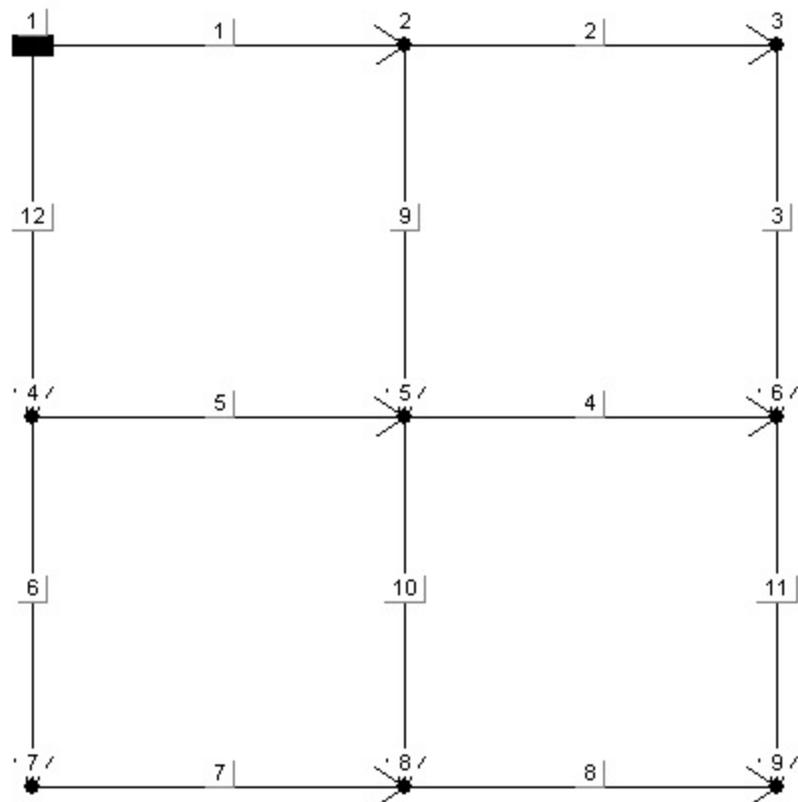
AG = Algoritmos Genéticos

PR = Programación por Restricciones

El sistema de diseño permite obtener un código dados los diámetros en los tubos y también permite generar un diseño a partir de un código (11.1 Método de Codificación). Esto facilita la interacción entre los diferentes componentes del sistema.

12.2 Ejemplo de diseño de Red

En esta sección, se va a mostrar el proceso de diseño de cada elemento del sistema mediante un ejemplo.



Gráfica 12-2 Red de Ejemplo - identificadores de los elementos

El costo de la red está dado por la ecuación:

$$C = \sum_{i=1}^M K \cdot L_i \cdot D_i^x$$

Ecuación 6-1

Para este ejemplo se tienen los siguientes coeficientes:

$$K = 0.015$$

$$x = 1.46$$

Para este ejemplo se tiene la siguiente base de diámetros comerciales:

| Base de Diámetros | |
|-------------------|----------|
| Índice | Diámetro |
| - | Pulgadas |
| 1 | 4 |
| 2 | 6 |
| 3 | 8 |
| 4 | 10 |

Tabla 12-1 Base de Diámetros Comerciales para el ejemplo

Todos los tubos tienen una rugosidad de 1.5mm y una longitud de 500 metros. No hay pérdidas menores.

Todos los nodos tienen una demanda de 30 litros/seg y la presión mínima de 15 mca.

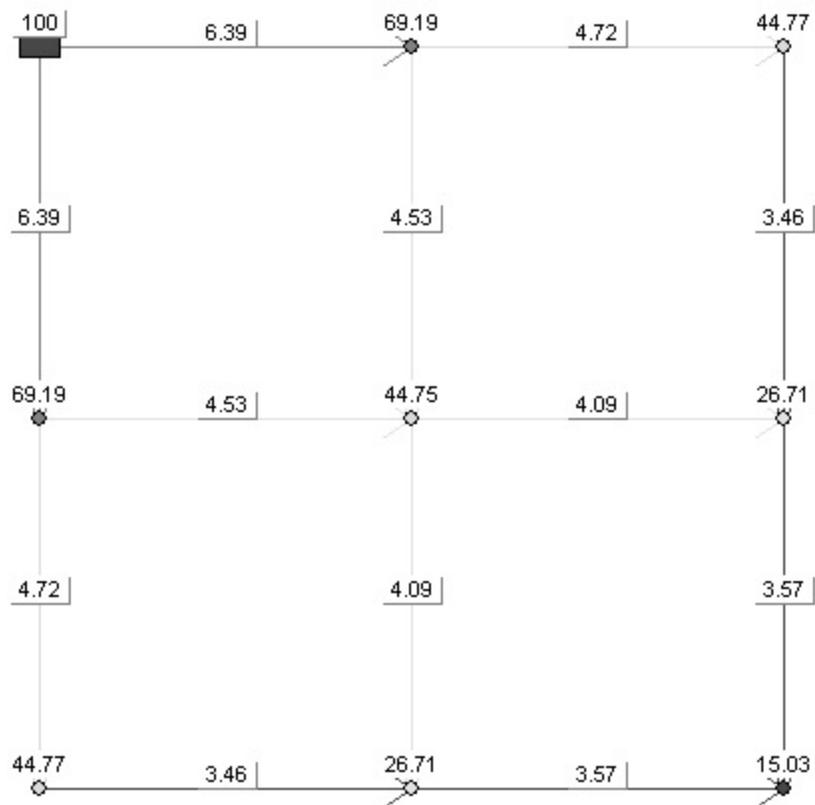
(NT=12 y ND=4 \rightarrow $S=4^{12} = 16777216$).

Este ejemplo tiene 12 tubos y 4 diámetros comerciales disponibles, por lo que hay un total de 16777216 posibles diseños diferentes.

12.3 Soluciones independientes

A continuación se procede a encontrar soluciones al ejemplo de este capítulo usando únicamente un componente del sistema.

12.3.1 Soluciones con Superficie Óptima de Presiones (SOP)



Gráfica 12-3 Presión en los Nodos y Diámetros en los tubos después de SOP

El costo de esta solución es:

$$\text{Costo} = \$120125.3$$

Esta solución no tiene un código porque los diámetros obtenidos no pertenecen al conjunto de los diámetros comerciales disponibles.

La solución se obtuvo en:

$$\text{Simulaciones} = 5$$

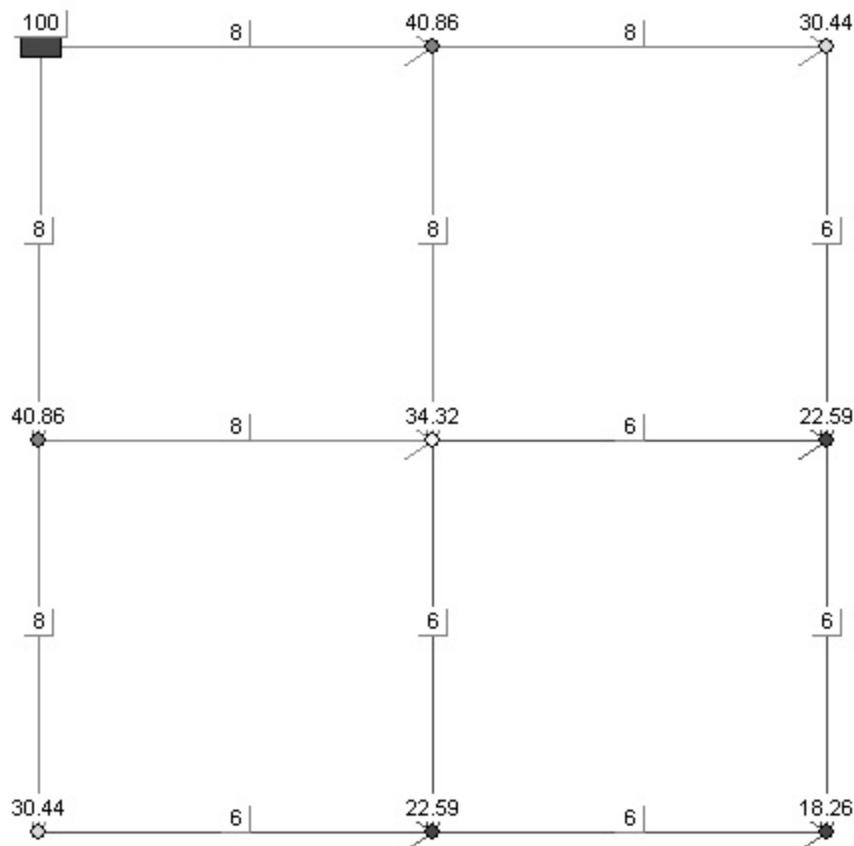
12.3.2 Soluciones con Programación por Restricciones (PR)

En esta investigación se implementaron 2 algoritmos de programación por restricciones.

- El primero de ellos parte de un modelo inicial en el que se cumplen las restricciones y disminuye los diámetros hasta que no sea posible disminuir 1 solo diámetro sin que se violen las restricciones hidráulicas.
- El segundo algoritmo parte de un modelo inicial en el que no se cumplen las restricciones y aumenta los diámetros hasta que se cumplan las restricciones hidráulicas.

Estos algoritmos son independientes, pero son complementarios.

La primera solución se encuentra al asignar el diámetro máximo (10 pulgadas en este ejemplo) a todos los tubos y aplicar el primer algoritmo de programación por restricciones.



Gráfica 12.4 Solución obtenida con el primer algoritmo de programación por restricciones

El costo de esta solución es:

$$\text{Costo} = \$174627.7$$

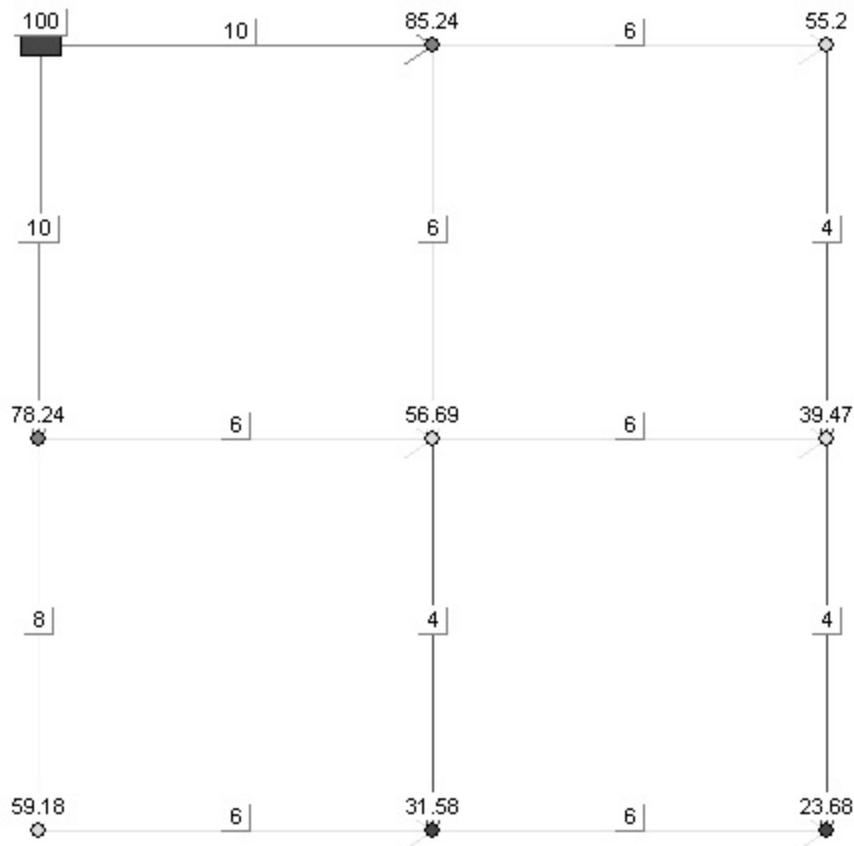
El código de esta solución es:

Código = 9868950

La solución se obtuvo en:

Simulaciones = 38

La segunda solución se encuentra al asignar el diámetro mínimo (4 pulgadas en este ejemplo) a todos los tubos y aplicar el segundo algoritmo de programación por restricciones.



Gráfica 12.5 Solución obtenida con el segundo algoritmo de programación por restricciones

El costo de esta solución es:

Costo = \$154617 .2

El código de esta solución es:

Código = 5657027

La solución se obtuvo en:

Simulaciones = 16

12.3.3 Soluciones con Algoritmos Genéticos (AG)

En el algoritmo genético implementado el número de simulaciones hidráulicas es función de dos parámetros del algoritmo:

1. Pob: El tamaño de la población de individuos del algoritmo en cada generación.
2. Gen: La cantidad de generaciones simuladas.

El número de simulaciones está dado por la siguiente ecuación:

$$\text{Simulaciones} = \text{Pob} \cdot \text{Gen} + K \cdot \text{Gen} + 1$$

$$K = 165$$

Ecuación 12-1

Inicialmente se hicieron varias corridas previas para estimar estos dos parámetros y para este ejemplo se determinó usar la siguiente configuración:

$$\text{Pob} = 2000$$

$$\text{Gen} = 100$$

Se realizaron dos corridas del algoritmo, el número de simulaciones hidráulicas en cada una es el siguiente:

$$\text{Simulaciones} = 216501$$

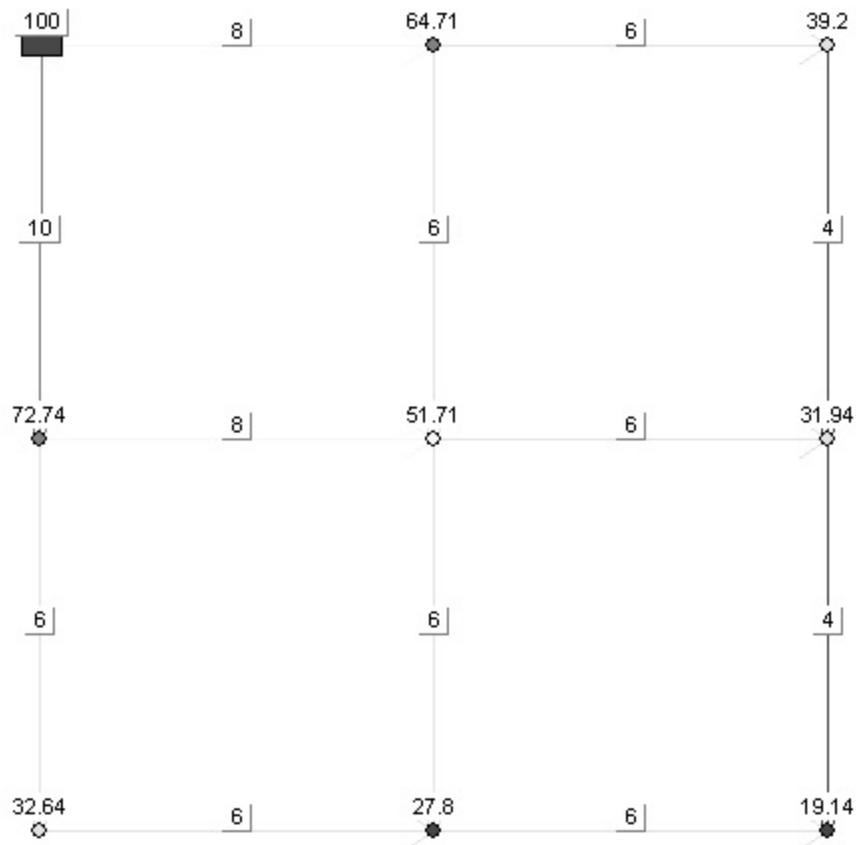
La primera ejecución del algoritmo arrojó los siguientes resultados:

Costo de la solución:

$$\text{Costo} = \$153008.7$$

El código de esta solución es:

$$\text{Código} = 5607878$$



Gráfica 12-6 Solución obtenida en la primera ejecución del AG

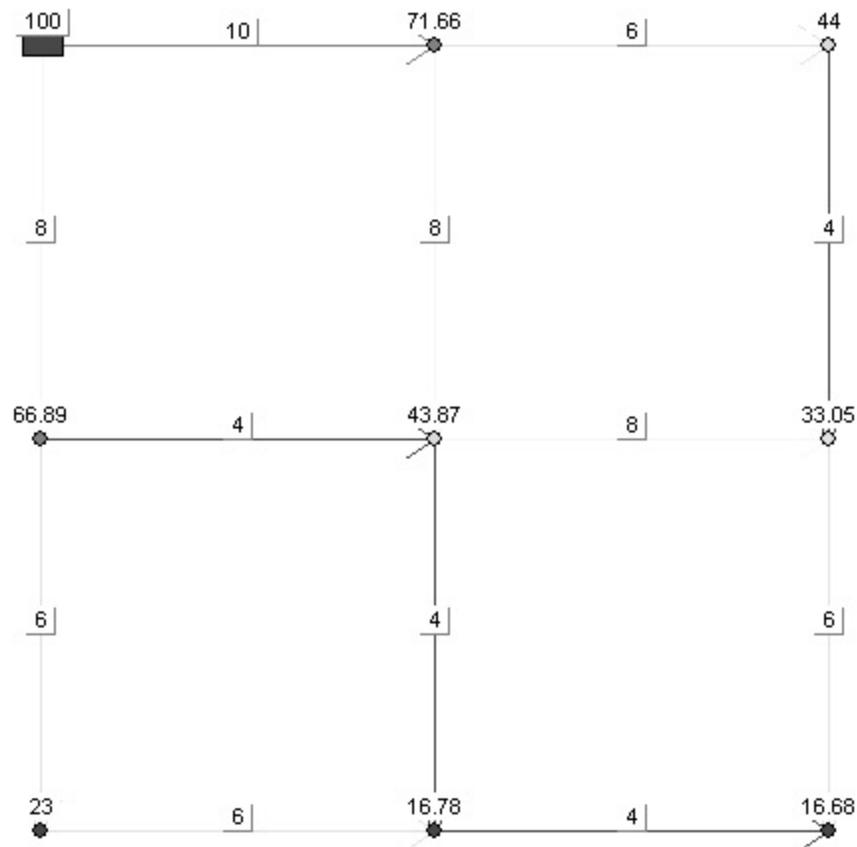
La segunda ejecución del algoritmo arrojó los siguientes resultados:

Costo de la solución:

$$\text{Costo} = \$148720 .8$$

El código de esta solución es:

$$\text{Código} = 8724883$$



Gráfica 12-7 Solución obtenida en la segunda ejecución del AG

12.3.4 Solución por Enumeración Exhaustiva

Este ejemplo se seleccionó de tal manera que fuera posible evaluar todos los posibles diseños (el tiempo de cálculo aproximado fue de 36 horas, pero este valor depende de la capacidad de procesamiento de la máquina en la que se ejecute el programa).

Costo de la solución:

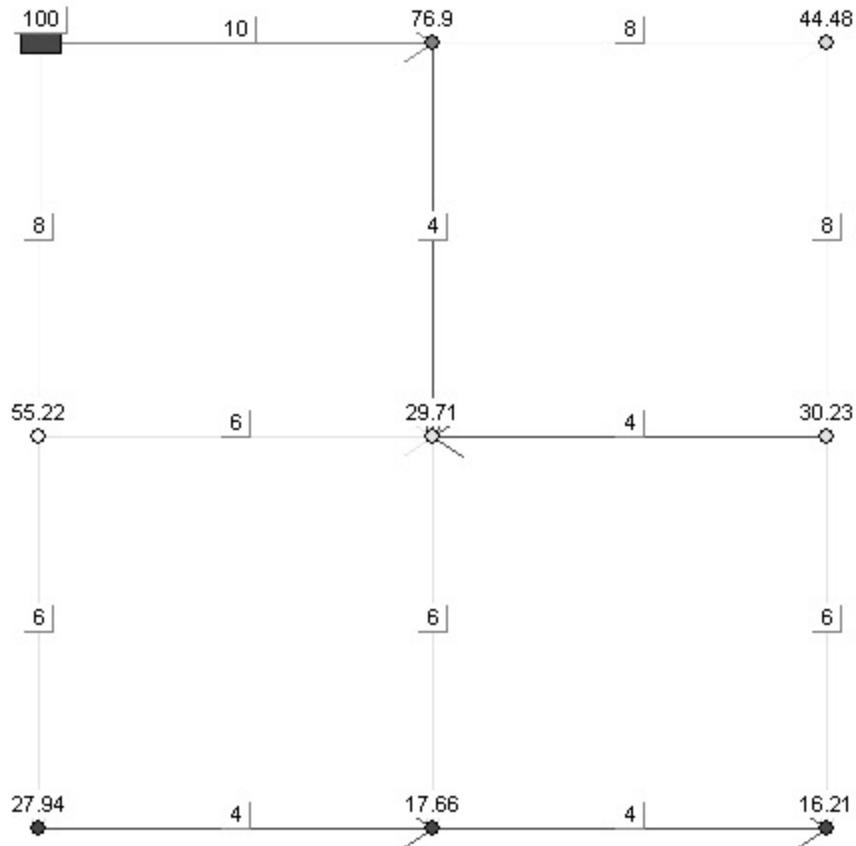
$$\text{Costo} = \$148720 .8$$

La solución se obtuvo en:

$$\text{Simulaciones} = 16777216$$

En este ejemplo se encontró que varios diseños diferentes dan exactamente el mismo costo.

A continuación se muestran dos de ellos.



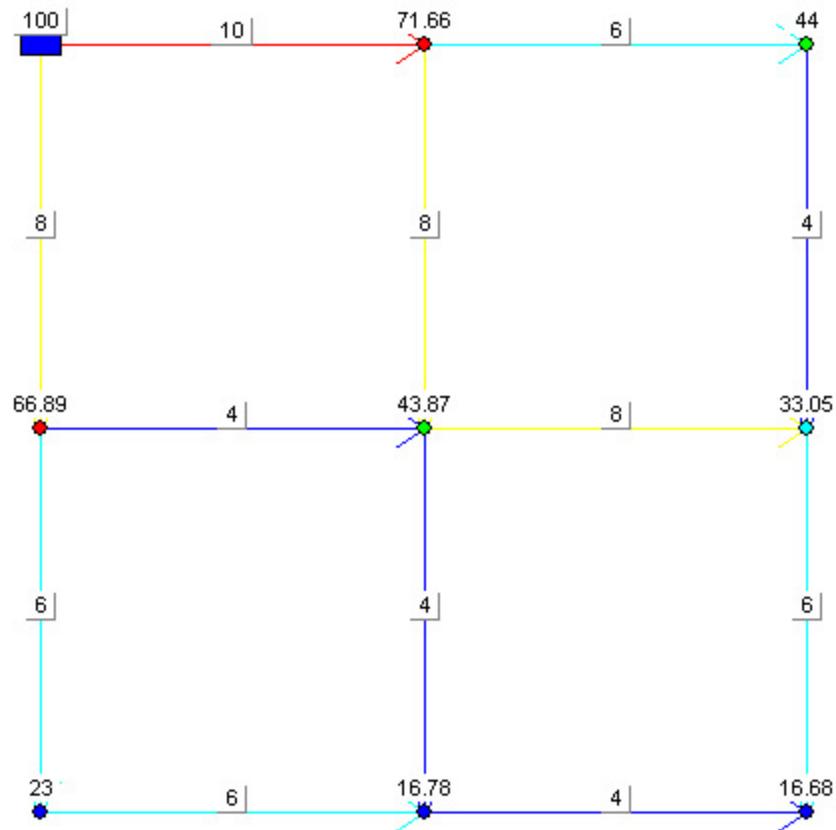
Gráfica 12-8 Solución obtenida por enumeración exhaustiva (1)

El código de esta solución es:

Código = 84631

12.4.1 Superficie óptima de presiones y Programación por Restricciones (SOP-PR)

Es esta sección se continua con el ejemplo de las secciones anteriores, pero esta vez se combina el resultado del prediseño con la superficie óptima de presiones y la programación por restricciones.



Gráfica 12-10 Solución obtenida al aplicar SOP y luego el algoritmo de PR

El costo de esta solución es:

$$\text{Costo} = \$148720.8$$

El código de esta solución es:

$$\text{Código} = 8724883$$

La solución se obtuvo en:

$$\text{Simulaciones} = 27$$

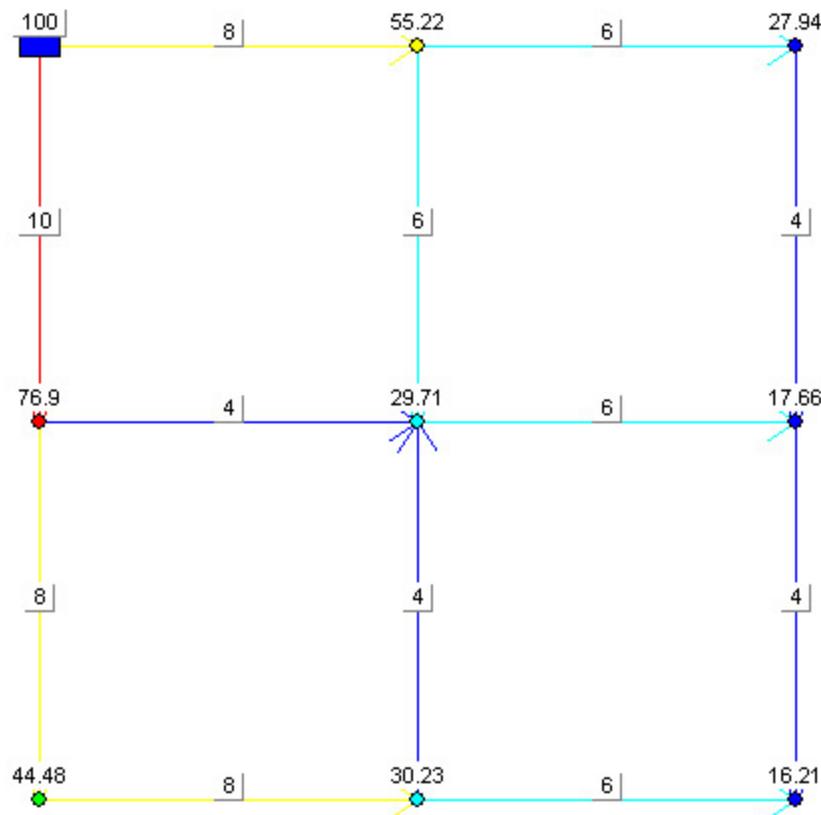
12.4.2 Superficie Óptima de Presiones y Algoritmos Genéticos (SOP-AG)

Es esta sección se continua con el ejemplo de las secciones anteriores, pero esta vez se combina el resultado del prediseño con la superficie óptima de presiones y los algoritmos genéticos.

Esta vez se corrió el algoritmo genético con los siguientes parámetros:

$$P_{bb} = 100$$

$$Gen = 50$$



Gráfica 12-11 Solución obtenida al aplicar SOP y luego el algoritmo genético

El costo de esta solución es:

$$\text{Costo} = \$148720 .8$$

El código de esta solución es:

$$\text{Código} = 5902786$$

La solución se obtuvo en:

$$\text{Simulaciones} = 13256$$

12.4.3 Programación por restricciones y Algoritmos Genéticos (PR-AG)

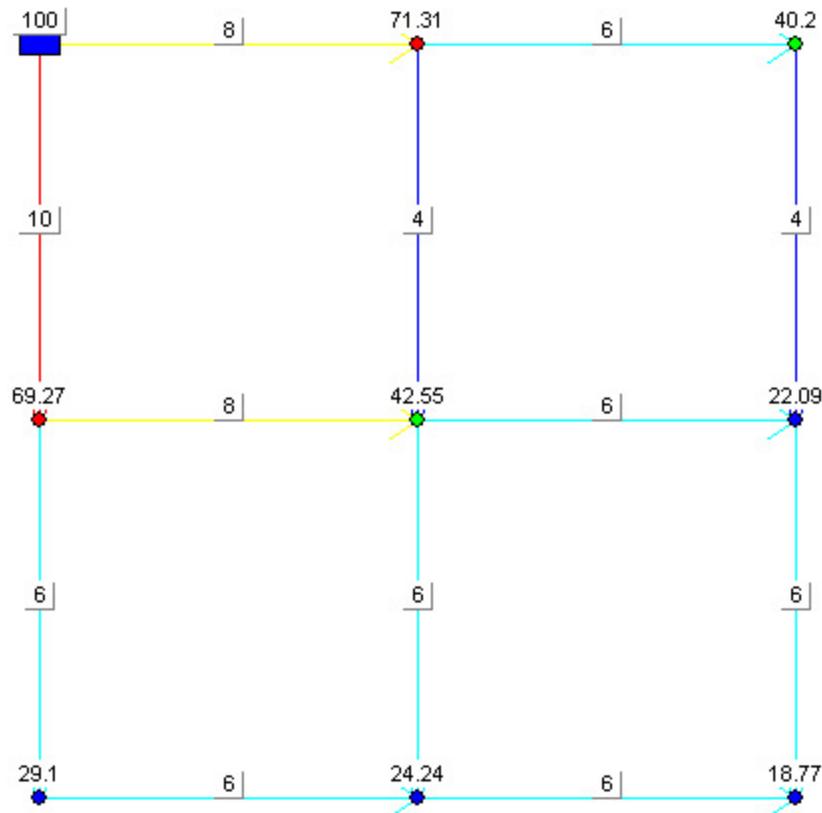
En esta sección se continúa con el ejemplo de las secciones anteriores, pero esta vez se combina el resultado obtenido con la ejecución de los dos algoritmos de programación por restricciones y después se intenta mejorar los resultados obtenidos aplicando un algoritmo genético.

Esta vez se corrió el algoritmo genético con los siguientes parámetros:

$$Pob = 100$$

$$Gen = 50$$

A continuación muestra el resultado de aplicar el primer algoritmo de programación por restricciones y después un algoritmo genético.



Gráfica 12-12 Solución obtenida al aplicar PR(1) y luego el algoritmo genético

El costo de esta solución es:

$$\text{Costo} = \$153008.7$$

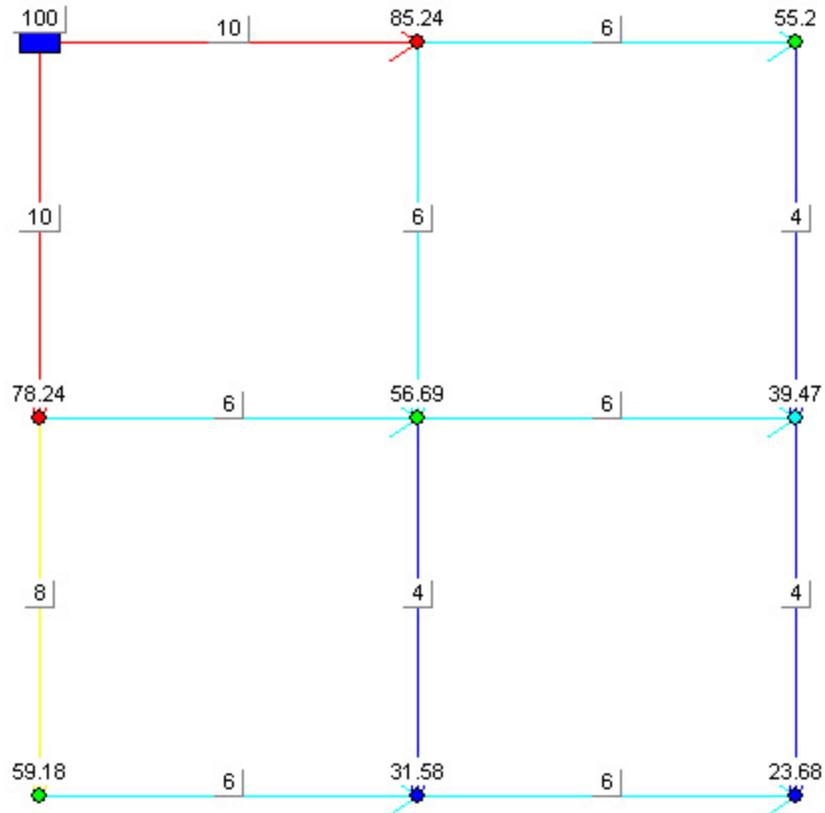
El código de esta solución es:

$$\text{Código} = 1413590$$

La solución se obtuvo en:

Simulaciones = 13289

A continuación muestra el resultado de aplicar el segundo algoritmo de programación por restricciones y después un algoritmo genético.



Gráfica 12-13 Solución obtenida al aplicar PR(2) y luego el algoritmo genético

El costo de esta solución es:

$$\text{Costo} = \$153008.7$$

El código de esta solución es:

$$\text{Código} = 5657042$$

La solución se obtuvo en:

$$\text{Simulaciones} = 13267$$

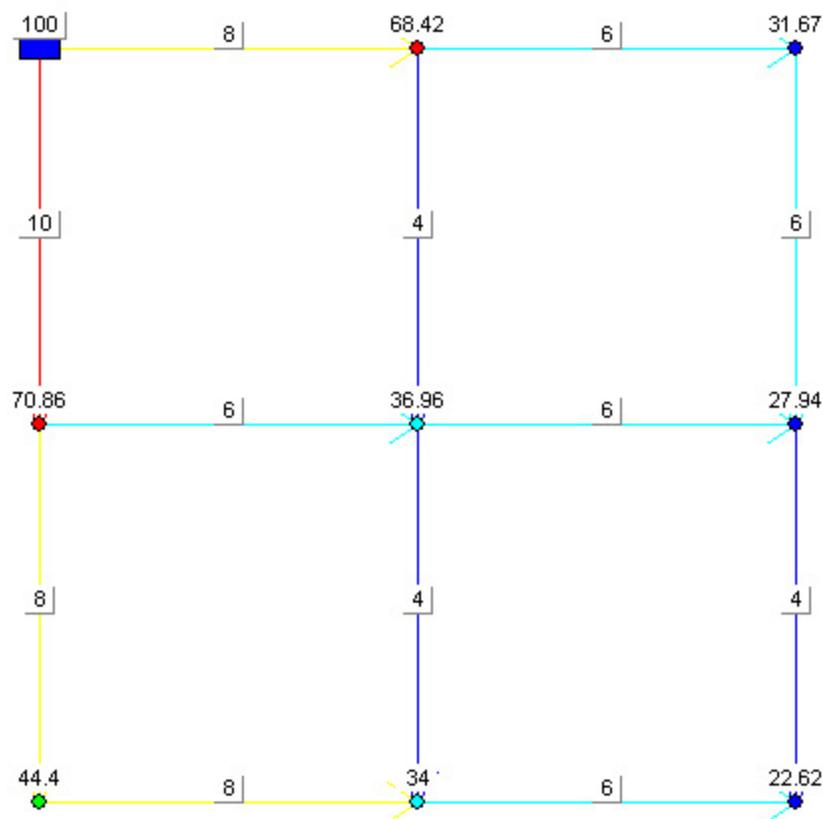
12.4.4 Algoritmos Genéticos y Programación por Restricciones (AG-PR)

Es esta sección se continua con el ejemplo de las secciones anteriores, pero esta vez se combina el resultado obtenido con una ejecución del algoritmo genético y después se intenta mejorar los resultados obtenidos aplicando el primer algoritmo de programación por restricciones en el caso de que la solución cumpla con las restricciones hidráulicas, en caso contrario se aplicaría el segundo algoritmo de programación por restricciones.

Esta vez se corrió el algoritmo genético con los siguientes parámetros:

$$P_{bb} = 100$$

$$Gen = 50$$



Gráfica 12-14 Resultado de la ejecución del algoritmo genético

El costo de esta solución es:

$$\text{Costo} = \$153008.7$$

El código de esta solución es:

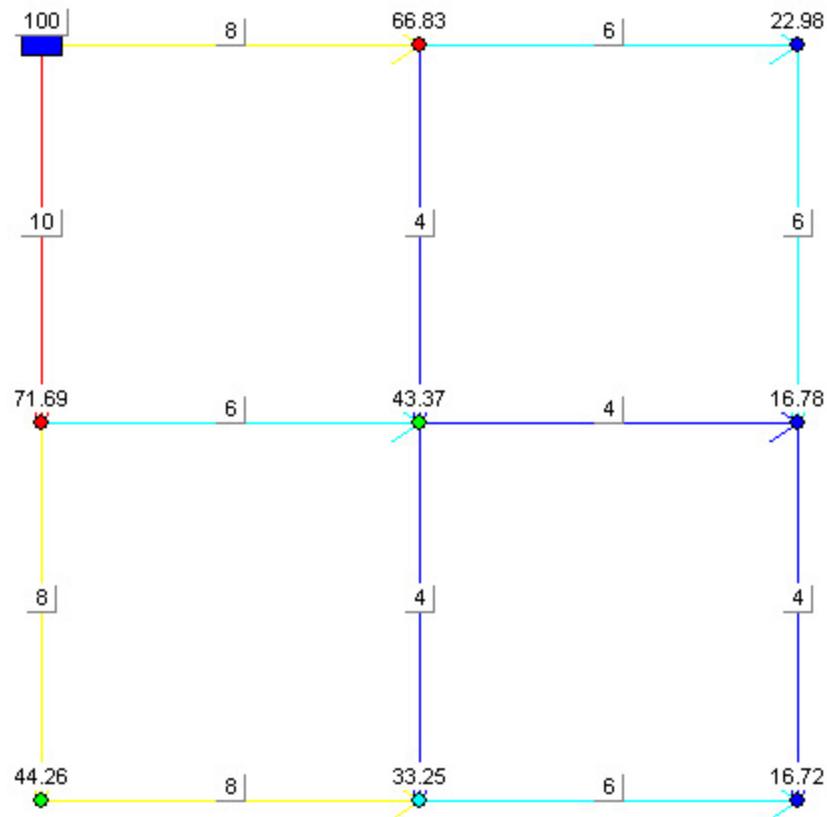
$$\text{Código} = 5657042$$

La solución se obtuvo en:

$$\text{Simulaciones} = 13251$$

Como se obtuvo un resultado que cumple con las restricciones hidráulicas, se puede aplicar el primer algoritmo de programación por restricciones.

Al aplicar el primer algoritmo de programación por restricciones se realizaron 19 nuevas simulaciones.



Gráfica 12-15 Resultado de la ejecución del algoritmo genético y después el primer algoritmo de programación por restricciones

El costo de esta solución es:

$$\text{Costo} = \$148720 .8$$

El código de esta solución es:

$$\text{Código} = 1721794$$

La solución se obtuvo en:

$$\text{Simulaciones} = 13270$$

12.4.5 Superficie Óptima de Presiones, Programación por Restricciones y Algoritmos Genéticos (SOP-PR-AG)

En esta sección se explica como se integran los 3 algoritmos: primero se calculan los diámetros con el algoritmo basado en el cálculo de la superficie óptima de presiones, luego se aplica el algoritmo de programación por restricciones y finalmente se aplica un algoritmo genético.

En este momento se pueden ver algunas de las características del sistema de diseño:

SOP-PR-AG Es equivalente a (SOP-PR)-AG, es decir es lo mismo aplicar las operaciones consecutivamente que aplicar el último operador al resultado de las otras dos.

En esta sección se hace uso de esta propiedad y de la capacidad de generar un diseño a partir de su codificación.

En una sección anterior se calculó (SOP-PR) y como resultado se obtuvo el diseño con el siguiente código:

$$\text{Código} = 5902786$$

El costo de esta solución es:

$$\text{Costo} = \$148720.8$$

El costo de esta solución corresponde al óptimo global de este problema.

Así que el aplicar el algoritmo genético no tiene efecto porque no es posible mejorar la situación inicial, porque ya se está en el óptimo global, sin embargo el algoritmo genético no es capaz de terminar el procesamiento antes de ejecutar todas las simulaciones definidas desde la configuración de la ejecución del algoritmo.

12.4.6 Superficie Óptima de Presiones, Algoritmos Genéticos y Algoritmo de Programación por Restricciones (SOP-AG-PR)

En esta sección se integran los 3 algoritmos, primero se calculan los diámetros con el algoritmo basado en el cálculo de la superficie óptima de presiones, luego se aplica un algoritmo genético y finalmente se aplica un algoritmo de programación por restricciones.

Al igual que en la sección anterior acá se pueden usar algunas de las características del sistema de diseño:

SOP- AG -PR es equivalente a (SOP-AG)-PR, es decir es lo mismo aplicar las operaciones consecutivamente que aplicar el último operador al resultado de las otras dos.

En una sección anterior se calculó (SOP-AG) y como resultado se obtuvo el diseño con el siguiente código:

$$\text{Código} = 5902786$$

El costo de esta solución es:

$$\text{Costo} = \$148720 .8$$

El costo de esta solución corresponde al óptimo global de este problema .

Aplicar el algoritmo de programación por restricciones no tiene efecto porque no es posible mejorar la situación inicial, porque ya se está en el óptimo global, el algoritmo se da cuenta de que no puede seguir mejorando y termina rápidamente, a diferencia del algoritmo genético que de todas maneras calcula todas las instancias, pues no tiene un claro criterio de convergencia.

12.4.7 Solución recomendada (Diseño Rápido)

Muchas de las combinaciones anteriores son capaces de llegar al óptimo global del ejemplo dado; sin embargo, hay que tener en cuenta que este ejemplo es muy pequeño y se seleccionó especialmente para poder conocer de antemano el valor del óptimo global al calcular el diseño con un método de enumeración exhaustiva. Sin embargo para ejemplos ligeramente más grandes ya no es posible hacerlo.

A pesar de esta limitación los algoritmos mostraron su efectividad individual y su capacidad de cooperación, lo que convierte el sistema de diseño en una poderosa herramienta para este fin.

Cada diseño depende de las características propias de la red, sin embargo el sistema de diseño fue pensado de tal manera que se pueda resolver cualquier tipo de red sin importar sus características, ya que el usuario del sistema puede determinar el orden de ejecución del proceso de optimización y se obtendrán cada vez mejores respuestas, en el peor de los casos la salida será igual a la entrada cuando el sistema no pueda seguir mejorando el diseño.

Con el fin de facilitar el proceso de diseño se ha establecido un orden que ha mostrado una buena calidad de resultados en un número muy pequeño de simulaciones.

Se define la operación “Diseño Rápido” como la siguiente secuencia de ejecución:

SOP-PR(2)-PR(1)

Esto se interpreta de la siguiente manera:

Se realiza el prediseño de la red con el método basado en la determinación de la superficie óptima de presiones y después se aplica el segundo algoritmo de programación por restricciones, esto garantiza que la solución obtenida cumple con todas las restricciones del problema y finalmente se aplica el segundo algoritmo de programación por restricciones para disminuir los diámetros hasta que no se pueda disminuir un solo diámetro sin violar las restricciones hidráulicas.

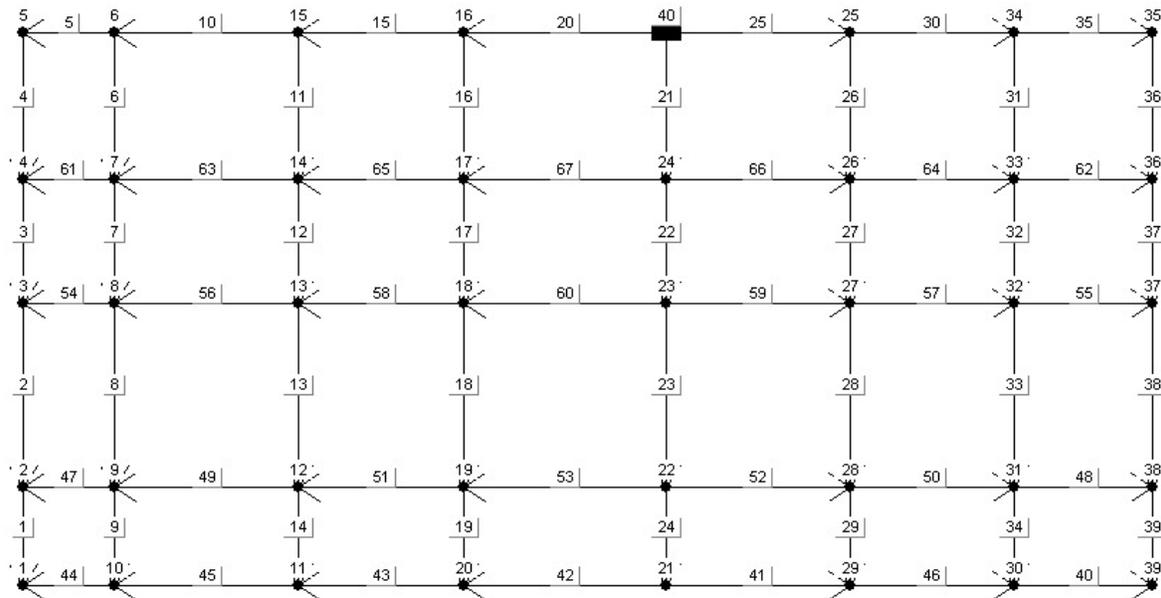
Esto da una excelente solución en un tiempo muy corto.

En términos de complejidad este algoritmo es en el peor de los casos $O(n)$. (Sección 15.1.2 Complejidad de PR (Programación por Restricciones)).

13 Ejemplos ilustrativos

En este capítulo se ilustra el procedimiento de solución mostrado en el capítulo anterior pero para una red mucho más grande y solo se aplican los operadores en un orden que de buenos resultados en pocas iteraciones. (Según el tamaño del problema).

13.1 Red 67 Tubos



Gráfica 13-1 Red de Ejemplo – Ids de los elementos

| EMBALSES | | | | |
|----------|--------|--------|--------|--------|
| ID | LGH | X | Y | Z |
| | Metros | Metros | Metros | Metros |
| 40 | 100 | 700 | 450 | 15 |

Tabla 13-1 Información Sobre el Embalse de la red

En este ejemplo todas las tuberías tienen una rugosidad de 0.0015 mm, no se consideran pérdidas menores y las longitudes y la conectividad de cada tubería se muestran en la siguiente tabla:

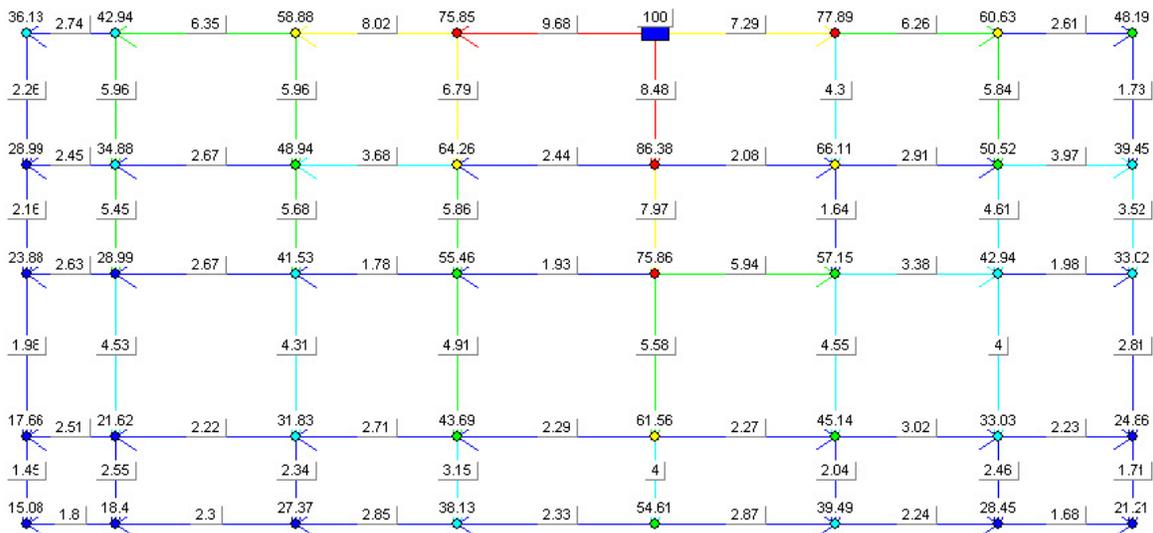
| ID | Union1 | Union2 | LONGITUD | ID | Union1 | Union2 | LONGITUD |
|----|--------|--------|----------|----|--------|--------|----------|
| | | | Metros | | | | Metros |
| 1 | 2 | 1 | 80 | 35 | 34 | 35 | 150 |
| 2 | 3 | 2 | 150 | 36 | 35 | 36 | 120 |
| 3 | 4 | 3 | 100 | 37 | 36 | 37 | 100 |
| 4 | 5 | 4 | 120 | 38 | 37 | 38 | 150 |
| 5 | 6 | 5 | 100 | 39 | 38 | 39 | 80 |
| 6 | 6 | 7 | 120 | 40 | 30 | 39 | 150 |
| 7 | 7 | 8 | 100 | 41 | 21 | 29 | 200 |
| 8 | 8 | 9 | 150 | 42 | 20 | 21 | 220 |
| 9 | 9 | 10 | 80 | 43 | 11 | 20 | 180 |
| 10 | 15 | 6 | 200 | 44 | 1 | 10 | 100 |
| 11 | 15 | 14 | 120 | 45 | 10 | 11 | 200 |
| 12 | 14 | 13 | 100 | 46 | 29 | 30 | 180 |
| 13 | 13 | 12 | 150 | 47 | 2 | 9 | 100 |
| 14 | 12 | 11 | 80 | 48 | 31 | 38 | 150 |
| 15 | 16 | 15 | 180 | 49 | 9 | 12 | 200 |
| 16 | 16 | 17 | 120 | 50 | 28 | 31 | 180 |
| 17 | 17 | 18 | 100 | 51 | 12 | 19 | 180 |
| 18 | 18 | 19 | 150 | 52 | 22 | 28 | 200 |
| 19 | 19 | 20 | 80 | 53 | 19 | 22 | 220 |
| 20 | 40 | 16 | 220 | 54 | 3 | 8 | 100 |
| 21 | 40 | 24 | 120 | 55 | 32 | 37 | 150 |
| 22 | 24 | 23 | 100 | 56 | 8 | 13 | 200 |
| 23 | 23 | 22 | 150 | 57 | 27 | 32 | 180 |
| 24 | 22 | 21 | 80 | 58 | 13 | 18 | 180 |
| 25 | 40 | 25 | 200 | 59 | 23 | 27 | 200 |
| 26 | 25 | 26 | 120 | 60 | 18 | 23 | 220 |
| 27 | 26 | 27 | 100 | 61 | 4 | 7 | 100 |
| 28 | 27 | 28 | 150 | 62 | 33 | 36 | 150 |
| 29 | 28 | 29 | 80 | 63 | 7 | 14 | 200 |
| 30 | 25 | 34 | 180 | 64 | 26 | 33 | 180 |
| 31 | 34 | 33 | 120 | 65 | 14 | 17 | 180 |
| 32 | 33 | 32 | 100 | 66 | 24 | 26 | 200 |
| 33 | 32 | 31 | 150 | 67 | 17 | 24 | 220 |
| 34 | 31 | 30 | 80 | | | | |

Tabla 13-2 Información sobre los tubos de la red

13.1.1 Red 67 Tubos topografía plana

| ID | X | Y | Z | DEMANDA | ID | X | Y | Z | DEMANDA |
|----|--------|--------|--------|---------|----|--------|--------|--------|---------|
| | Metros | Metros | Metros | Lps | | Metros | Metros | Metros | Lps |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 21 | 700 | 0 | 0 | 11 |
| 2 | 0 | 80 | 0 | 7 | 22 | 700 | 80 | 0 | 31 |
| 3 | 0 | 230 | 0 | 8 | 23 | 700 | 230 | 0 | 34 |
| 4 | 0 | 330 | 0 | 7 | 24 | 700 | 330 | 0 | 30 |
| 5 | 0 | 450 | 0 | 4 | 25 | 900 | 450 | 0 | 23 |
| 6 | 100 | 450 | 0 | 12 | 26 | 900 | 330 | 0 | 27 |
| 7 | 100 | 330 | 0 | 21 | 27 | 900 | 230 | 0 | 31 |
| 8 | 100 | 230 | 0 | 24 | 28 | 900 | 80 | 0 | 28 |
| 9 | 100 | 80 | 0 | 22 | 29 | 900 | 0 | 0 | 10 |
| 10 | 100 | 0 | 0 | 8 | 30 | 1080 | 0 | 0 | 9 |
| 11 | 300 | 0 | 0 | 10 | 31 | 1080 | 80 | 0 | 25 |
| 12 | 300 | 80 | 0 | 28 | 32 | 1080 | 230 | 0 | 27 |
| 13 | 300 | 230 | 0 | 31 | 33 | 1080 | 330 | 0 | 24 |
| 14 | 300 | 330 | 0 | 27 | 34 | 1080 | 450 | 0 | 13 |
| 15 | 300 | 450 | 0 | 15 | 35 | 1230 | 450 | 0 | 6 |
| 16 | 480 | 450 | 0 | 24 | 36 | 1230 | 330 | 0 | 11 |
| 17 | 480 | 330 | 0 | 29 | 37 | 1230 | 230 | 0 | 12 |
| 18 | 480 | 230 | 0 | 33 | 38 | 1230 | 80 | 0 | 11 |
| 19 | 480 | 80 | 0 | 30 | 39 | 1230 | 0 | 0 | 4 |
| 20 | 480 | 0 | 0 | 10 | | | | | |

Tabla 13-3 Información sobre los Nodos de la red



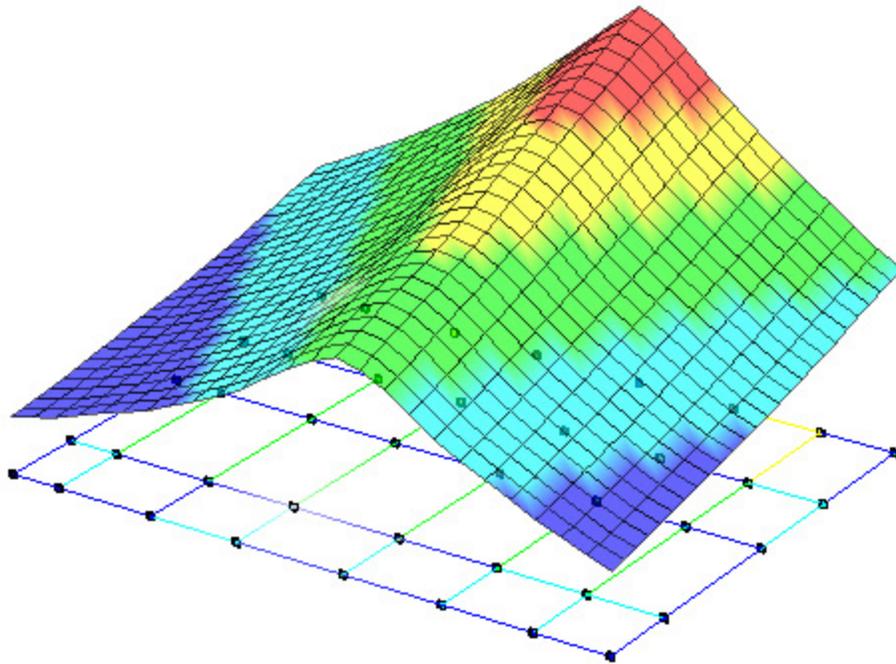
Gráfica 13-2 Red después de aplicar SOP- diámetros en los tubos y presiones en los nodos

El costo de esta solución es (esta solución no es factible por las restricciones comerciales):

$$\text{Costo} = \$122081.6$$

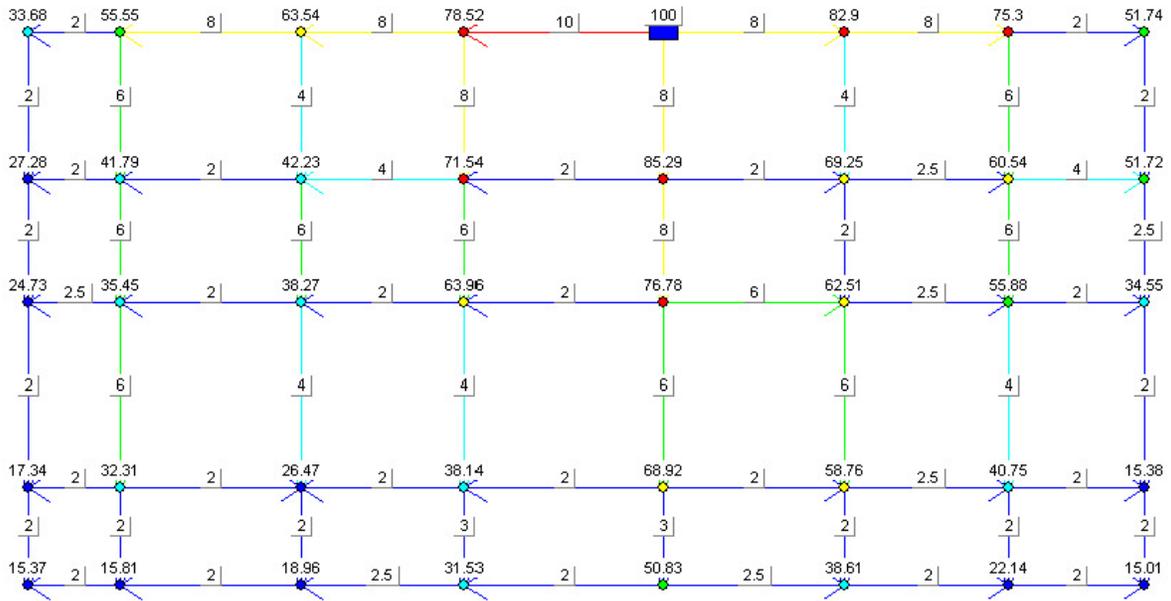
Esta solución se obtuvo en:

$$\text{Simulaciones} = 6$$



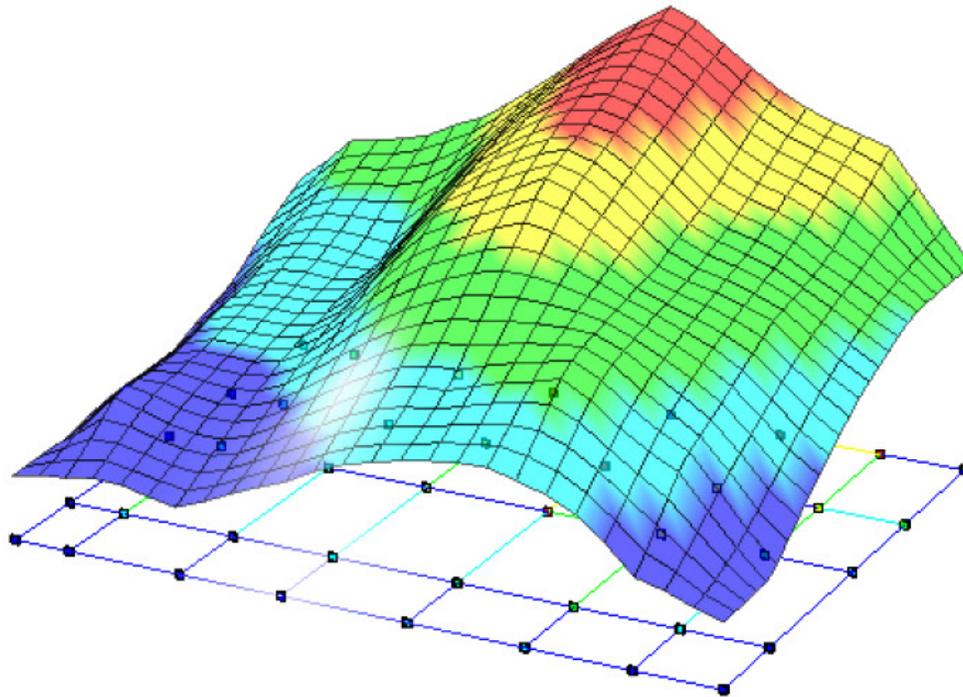
Gráfica 13-3 LGH en los nodos después de aplicar SOP

Al aplicar el segundo algoritmo de programación por restricciones se obtiene:



Gráfica 13-4 Diámetros en los tubos y presiones en los nodos

El algoritmo requirió 145 nuevas simulaciones para completar el diseño.



Gráfica 13-5 LGH en los nodos después de aplicar SOP-PR(1)

El costo de esta solución es:

$$\text{Costo} = \$123151 .1$$

Esta solución se obtuvo en:

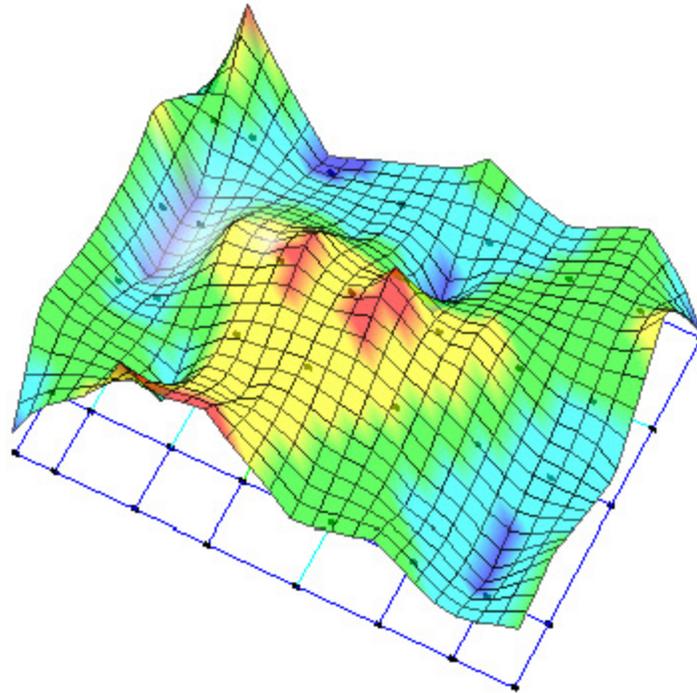
Simulaciones = 151

13.1.2 Red 67 Tubos topografía

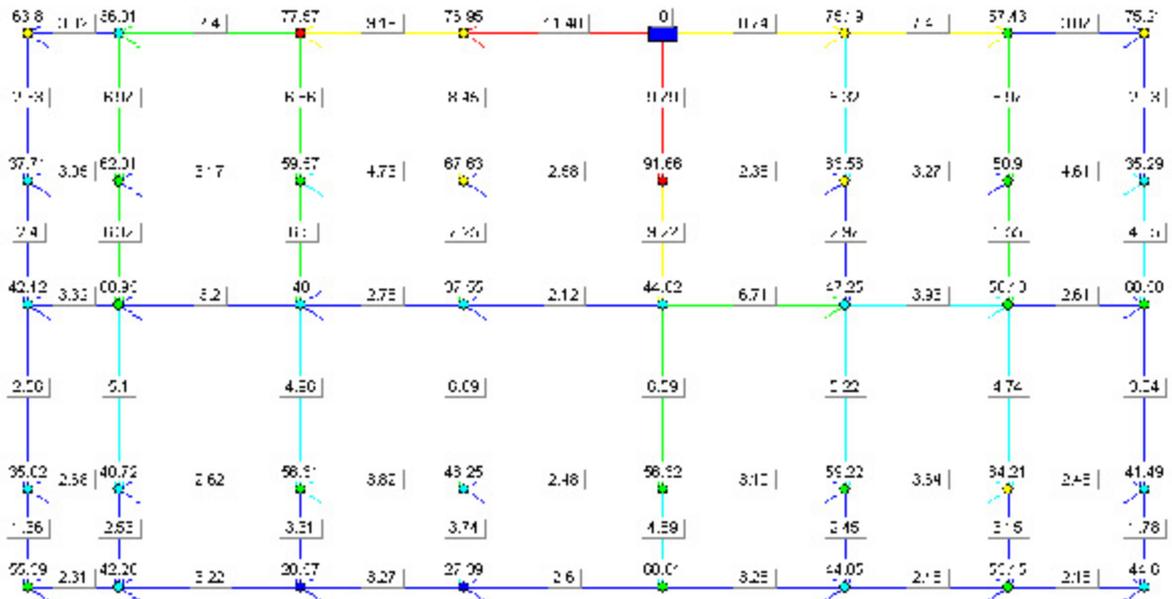
En esta sección se va a resolver el mismo ejemplo de la red anterior, pero modificando la topografía.

| ID | Z | ID | Z | ID | Z |
|----|--------|----|--------|----|--------|
| | Metros | | Metros | | Metros |
| 1 | 6.42 | 15 | 3.93 | 29 | 27.93 |
| 2 | 27.96 | 16 | 12.19 | 30 | 14.70 |
| 3 | 23.66 | 17 | 16.30 | 31 | 5.69 |
| 4 | 30.37 | 18 | 42.41 | 32 | 16.17 |
| 5 | 7.49 | 19 | 26.42 | 33 | 26.86 |
| 6 | 38.34 | 20 | 44.77 | 34 | 24.88 |
| 7 | 8.71 | 21 | 19.57 | 35 | 1.49 |
| 8 | 7.12 | 22 | 26.38 | 36 | 37.49 |
| 9 | 24.04 | 23 | 44.32 | 37 | 9.33 |
| 10 | 21.06 | 24 | 2.21 | 38 | 24.75 |
| 11 | 46.78 | 25 | 14.87 | 39 | 20.01 |
| 12 | 13.04 | 26 | 21.18 | 40 | 26.05 |
| 13 | 33.70 | 27 | 33.47 | | |
| 14 | 17.47 | 28 | 16.12 | | |

Tabla 13-4 Topografía del Ejemplo



Gráfica 13-6 Topografía del Ejemplo



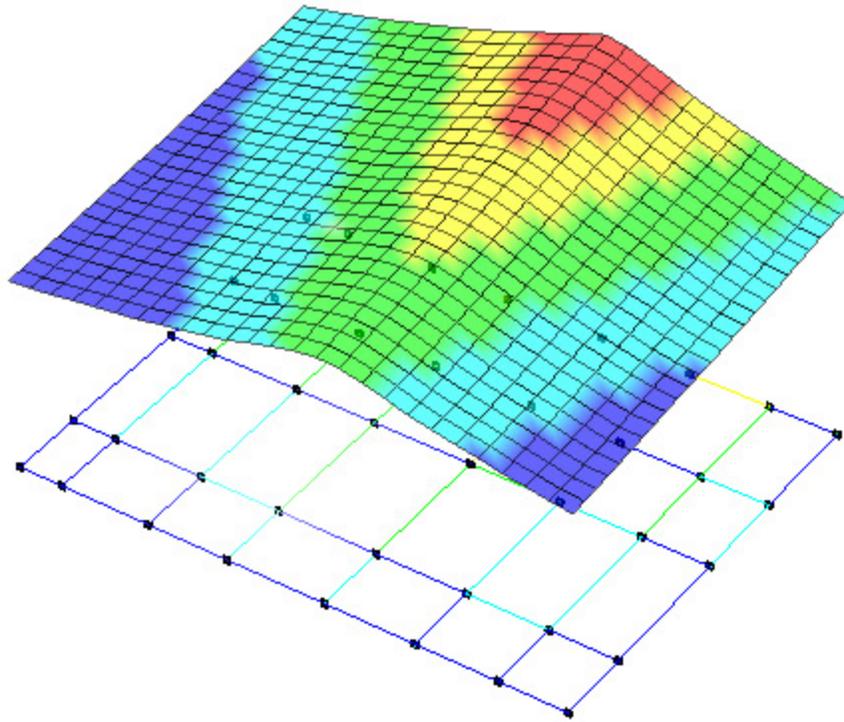
Gráfica 13-7 Diámetros en los tubos y presión en los nodos después de aplicar SOP

El costo de esta solución es (esta solución no es factible por las restricciones comerciales):

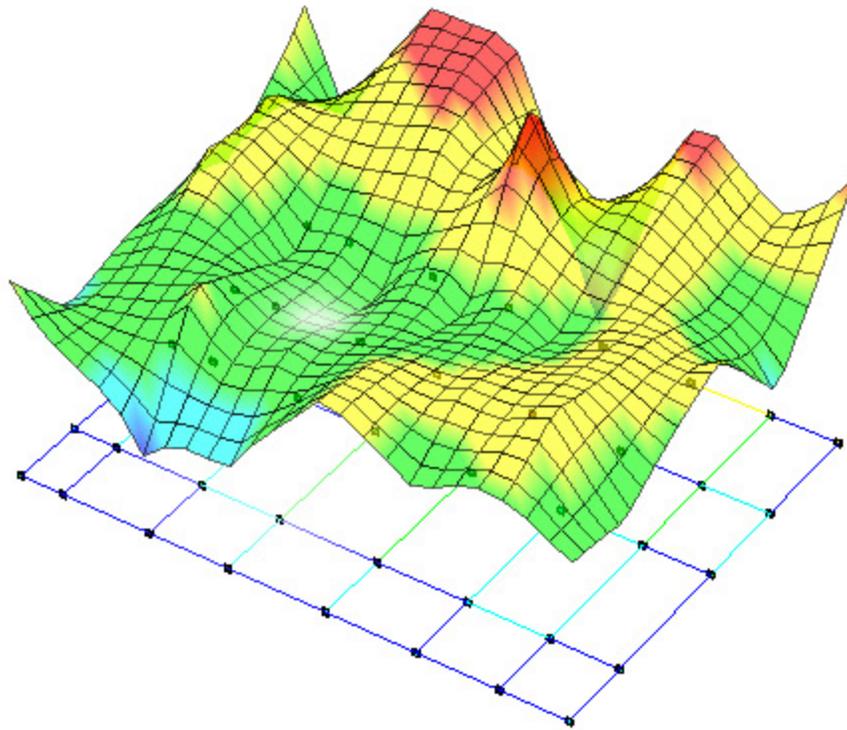
$$\text{Costo} = \$156194.3$$

Esta solución se obtuvo en:

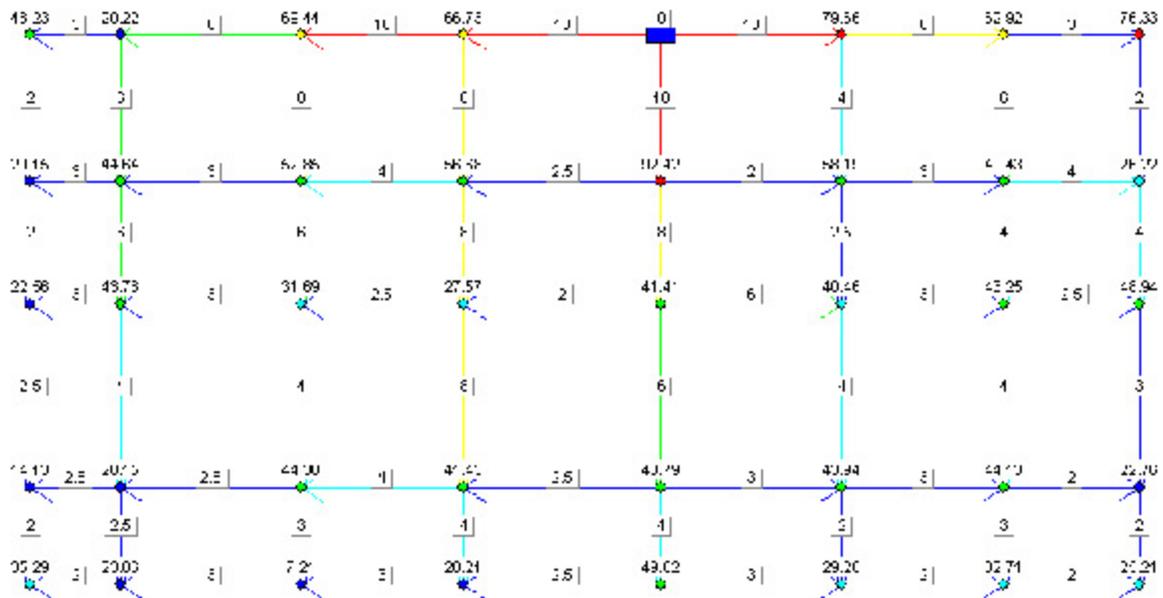
$$\text{Simulaciones} = 6$$



Gráfica 13.8 LGH después de aplicar SOP



Gráfica 13-9 Presión después de aplicar SOP



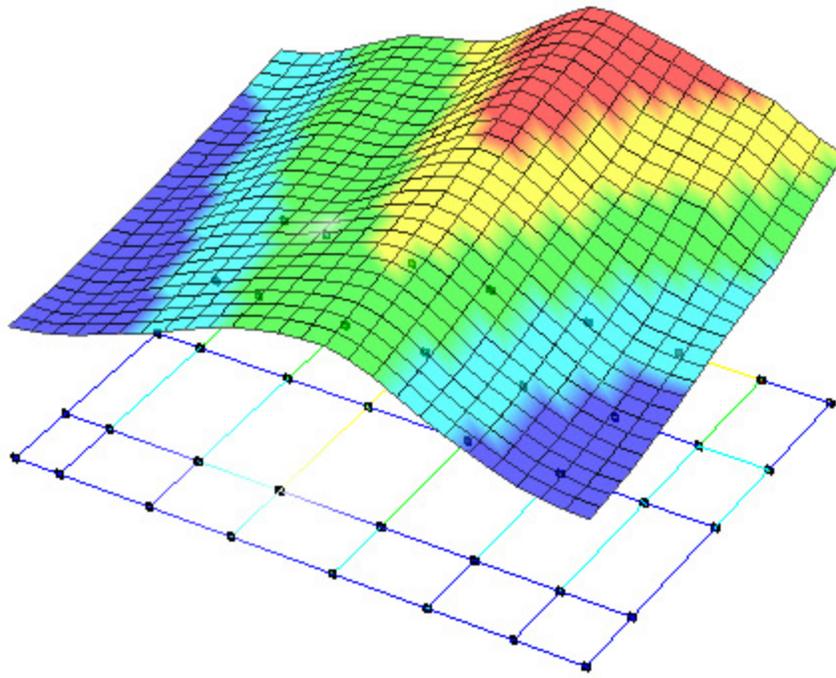
Gráfica 13-10 Diámetros en los tubos y presión en los nodos después de aplicar SOP-PR(1)

El costo de esta solución es:

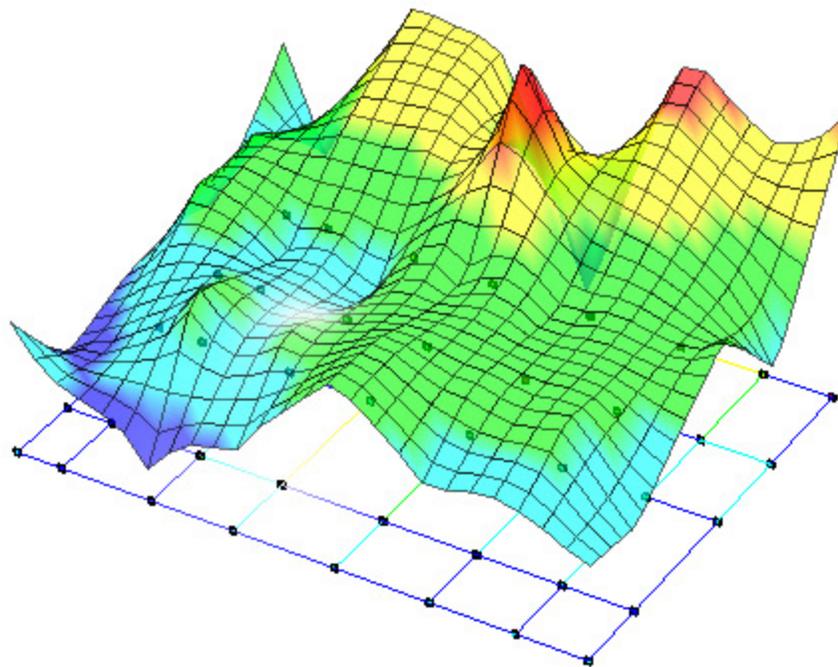
$$\text{Costo} = \$143789.6$$

Esta solución se obtuvo en:

Simulaciones = 127



Gráfica 13-11 LGH después de aplicar SOP-PR(1)

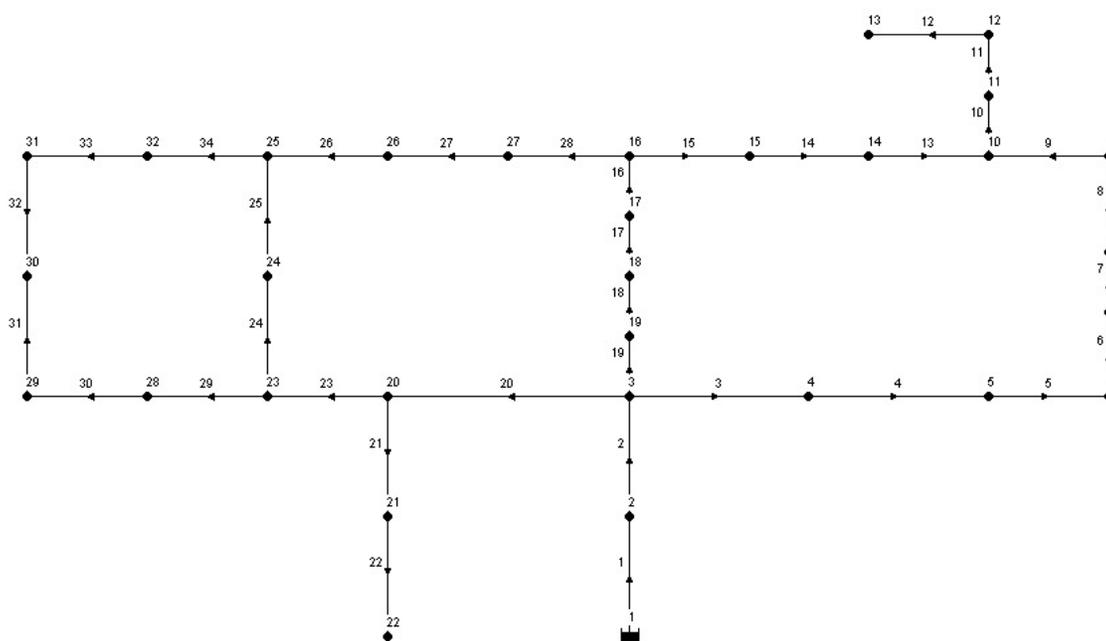


Gráfica 13-12 Presión después de aplicar SOP-PR(1)

14 Ejemplos de la literatura

14.1 Red de Hanoi

La red de Hanoi fue presentada por primera vez por Fujiwara y Khang (1990). Es una red con una sola fuente; está compuesta por 3 circuitos básicos, 31 nodos, un embalse y 34 tubos. Todos los nodos se encuentran a la misma elevación y no hay pérdidas menores en las tuberías. En este ejemplo para el cálculo de las pérdidas por fricción se usa la ecuación de Hazen-Williams con un coeficiente $C_{hw}=130$ para todas las tuberías de la red. La LGH de la fuente es de 100 mca (metros de cabeza de agua) y la presión mínima requerida es de 30 mca. La Gráfica 14-1, la Tabla 14-1 y la Tabla 14-2 muestran la información necesaria para reproducir este ejemplo.



Gráfica 14-1 La red de Hanoi

| ID | Demanda m^3/h | ID | Demanda m^3/h | ID | Demanda m^3/h | ID | Demanda m^3/h |
|----|--------------------|----|--------------------|----|--------------------|----|--------------------|
| 2 | 890 | 10 | 525 | 18 | 1345 | 26 | 900 |
| 3 | 850 | 11 | 500 | 19 | 60 | 27 | 370 |
| 4 | 130 | 12 | 560 | 20 | 1275 | 28 | 290 |
| 5 | 725 | 13 | 940 | 21 | 930 | 29 | 360 |
| 6 | 1005 | 14 | 615 | 22 | 485 | 30 | 360 |
| 7 | 1350 | 15 | 280 | 23 | 1045 | 31 | 105 |
| 8 | 550 | 16 | 310 | 24 | 820 | 32 | 805 |
| 9 | 525 | 17 | 865 | 25 | 170 | | |

Tabla 14-1- Demandas en los nodos de la red de Hanoi

| ID | Longitud Metros | ID | Longitud Metros | ID | Longitud Metros | ID | Longitud Metros |
|----|--------------------|----|--------------------|----|--------------------|----|--------------------|
| 1 | 100 | 10 | 950 | 19 | 400 | 28 | 750 |
| 2 | 1350 | 11 | 1200 | 20 | 2200 | 29 | 1500 |
| 3 | 900 | 12 | 3500 | 21 | 1500 | 30 | 2000 |
| 4 | 1150 | 13 | 800 | 22 | 500 | 31 | 1600 |
| 5 | 1450 | 14 | 500 | 23 | 2650 | 32 | 150 |
| 6 | 450 | 15 | 550 | 24 | 1230 | 33 | 860 |
| 7 | 850 | 16 | 2730 | 25 | 1300 | 34 | 950 |
| 8 | 850 | 17 | 1750 | 26 | 850 | | |
| 9 | 800 | 18 | 800 | 27 | 300 | | |

Tabla 14-2– Longitudes de las tuberías de la red de Hanoi

El conjunto de diámetros comerciales y sus correspondientes costos por unidad de longitud se muestran en la Tabla 14-3.

| Diámetro Pulgadas | Costo US\$/m |
|----------------------|-----------------|
| 12 | 45.73 |
| 16 | 70.4 |
| 20 | 98.39 |
| 24 | 129.33 |
| 30 | 180.74 |
| 40 | 278.28 |

Tabla 14-3– Diámetros comerciales y costos para la red de Hanoi

El tamaño del espacio de búsqueda es 6^{34} (aproximadamente 2.86×10^{26}).

La mejor solución reportada en la literatura es \$6.182 millones, encontrado por el algoritmo genético rápido desordenado (fmGA - *fast messy genetic algorithm*) en 113626 simulaciones (Wu et al. 2001). Algunos autores han encontrado soluciones más baratas (Savic & Walters 1997¹⁶; Cunha & Sousa 1999¹⁷; Wu et al. 2001) pero al hacer una simulación hidráulica de estos modelos en EPANET 2 se obtienen presiones por debajo de 30 mca.

¹⁶ Dragan A. Savic, Godfrey A. Walters. (1995) "Genetic operators and constraint handling for pipe network optimization". Adicional.

¹⁷ Maria da Conceição Cunha, Joaquim Sousa (1999) "Water Distribution network design optimization: Simulated annealing approach". Journal of Water Resources Planning and Management, Vol. 125, No 4, July/August 1999. ASCE.

Es importante aclarar que EPANET 2 se ha convertido en un estándar de simulación hidráulica y que por lo tanto se puede usar como herramienta para validar los resultados obtenidos por diferentes investigadores.

Durante el desarrollo de este problema se encontraron varias alternativas de solución, algunas de ellas tienen un costo inferior al mejor reportado en la literatura (US\$6.182 millones). La Tabla 14-4 muestra los costos obtenidos y el número de iteraciones necesario para encontrar esa solución. Cada nueva solución se halla a partir de la solución anterior, esto permite seguir mejorando los resultados, aunque cada vez se necesiten más iteraciones y la diferencia del costo es cada vez menor; al parecer el método de solución se acerca cada vez más al mínimo global.

| Solución | Factible | Simulaciones | Costo |
|-----------------|-----------------|---------------------|--------------|
| S1 | No | 5 | 4991614.4 |
| S2 | Si | 55 | 6716576.8 |
| S3 | Si | 148 | 6320782.0 |
| S4 | Si | 6743 | 6312416.1 |
| S5 | Si | 6708 | 6275406.3 |
| S6 | Si | 6708 | 6235929.1 |
| S7 | Si | 22145 | 6226363.2 |
| S8 | Si | 22145 | 6209021.9 |
| S9 | Si | 22203 | 6190516.7 |
| S10 | Si | 28853 | 6169952.1 |
| S11 | Si | 44348 | 6161275.7 |

Tabla 14-4 – Soluciones obtenidas en el ejemplo de la red de Hanoi

En la Tabla 14-4 se puede ver que la solución S3 es relativamente buena y solo se necesitaron 148 simulaciones hidráulicas. Es importante notar que se encontraron 2 soluciones con un costo inferior a US\$6.182 millones (S10 con US\$6.170 millones y S11 con US\$6.161 millones), además se necesitó un menor número de iteraciones (S10 con 28853 y S11 con 44348).

La Tabla 14-5 muestra una comparación entre varias soluciones halladas por diferentes autores:

| Autores | Costo | Factible |
|--|--------------|-----------------|
| | US\$ | |
| Savic & Walters GA1 1997 | 6072412 | NO |
| Savic & Walters GA2 1997 | 6187165 | Si |
| Cunha & Sousa SA* 1999 | 6056163 | NO |
| Wu et al. fmGA1 2001 | 6182000 | Si |
| Shie-Yui & Md. Atiquzzaman SCE** 2004 | 6224265 | Si |
| AOC S10 2004 (Uniandes) *** | 6169952 | Si |
| AOC S11 2004(Uniandes) *** | 6161276 | Si |
| AOC (C&S) 2004(Uniandes) *** | 6080919 | Si |

Tabla 14-5 – Comparación de las Soluciones al problema de la red de Hanoi

*SA = Simulated Annealing (recocido simulado)

**SCE = Shuffled Complex Evolution (Evolución Compleja Mezclada)

*** AOC= “Algoritmo de Optimización Combinatoria” es el resultado de esta investigación.

En la Tabla 14-5 “Factible” significa que al hacer la simulación hidráulica con EPANET las presiones en los nodos son superiores a 30 mca. Esta tabla muestra que durante esta investigación se obtuvieron 3 nuevas soluciones menores a US\$6.182 millones (la mejor solución previamente reportada en la literatura).

El método de solución da muy buenos resultados, además es posible encontrar nuevas soluciones a partir de otras existentes previamente.

La solución “AOC (C&S) 2004” se obtuvo al aplicar el AOC a la solución publicada por Cunha y Sousa (1999), en determinado momento se consideró está como la mejor solución, pero después se determinó que al correrla con EPANET dan soluciones por debajo de 30 mca; sin embargo al introducir este modelo en el AOC se obtiene una solución de menor costo a las publicadas anteriormente (Tabla 14-5).

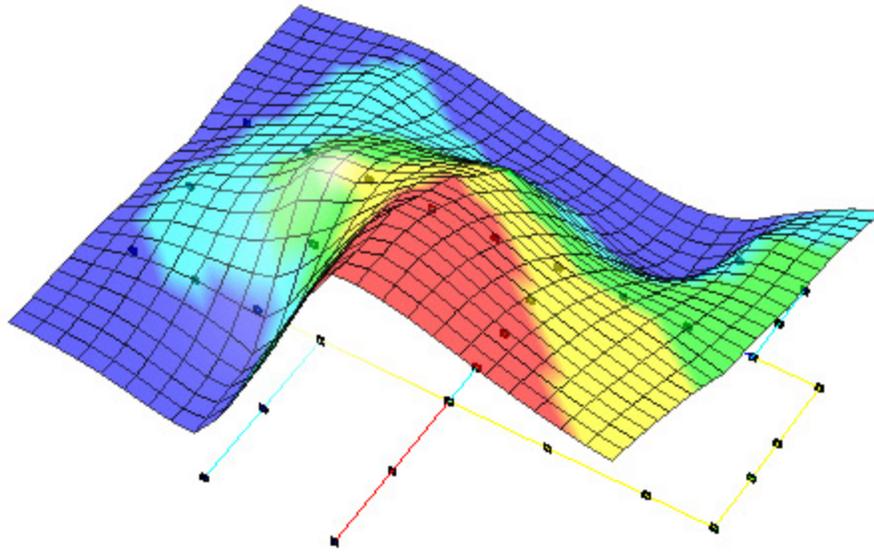
La Tabla 14-6 muestra las presiones que se obtienen en los nodos para las 3 soluciones propuestas.

| Solución | AOC S10 2004 | AOC S11 2004 | AOC (C&S) 2004 | Solución | AOC S10 2004 | AOC S11 2004 | AOC (C&S) 2004 |
|-----------------|-------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| ID | Presión | Presión | Presión | ID | Presión | Presión | Presión |
| | M.C.A. | M.C.A. | M.C.A. | | M.C.A. | M.C.A. | M.C.A. |
| 2 | 97.14 | 97.14 | 97.14 | 18 | 51.03 | 46.63 | 49.93 |
| 3 | 61.67 | 61.67 | 61.67 | 19 | 58.03 | 53.27 | 55.09 |
| 4 | 57.37 | 57.33 | 56.92 | 20 | 50.6 | 50.5 | 50.61 |
| 5 | 52.04 | 51.96 | 51.03 | 21 | 41.25 | 41.15 | 41.26 |
| 6 | 46.49 | 46.34 | 44.81 | 22 | 36.09 | 35.98 | 36.1 |
| 7 | 45.21 | 45.05 | 43.35 | 23 | 44.51 | 44.31 | 44.53 |
| 8 | 39.24 | 38.99 | 41.62 | 24 | 39.36 | 39.04 | 38.93 |
| 9 | 38.1 | 37.83 | 40.23 | 25 | 36.14 | 35.72 | 35.34 |
| 10 | 37.28 | 36.99 | 39.2 | 26 | 32.48 | 31.83 | 31.7 |
| 11 | 35.72 | 35.43 | 37.64 | 27 | 31.52 | 30.56 | 30.76 |
| 12 | 34.56 | 34.27 | 34.22 | 28 | 35.88 | 35.72 | 38.94 |
| 13 | 30.36 | 30.07 | 30.01 | 29 | 31.2 | 31.08 | 30.13 |
| 14 | 32.35 | 31.63 | 35.52 | 30 | 30.26 | 30.17 | 30.42 |
| 15 | 31.64 | 30.59 | 33.72 | 31 | 30.73 | 30.29 | 30.7 |
| 16 | 32.02 | 30.78 | 31.3 | 32 | 32 | 31.57 | 33.18 |
| 17 | 40.34 | 37.01 | 33.41 | | | | |

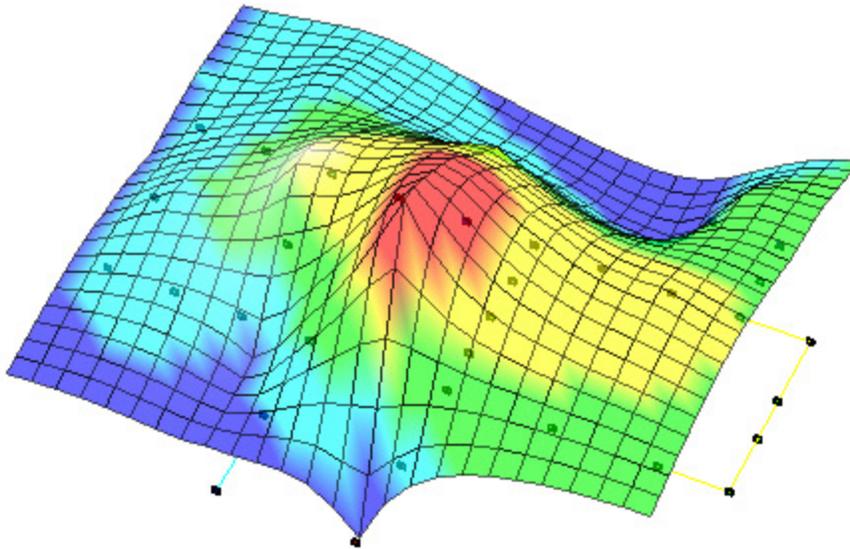
Tabla 14-6 – Presiones en los Nodos en las soluciones encontradas para la red de Hanoi

| Solución | AOC S10 2004 | AOC S11 2004 | AOC (C&S) 2004 | Solución | AOC S10 2004 | AOC S11 2004 | AOC (C&S) 2004 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| Costo (US\$) | 6169952 | 6161276 | 6080919 | Costo (US\$) | 6169952 | 6161276 | 6080919 |
| ID | DIAMETRO | DIAMETRO | DIAMETRO | ID | DIAMETRO | DIAMETRO | DIAMETRO |
| | Pulgadas | Pulgadas | Pulgadas | | Pulgadas | Pulgadas | Pulgadas |
| 1 | 40 | 40 | 40 | 18 | 24 | 24 | 24 |
| 2 | 40 | 40 | 40 | 19 | 24 | 20 | 20 |
| 3 | 40 | 40 | 40 | 20 | 40 | 40 | 40 |
| 4 | 40 | 40 | 40 | 21 | 20 | 20 | 20 |
| 5 | 40 | 40 | 40 | 22 | 12 | 12 | 12 |
| 6 | 40 | 40 | 40 | 23 | 40 | 40 | 40 |
| 7 | 30 | 30 | 40 | 24 | 30 | 30 | 30 |
| 8 | 40 | 40 | 40 | 25 | 30 | 30 | 30 |
| 9 | 40 | 40 | 40 | 26 | 20 | 20 | 20 |
| 10 | 30 | 30 | 30 | 27 | 12 | 12 | 12 |
| 11 | 30 | 30 | 24 | 28 | 12 | 12 | 12 |
| 12 | 24 | 24 | 24 | 29 | 16 | 16 | 16 |
| 13 | 16 | 16 | 20 | 30 | 16 | 16 | 12 |
| 14 | 12 | 12 | 16 | 31 | 12 | 12 | 12 |
| 15 | 12 | 12 | 12 | 32 | 12 | 16 | 16 |
| 16 | 16 | 16 | 12 | 33 | 16 | 16 | 16 |
| 17 | 20 | 20 | 16 | 34 | 20 | 20 | 24 |

Tabla 14-7 – Diámetros de las tuberías en las soluciones encontradas para la red de Hanoi



Gráfica 14-2 LGH Red de Hanoi

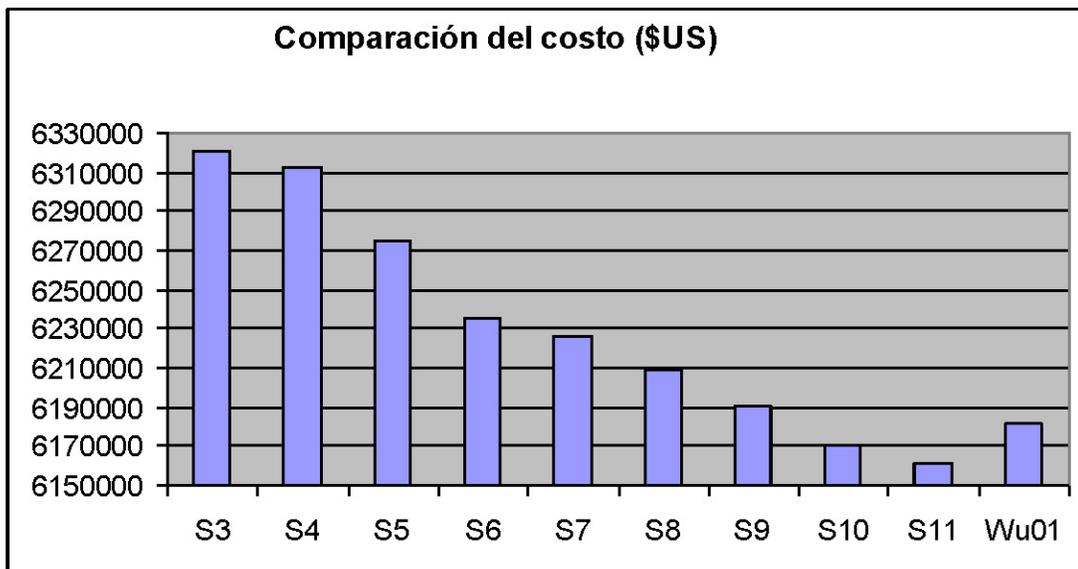


Gráfica 14-3 Presiones en la red de Hanoi

Las siguientes tablas y Gráficas muestran la comparación entre las soluciones obtenidas y la mejor solución reportada previamente en la literatura para el problema de la red de Hanoi.

| Solución | Costo |
|----------|-----------|
| S1 | 4991614.4 |
| S2 | 6716576.8 |
| S3 | 6320782 |
| S4 | 6312416.1 |
| S5 | 6275406.3 |
| S6 | 6235929.1 |
| S7 | 6226363.2 |
| S8 | 6209021.9 |
| S9 | 6190516.7 |
| S10 | 6169952.1 |
| S11 | 6161275.7 |
| Wu01 | 6182000 |

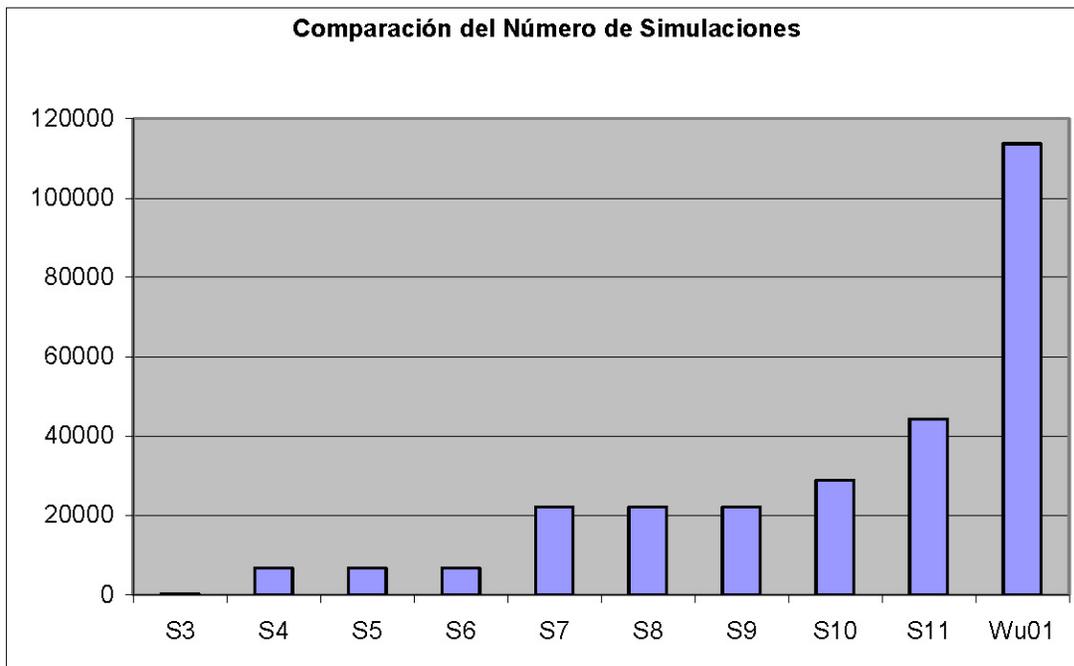
Tabla 8 Comparación de los Costos Obtenidos en esta investigación (S1-S11) versus la mejor Solución Previamente Reportada en la Literatura (Wu01).



Gráfica 14-4 Comparación de los Costos Obtenidos en esta investigación (S1-S11) versus la mejor Solución Previamente Reportada en la Literatura (Wu01).

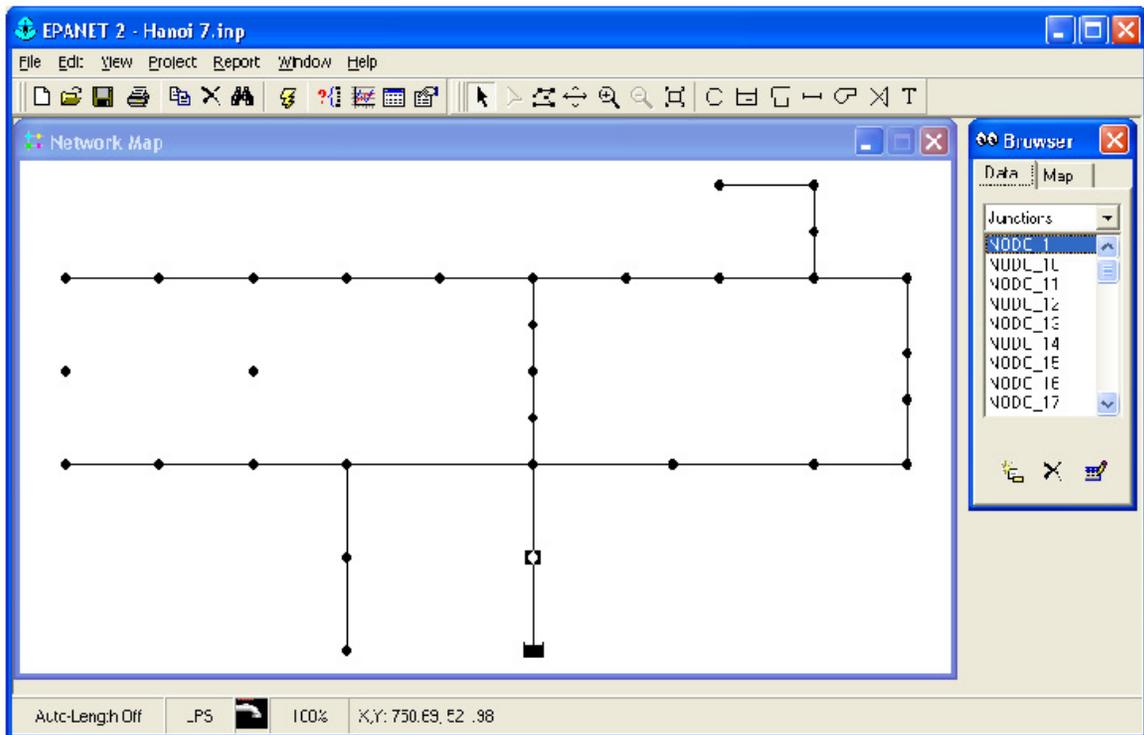
| Solución | Número de Simulaciones |
|----------|------------------------|
| S1 | 5 |
| S2 | 55 |
| S3 | 148 |
| S4 | 6743 |
| S5 | 6708 |
| S6 | 6708 |
| S7 | 22145 |
| S8 | 22145 |
| S9 | 22203 |
| S10 | 28853 |
| S11 | 44348 |
| Wu01 | 113626 |

Tabla 9 Comparación del número de simulaciones necesarios para obtener una solución en esta investigación (S1-S11) versus la mejor Solución Previamente Reportada en la Literatura (Wu01).

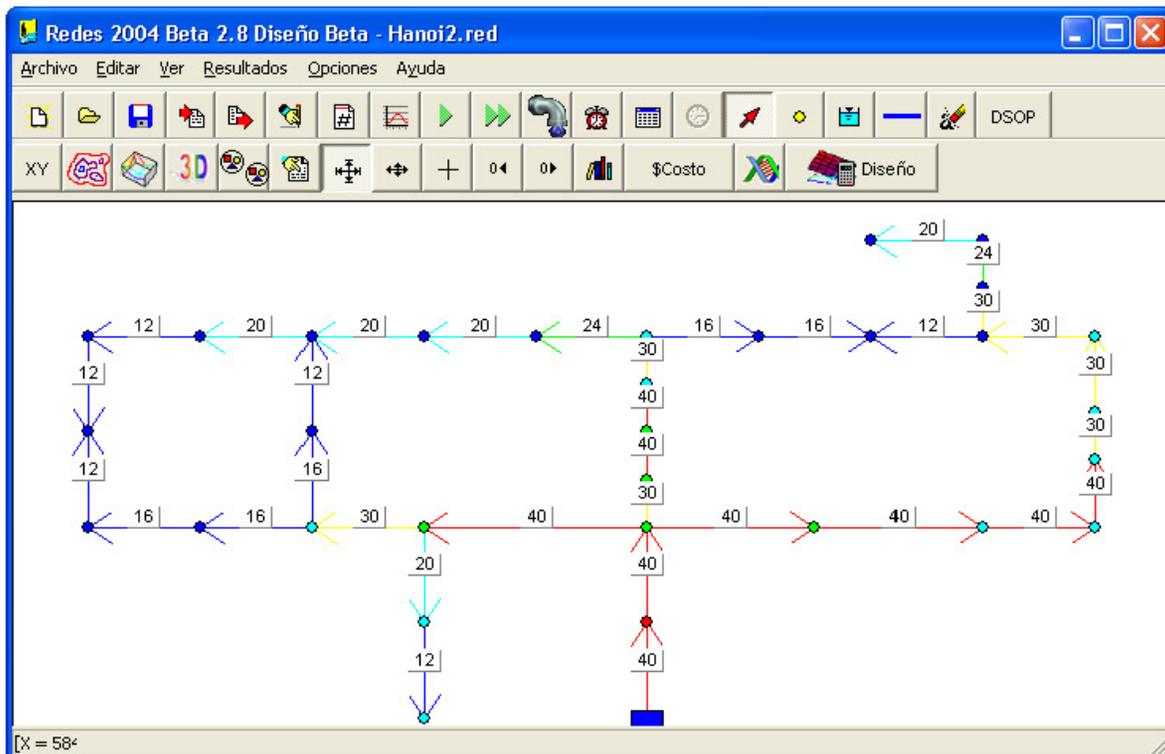


Gráfica 14-5 Comparación del número de simulaciones necesarios para obtener una solución en esta investigación (S1-S11) versus la mejor Solución Previamente Reportada en la Literatura (Wu01).

A continuación se muestran unas pantallas que ilustran el uso de los programas EPANET 2 y REDES 2004.



Gráfica 14-6 Programa EPANET 2 - Red de Hanoi



Gráfica 14-7 Programa REDES 2004 – Red de Hanoi

15 Análisis de Resultados

Los resultados obtenidos en esta investigación son muy buenos ya que hacen posible el diseño de redes de distribución de agua potable con criterios de optimización económica e hidráulica.

La aplicación de AOC (Algoritmos de Optimización Combinatoria) como los implementados en esta investigación permite realizar buenos diseños en un número muy pequeño de simulaciones hidráulicas.

La solución encontrada en algunos casos es la óptima, en los demás casos la solución obtenida está “cerca” al óptimo global, el nivel de cercanía depende del tamaño de la red y del número de simulaciones que se realizan dependiendo de los algoritmos individuales que se apliquen (SOP, PR, AG, etc).

La mejor aplicación de AOC para una red particular depende de las características de la misma, sin embargo es recomendable aplicar SOP como primer algoritmo para acelerar la convergencia de la solución, aproximar al siguiente diámetro comercial y disminuir los diámetros con un algoritmo de PR (Programación por restricciones) después de lo cual es posible aplicar un AG (Algoritmo Genético) y volver a aplicar un algoritmo de PR; este procedimiento se puede repetir hasta encontrar soluciones satisfactorias.

Como cada algoritmo es independiente, el sistema es el resultado de la aplicación secuencial de cada algoritmo de forma independiente, mejorando los resultados en cada aplicación o en el peor de los casos no mejorar la solución inicial (Por ejemplo cuando ya se ha obtenido el óptimo global o un óptimo local relativamente bueno).

Estas características hacen que la aplicación del sistema de diseño sea muy flexible y se pueda ajustar a las particularidades de cada red.

Los algoritmos obtenidos son de baja complejidad lo cual implica una gran velocidad de ejecución y esto a su vez posibilita el diseño optimizado de redes de gran tamaño (Redes de más de 1000 Tubos).

15.1 Complejidad de los Algoritmos de Optimización Combinatoria

En esta sección se brevemente describe la complejidad de cada uno de los algoritmos de optimización combinatoria implementados en esta investigación.

Nota:

El método de cálculo por si mismo tiene determinada complejidad, pero con el fin de poder establecer la complejidad de los algoritmos de diseño se puede suponer que la complejidad de una simulación hidráulica es $O(1)$.

15.1.1 Complejidad de SOP (Superficie Óptima de Presiones)

- La determinación exacta de la complejidad de este algoritmo está fuera del alcance de esta investigación, sin embargo se da una aproximación basada en las estadísticas de ejecución del algoritmo.
- El algoritmo de diseño basado en la determinación de la Superficie Óptima de Presiones converge muy rápido.
(Complejidad Estimada Estadísticamente).

$$\begin{aligned} \text{Simulacion} & \text{ es } \propto \sqrt{NT} \\ \text{Complejidad} & \text{ } d = O(\sqrt{n}) \\ n & = NT \end{aligned}$$

Donde NT es el número de tubos de la red, según esta ecuación para una red de 100 tubos se requerirían aproximadamente 10 simulaciones hidráulicas.

- Los diámetros resultantes NO son discretos, pero se pueden aproximar con alguno de los otros métodos.
(AG – PR).

15.1.2 Complejidad de PR (Programación por Restricciones)

- En este caso es posible estimar exactamente la complejidad del algoritmo, dadas las características del mismo.
- En el peor de los casos el algoritmo de programación por restricciones necesita:

$$\text{Simulación es} = D_{com} \cdot NT$$

$$\text{Complejidad} = O(n)$$

$$n = NT$$

Donde D_{com} es el número de diámetros disponibles para realizar el diseño y NT es el número de tubos de la red.

Esta demostración es sencilla dado que D_{com} es constante (varia entre 1 y 20 aproximadamente, aunque en la mayoría de los casos está alrededor de 6 diámetros diferentes).

En el peor de los casos (por ejemplo cuando hay que aumentar todos los diámetros desde el diámetro mínimo o cuando hay que disminuir todos los diámetros desde el diámetro máximo) hay que hacer $D_{com} \cdot NT$ simulaciones.

Así que si K es una constante arbitraria, $D_{com}=K$ y $NT=n$ si tiene que la complejidad es:

$$O(D_{com} \cdot NT)$$

=

$$O(K \cdot n)$$

=

$$O(n)$$

- El algoritmo de PR converge muy rápidamente y se obtienen muy buenos resultados (especialmente cuando se combina con SOP), en los casos prácticos la constante K está alrededor de 2 o 3 cuando se combina con SOP.

15.1.3 Complejidad de AG (Algoritmos Genéticos)

En el caso del Algoritmo Genético es difícil saber a priori la cantidad de generaciones y el tamaño de la población necesaria para obtener buenos resultados, por lo tanto la determinación de la complejidad de un algoritmo genético es muy difícil de estimar

No se asegura la convergencia, aunque en la práctica se encuentran buenas soluciones después de un número relativamente grande de simulaciones.

Algoritmo Estocástico → Cada ejecución da respuestas diferentes.

16 Conclusiones

Este documento describe el trabajo de investigación que se realizó como trabajo de grado de maestría. El objetivo principal fue resolver el problema de diseño de redes de distribución de agua potable.

Las conclusiones a las que se llegaron pueden resumirse así:

- La aplicación de un algoritmo basado en la superficie óptima de presiones se puede ver como una heurística que orienta la solución del problema de diseño de redes de distribución de agua potable. La solución obtenida no respeta las restricciones comerciales de disponibilidad de diámetros, pero al usarse en conjunto con un método de optimización basado en programación por restricciones se puede llegar a buenas soluciones en un número muy pequeño de iteraciones. Además es posible combinar esta solución con otros métodos de optimización como los algoritmos genéticos o muchos otros disponibles en la literatura universal.
- Los algoritmos desarrollados en esta investigación son de baja complejidad lo que implica un pequeño número de simulaciones hidráulicas y por lo tanto una excelente velocidad de ejecución.
- La metodología desarrollada en esta investigación ha probado su efectividad al encontrar buenas soluciones con un pequeño número de simulaciones hidráulicas en problemas de diseño que han sido tratadas ampliamente por varios autores en las últimas décadas, de hecho se han encontrado mejores soluciones al problema de la red de Hanoi en un número menor de iteraciones que la mejor solución reportada previamente en la literatura.

- El aporte más significativo fue desarrollar un sistema que acopla varios módulos de optimización independientes como una línea de producción, en donde cada investigador puede elegir el orden en el que se ensambla dicho sistema. Este enfoque permite el desarrollo de múltiples métodos de optimización como los que están disponibles en la literatura.
- En esta investigación se han encontrado varias soluciones más económicas que las reportadas en la literatura, al problema del diseño de la red de Hanoi, algunas de ellas se han encontrado usando únicamente los métodos desarrollados en esta investigación, pero también es posible ingresar soluciones encontradas en otras investigaciones (Cunha y Sousa 1999; Savic y Walters 1997) y encontrar mejores soluciones que cumplen con todas las restricciones del problema.
- El AOC (Algoritmo de Optimización Combinatoria) desarrollado en esta investigación permite el diseño de redes de distribución de agua potable incluyendo criterios de optimización. Estos criterios se pueden modificar para incluir costos asociados a las fugas de agua en la red y parámetros de calidad del agua. El AOC hace factible el diseño optimizado de redes de distribución de redes relativamente grandes (más de 1000 tubos), ya que se llegan a buenas soluciones con un pequeño número de simulaciones hidráulicas.
- Al seguir un procedimiento similar al desarrollado en esta investigación se obtienen soluciones muy buenas al problema de diseño de redes de distribución de agua potable, el siguiente paso sería incluir el efecto de las fugas de agua en los nodos desde el diseño y usar un modelo calibrado de la red con el propósito de servir de herramienta operativa.

- Con la metodología propuesta se llega a una buena aproximación para superar el problema de diseño de redes de distribución de agua potable de costo mínimo.

17 Recomendaciones

- Los algoritmos desarrollados durante esta investigación han probado su efectividad y su bondad para resolver problemas combinatorios, se recomienda continuar con la investigación con el fin de aplicar este tipo de metodología a otros problemas prácticos de difícil solución por métodos tradicionales, por ejemplo el problema de la calibración de redes de distribución de agua potable.
- Se pueden integrar nuevos algoritmos con el fin de contar con más componentes en el sistema y poder usarlos adecuadamente para tener mayor riqueza, flexibilidad y potencia de cómputo para resolver problemas combinatorios.
- Algunos de los algoritmos se pueden paralelizar, sería muy conveniente usar esta característica para aprovechar mejor la potencia de las máquinas disponibles y lograr una optimización del tiempo de cálculo para permitir resolver problemas cada vez más complejos.
- Se recomienda estudiar en más detalle el diseño de redes de distribución de agua potable bajo ambiente de fugas.

18 Referencias

1. Yates, D.F., A.B. Templeman & T.B. Boffey (1984). "The computational complexity of the problem of determining least capital cost designs for water supply networks". Engg. Optimization, 7(2), 142-155.
2. Horowitz E., Sahni S.j. "Fundamentals of computer Algorithms". Computer Science Press. (1978).
3. Villalba , G.A. "REDES 2004: Manual del Usuario" (2004), Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados CIACUA, Universidad de Los Andes, Departamento de Ingeniería Civil.
4. Rossman, L.A. "EPANET, Users Manual" (1993), Risk Reduction Engineering Laboratory, U.S. Environmental Protection Agency, Cincinnati, Ohio.
5. Saldarriaga, J.G. "Hidráulica de Tuberías" (1998). Editorial McGrawHill, Bogotá, Colombia.
6. Wu. I-pai, "Design of Drip irrigation Lines,"(1975). Journal of the irrigation and Drainage Division,, Vol. 101, No IR4, December 1975. ASCE..
7. Baptiste P, Le Pape C, Nuijten W. "Constraint-based scheduling : applying constraint programming to scheduling problems" (2001).
8. Saraswat V, Van Hentenryck P. "Principles and Practice of Constraint Programming" (1995).
9. Lopez , C.S. "Diseño de Redes de Distribución de Agua Potable de Mínimo Costo con Algoritmos Genéticos". Proyecto de Grado en Ingeniería Civil. Universidad de Los Andes, Junio de 2003 .
10. Shivaram Subramanian. (1998) "Optimization models and analysis of routing, location, distribution and design problems on networks". Dissertation Proposal submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of DOCTOR OF PHILOSOPHY in Industrial and Systems Engineering. Blacksburg, Virginia. Chapter 6 "Effective relaxation and partitioning schemes for solving water distribution network design problems to global optimality" 124-175.
11. Shie-Yui Liong, Md. Atiquzzaman. (2004) "Optimal Design of Water Distribution Network using Shuffled Complex Evolution. Journal of The Institution of Engineers, Singapore". Vol. 44 Issue 1. 2004.

12. Maria da Conceição Cunha, Joaquim Sousa (1999) "Water Distribution network design optimization: Simulated annealing approach". Journal of Water Resources Planning and Management, Vol. 125, No 4, July/August 1999. ASCE.
13. D.P. Solomatine. (1999) "Random search methods in model calibration and pipe network design". Water Industry Systems .
14. Aaron C. Zecchin, Holger R. Maier, Angus R. Simpson, Andrew J. Roberts, Mathew J. Berrisford and Michael Leonard. (2003) "Max-Min Ant System Applied to Water Distribution System Optimisation". Centre for Applied Modelling in Water Engineering, School of Civil and Environmental Engineering, The University of Adelaide, Adelaide, SA.
15. A.J. Abebe, D.P. Solomatine. (1998) "Application of global optimization to the design of pipe networks". Proc. 3rd International Conference on Hydroinformatics, Copenhagen, August 1998. Balkema, Rotterdam.
16. Dragan A. Savic, Godfrey A. Walters. (1995) "Genetic operators and constraint handling for pipe network optimization". Adicional.
17. Muzaffar M. Eusuff, Kevin E. Lansey (2003) "Optimization of Water Distribution Network Design Using the Shuffled Frog Leaping Algorithm". Journal of Water Resources Planning and Management, Vol. 129, No 3, May 1, 2003. ASCE.
18. T. Devi Prasad, Nam-Sik Park. (2004) "Multiobjective Genetic Algorithm for Design of Water Distribution Networks". Journal of Water Resources Planning and Management, Vol. 130, No 1, January 1, 2004. ASCE.
19. Angus R. Simpson, Graeme C. Dando, Luarence J. Murphy. (1994) "Genetic Algorithms Compared to Other Techniques for Pipe Optimization". Journal of Water Resources Planning and Management, Vol. 120, No 4, July/August , 1994. ASCE.
20. Salas D. "Evaluación de métodos de inteligencia artificial para la calibración de redes de acueducto" Tesis de Maestría en Ingeniería de Sistemas y Computación. Universidad de Los Andes, Junio de 2003 .