

# XIX SEMINARIO NACIONAL DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA

## DELIMITACIÓN DE LA ZONA DE TRANSICIÓN EN EL DIAGRAMA DE MOODY BASADO EN LA ECUACIÓN DE COLEBROOK-WHITE.

*R. A. Flechas<sup>1</sup> y J. G. Saldarriaga<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> *Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados –CIACUA–, Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia; email: ra.flechas30@uniandes.edu.co*

<sup>2</sup> *Profesor Titular, Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental - Director, Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados –CIACUA–, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia; email: jsaldarr@uniandes.edu.co.*

### **RESUMEN:**

De todos los parámetros de la ecuación de Darcy-Weisbach, el factor de fricción fue el más difícil de cuantificar. Este problema ocasionó la aparición de ecuaciones empíricas como la de Hazen-Williams, pero también dio origen a métodos gráficos para calcular este parámetro como el diagrama de Moody. En dicho diagrama, Lewis Moody delimitó la zona de transición utilizando las ecuaciones de Prandtl-Von Kármán, sin tener en cuenta la ecuación de Colebrook-White y los límites definidos por estos dos investigadores para esta zona. Por lo anterior, en el presente artículo se pretende mostrar el proceso deductivo de las ecuaciones que describen el límite inferior y superior de la zona de transición a partir de la ecuación de Colebrook-White, y los efectos que pueden tener estos nuevos límites en el diagrama de Moody para las tuberías en redes de distribución de agua potable (RDAP). Para ello, se diseñaron distintas redes de Colombia utilizando la ecuación de Darcy-Weisbach y Hazen-Williams. A partir de lo anterior, se obtuvo que el límite inferior de la zona de transición definido a partir de la ecuación de Colebrook-White difiere del demarcado por la ecuación de Prandtl-Von Kármán, lo cual contribuye a entender mejor el comportamiento hidráulico de las RDAP que operen bajo el flujo turbulento hidráulicamente liso. Igualmente, se sugiere que a partir de este límite se redefinan los límites de aplicabilidad de la ecuación de Hazen-Williams.

### **ABSTRACT:**

The all parameters of Darcy-Weisbach equation, the friction factor was the most difficult of quantity. This problem led to development empiric equation like Hazen-Williams equation, but also it led to originate graphic method to calculate this parameter like the Moody diagram. In this diagram, Lewis Moody delimited the transition zone based on Prandtl-Von Kármán equations, without regard the Colebrook-White equation and the limits defined for this zone by these researches. For this reason, in this article the objective is to show the deductive process of equations that describe the upper and low limit of transition zone based on Colebrook-White equation and the effects of these limits in the Moody diagram for pipes in water distribution systems (WDS). In order to do this, in this article design some Colombian WDS using the Darcy-Weisbach and Hazen-Williams equation. In this way, this article shows that the low limit of transition zone defined based on Colebrook-White equation is different of Prandtl-Von Kármán equation, which contributes to understand the hydraulic behavior of WDS in the perfectly smooth pipes. Besides, this article suggests that the limits of applicability of Hazen-Williams equation change based on new low limit of transition zone.

### **PALABRAS CLAVES:**

Diagrama de Moody, Ecuación de Hazen-Williams, Ecuación de Colebrook-White, Ecuación de Darcy-Weisbach.

## INTRODUCCIÓN

La ecuación de resistencia fluida más general para el diseño de tuberías circulares fluyendo a presión es la ecuación de Darcy-Weisbach [1], la cual fue deducida por Henry Darcy (1803-1858), ingeniero francés del siglo XIX que llevó a cabo numerosos experimentos en tuberías con flujo de agua, y Julius Weisbach (1806-1871), ingeniero sajón de la misma época, el cual propuso el uso del factor de fricción.

$$hf = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad [1]$$

donde:

hf= Pérdidas por fricción

L= Longitud de la tubería

D= Diámetro de la tubería

V= Velocidad de flujo

g= Aceleración de la gravedad

f= Factor de fricción

De todos los parámetros de la Ecuación [1], el factor de fricción fue el parámetro más difícil de cuantificar, ya que este es función de la rugosidad relativa  $\frac{k_s}{D}$  ( $k_s$  es la rugosidad absoluta de la tubería) y el número de Reynolds **Re**, el cual se define mediante la siguiente ecuación:

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad [2]$$

donde  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido. Este número a dimensional permite establecer los tipos de flujo que se pueden presentar en tuberías, los cuales son:

- Flujo laminar  $Re < 2000$
- Flujo transicional  $2000 < Re < 4000$
- Flujo turbulento  $Re > 4000$

Esta complejidad, se reflejó en los intentos realizados por investigadores como Paul Richard Heinrich Blasius (1883-1970), Johann Nikuradse (1894-1979), Ludwig Prandtl (1875-1953), Theodor Von Kármán (1881-1963), C.F. Colebrook y H. White para predecir analíticamente la magnitud del factor de fricción en el flujo turbulento, ya que para el flujo laminar Weisbach dedujo como cuantificar dicho factor con base en la ecuación de Hagen (1794-1884)-Poiseuille (1799-1869), como se ilustra en la siguiente ecuación:

$$f = \frac{64}{Re} \quad [3]$$

En 1911, Blasius, alumno de Prandtl, encontró empíricamente una ecuación [4] para calcular el factor de fricción para flujo turbulento hidráulicamente liso (FTHL), donde el espesor de la subcapa laminar viscosa es mayor a la rugosidad absoluta de tuberías, para un rango de número de Reynolds entre 5000 y 100.000:

$$f = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \quad [4]$$

Luego en 1933, Nikuradse efectuó una serie de experimentos en tuberías con rugosidades artificiales para estudiar la naturaleza del factor de fricción. Con base en estos experimentos, Prandtl y su estudiante Von Kármán plantearon ecuaciones para calcular el factor de fricción para flujo turbulento hidráulicamente liso (FTHL) [5] y flujo turbulento hidráulicamente rugoso (FTHR) [6], donde la rugosidad absoluta de la tubería es mayor al espesor de la subcapa laminar viscosa:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad [5]$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{ks}{3.7D} \right) \quad [6]$$

Sin embargo, estas dos últimas ecuaciones no resultaron ser de gran aplicabilidad para el diseño de tuberías, ya que la gran mayoría de los flujos en tuberías se ubicaban en la zona de transición, zona delimitada entre el flujo turbulento hidráulicamente liso (FTHL) y flujo turbulento hidráulicamente rugoso (FTHR). Para solucionar este inconveniente, C.F. Colebrook y H. White lograron definir claramente los límites de esta zona [7] y la ecuación implícita [8] definitiva para calcular el factor de fricción en la zona de transición, la cual probó ser válida para todo tipo de flujo (laminar y turbulento).

$$0.305\delta' < ks < 6.1\delta' \quad [7]$$

donde  $\delta'$  es el espesor de la subcapa laminar viscosa. La ecuación es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{ks}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad [8]$$

A pesar de todos los esfuerzos realizados por estos investigadores, en la primera mitad del siglo XX, no fue posible aplicar las ecuaciones implícitas propuestas por Prandtl, Von Kármán, Colebrook y White en el diseño de tuberías, ya que en esta época no existían herramientas computacionales para resolver ecuaciones implícitas por medio de algún método numérico. Por ello, este problema ocasionó la aparición de ecuaciones empíricas tales como la ecuación de Hazen-Williams:

$$V = 0.849 C_{HW} R^{0.63} S^{0.54} \quad [9]$$

donde  $C_{HW}$  es el coeficiente de la ecuación de Hazen-Williams, el cual depende del material y edad de la tubería,  $R$  es el radio hidráulico y  $S$  la Pendiente de la línea de fricción. Sin embargo, este problema también dio origen al desarrollo de métodos gráficos como el diagrama de Moody, propuesto por Lewis Moody (Moody, 1944), para facilitar el cálculo del factor de fricción con base en el número de Reynolds y la rugosidad relativa, como se puede ver en la Figura 1.

En este diagrama, Moody delimitó cinco áreas, las cuales son: flujo laminar, zona crítica, zona lisa, zona de transición y turbulencia completa. La primera región está delimitada por números de Reynolds menores a 2000 y esta descrita por la ecuación [3]. La segunda área, por su parte, está delimitada por números de Reynolds entre 2000 y 4000, donde el factor de fricción es difícil de cuantificar ya que no fue posible encontrar una expresión matemática para calcular dicho parámetro por la inestabilidad que se presenta en dicha zona. Para números de Reynolds superiores a 4000, en el diagrama de Moody se pueden ver tres regiones adicionales, la zona lisa, la zona de transición y turbulencia completa. En relación a la zona de transición, Moody utilizó las ecuaciones [5] y [6] para demarcar el límite inferior (zona lisa) y superior (turbulencia completa) de esta zona respectivamente. Adicionalmente, este investigador utilizó la ecuación de Colebrook-White [8] para dibujar las líneas dentro de la zona de transición, como se puede ver en la Figura 1.

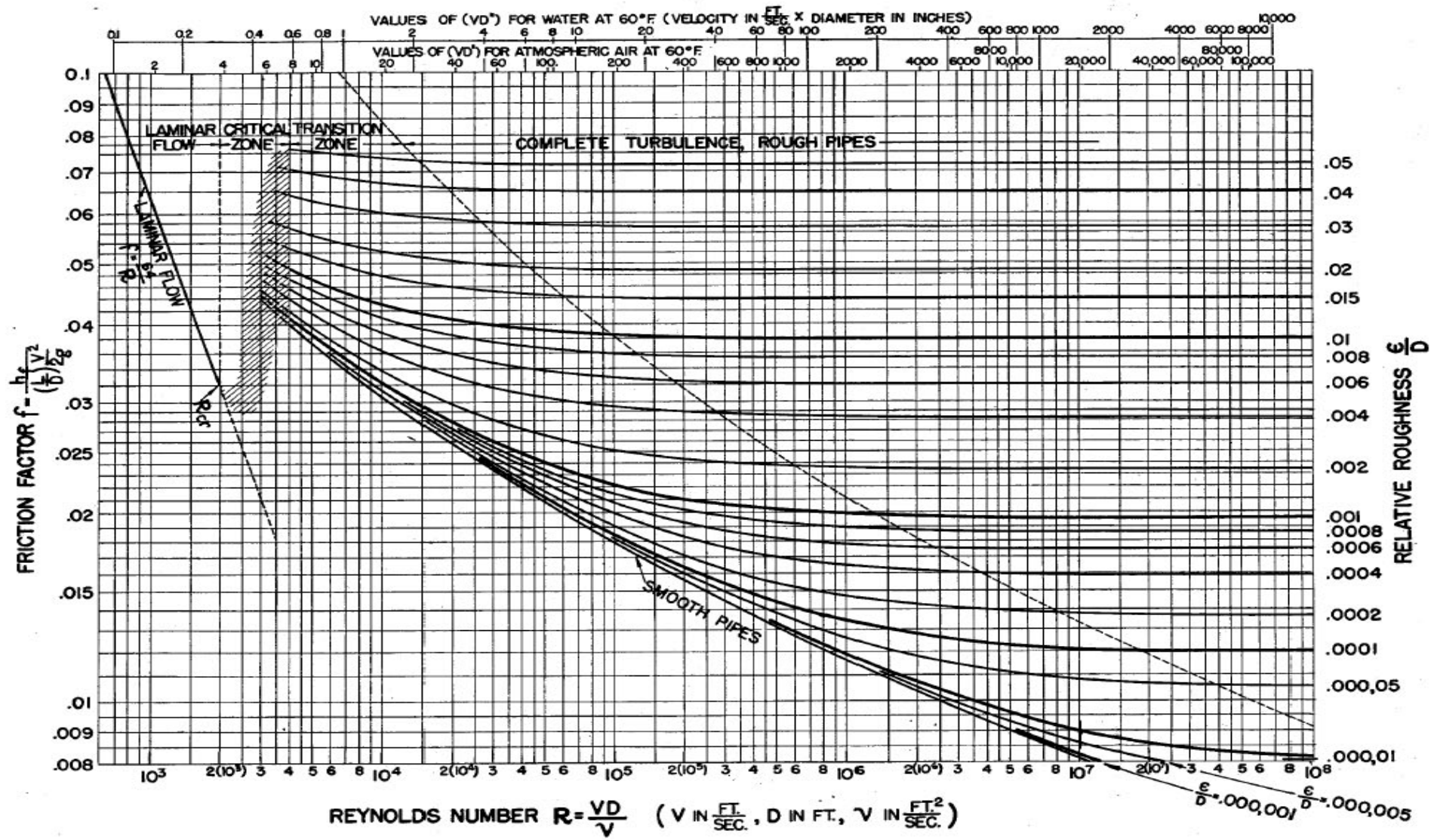


Figura 1. Diagrama de Moody (Moody,1944)

A partir de lo anterior, los límites de la zona de transición demarcados en el diagrama Moody se basaron en las ecuaciones propuestas por Prandtl y Von Kármán para FTHL y FTHR. Sin embargo, para delimitar esta zona, Moody (1944) nunca se basó en la ecuación Colebrook-White (ver ecuación [8]) y los límites definidos claramente por estos dos investigadores para la zona de transición en función de la rugosidad y el espesor de la subcapa laminar viscosa (ver ecuación [7]).

Por esta razón y teniendo en cuenta la importancia de la zona de transición en el diseño de tuberías, en el presente artículo se presentara la delimitación de la zona de transición en el diagrama de Moody con base en la ecuación de Colebrook-White y los efectos que puede tener esta nueva zona para entender el comportamiento de las redes de distribución de agua potable (RDAP). Para ello, primero se ilustrará el proceso deductivo que se efectuó para encontrar las ecuaciones que describen los límites de la zona de transición basado en esta ecuación. Posteriormente, se diseñarán distintas reales de Colombia tales como Red San Vicente, Red Bogotá-Cazucá y La Cumbre, para analizar el efecto que puede tener la demarcación de estos nuevos límites en el diagrama de Moody para entender mejor el comportamiento hidráulico de las RDAP y redefinir los límites de aplicabilidad de algunas ecuaciones empíricas de diseño tales como la ecuación de Hazen-Williams, los cuales fueron definidos en su momento por Diskin (1960) y Liou (1998) con base en la zona de transición del diagrama de Moody definida a partir de las ecuaciones de Prandtl y Von-Kármán. Finalmente, se mostrarán algunas conclusiones con base en dicho análisis.

## PROCESO DEDUCTIVO

El paso de flujo laminar a flujo turbulento no se hace de forma súbita sino gradual, por ello la zona que describe dicho cambio de flujo es la zona de transición, la cual está definida desde el límite máximo donde se puede presentar flujo turbulento hidráulicamente liso (FTHL) hasta el límite mínimo donde se puede presentar flujo turbulento hidráulicamente rugoso (FTHR). Estos límites fueron definidos claramente por Colebrook y White mediante la siguiente expresión.

$$0.305\delta' < ks < 6.1\delta' \quad [7]$$

donde  $ks$  es la Rugosidad de la tubería y  $\delta'$  el espesor de la subcapa laminar viscosa.

### Límite inferior zona de transición

El límite inferior de la zona de transición está definido por los flujos que se pueden clasificar máxime como FTHL. Según Colebrook y White (1939), esto se presentan cuando la rugosidad de la tubería es igual al 30% del espesor de la subcapa laminar viscosa como se puede ver en la ecuación [7]. Por ello, si el tamaño de la rugosidad de la tubería es inferior a dicho valor, el flujo es hidráulicamente liso. Teniendo en cuenta lo anterior, a continuación se ilustra el proceso deductivo de la ecuación que describe el límite inferior de la zona de transición basado en la ecuación de Colebrook-White y la ecuación [7].

Primero, se reemplaza en la ecuación de Colebrook-White [8] la rugosidad ( $ks$ ) por el 30% de la subcapa laminar viscosa ( $\delta'$ ):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10} \left( \frac{0.305\delta'}{3.7d} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad [8]$$

El espesor de la subcapa laminar viscosa se define mediante la siguiente ecuación:

$$\delta' = \frac{11.6 \nu}{v_*} \quad [10]$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido y  $v_*$  es la velocidad de corte, la cual se calcula de la siguiente manera:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad [11]$$

donde  $\tau_o$  es el esfuerzo cortante y  $\rho$  es la densidad del fluido.

Teniendo en cuenta lo anterior, se procede a reemplazar en la Ecuación [8] el espesor de la subcapa laminar viscosa por las ecuaciones [10] y [11], como se muestra a continuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{0.305}{3.7d} \left( \frac{11.6 \nu}{\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}} \right) + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad [12]$$

Luego, para expresar la Ecuación [12] en términos del factor de fricción ( $f$ ), es necesario conocer la relación que existe entre el factor de fricción ( $f$ ) y el esfuerzo cortante ( $\tau_o$ ), la cual se ilustra en la siguiente ecuación:

$$f = \frac{8\tau_o}{\rho v^2} \quad [13]$$

donde  $v$  es la velocidad media del flujo.

Con base en la Ecuación [13], se reemplaza en la ecuación [12] el esfuerzo cortante por el factor de fricción, la densidad del fluido y la velocidad media de flujo, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2 \log_{10} \left( \frac{0.305}{3.7d} \left( \frac{11.6 \nu}{\sqrt{\frac{f \rho v^2}{8}}}} \right) + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2 \log_{10} \left( \frac{2.7 \nu}{\sqrt{f} v d} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad [14] \end{aligned}$$

Posteriormente en la Ecuación [14], se expresa la velocidad media de flujo en términos del número de Reynolds ( $Re$ ), viscosidad cinemática del fluido ( $\nu$ ) y el diámetro de la tubería, con base en la definición de este número adimensional (ver ecuación [2]), tal como se ilustra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2 \log_{10} \left( \frac{2.7 \nu}{\sqrt{f} \left( \frac{Re \nu}{d} \right) d} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2 \log_{10} \left( \frac{2.7}{Re \sqrt{f}} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad [15] \end{aligned}$$

Finalmente, si se suman los factores en común de la Ecuación [15], se obtiene la siguiente ecuación que define el límite inferior de la zona de transición basado en la ecuación de Colebrook-White y los límites definidos claramente por estos investigadores para la zona de transición.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{5.21}{Re\sqrt{f}} \right) \quad [16]$$

### Límite superior zona de transición

El límite superior de la zona de transición está definido por los flujos que pueden mínimo clasificarse como FTTH. Según Colebrook-White (1939), estos se presentan cuando la rugosidad de la tubería ( $k_s$ ) es igual a 6.1 veces el espesor de la subcapa laminar viscosa ( $\delta'$ ) como se puede ver en la ecuación [7]. Por ello, si la rugosidad de la tubería es superior a dicho valor, el flujo es hidráulicamente rugoso. Teniendo en cuenta lo anterior, a continuación se ilustra el proceso deductivo de la ecuación que describe el límite superior de la zona de transición basado en la ecuación de Colebrook-White y la ecuación [7].

Primero, se reemplaza en la ecuación de Colebrook-White [8] la rugosidad ( $k_s$ ) por 6.1 veces el espesor de la subcapa laminar viscosa ( $\delta'$ ):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{6.1\delta'}{3.7d} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad [17]$$

Posteriormente, se procede a reemplazar en la Ecuación [16] el espesor de la subcapa laminar viscosa por las ecuaciones [10] y [11], como se muestra a continuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{6.1}{3.7d} \left( \frac{11.6 v}{\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}} \right) + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad [18]$$

Luego, para expresar la Ecuación [18] en términos del factor de fricción ( $f$ ), es necesario conocer la relación que existe entre el factor de fricción ( $f$ ) y el esfuerzo cortante ( $\tau_o$ ), la cual se ilustra en la Ecuación [13].

A partir de la Ecuación [13], se reemplaza en la Ecuación [18] el esfuerzo cortante por el factor de fricción, la densidad del fluido y la velocidad media de flujo, como se muestra a continuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{6.1}{3.7d} \left( \frac{11.6 v}{\sqrt{\frac{f\rho v^2}{8}}} \right) + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{54.09 v}{\sqrt{f}vd} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad [19]$$

Posteriormente, en la Ecuación [19], se expresa la velocidad media de flujo en términos del número de Reynolds ( $Re$ ), la viscosidad cinemática del fluido ( $\nu$ ) y el diámetro de la tubería, con base en la definición de este número adimensional, tal como se ilustra a continuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{54.09 \nu}{\sqrt{f} \left( \frac{Re \nu}{d} \right) d} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{54.09}{Re \sqrt{f}} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad [20]$$

Finalmente, si se suman los factores en común de la Ecuación [20], se obtiene la siguiente ecuación que describe el límite superior de la zona de transición con base en la ecuación de Colebrook-White y la ecuación [7]:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{56.6}{Re \sqrt{f}} \right) \quad [21]$$

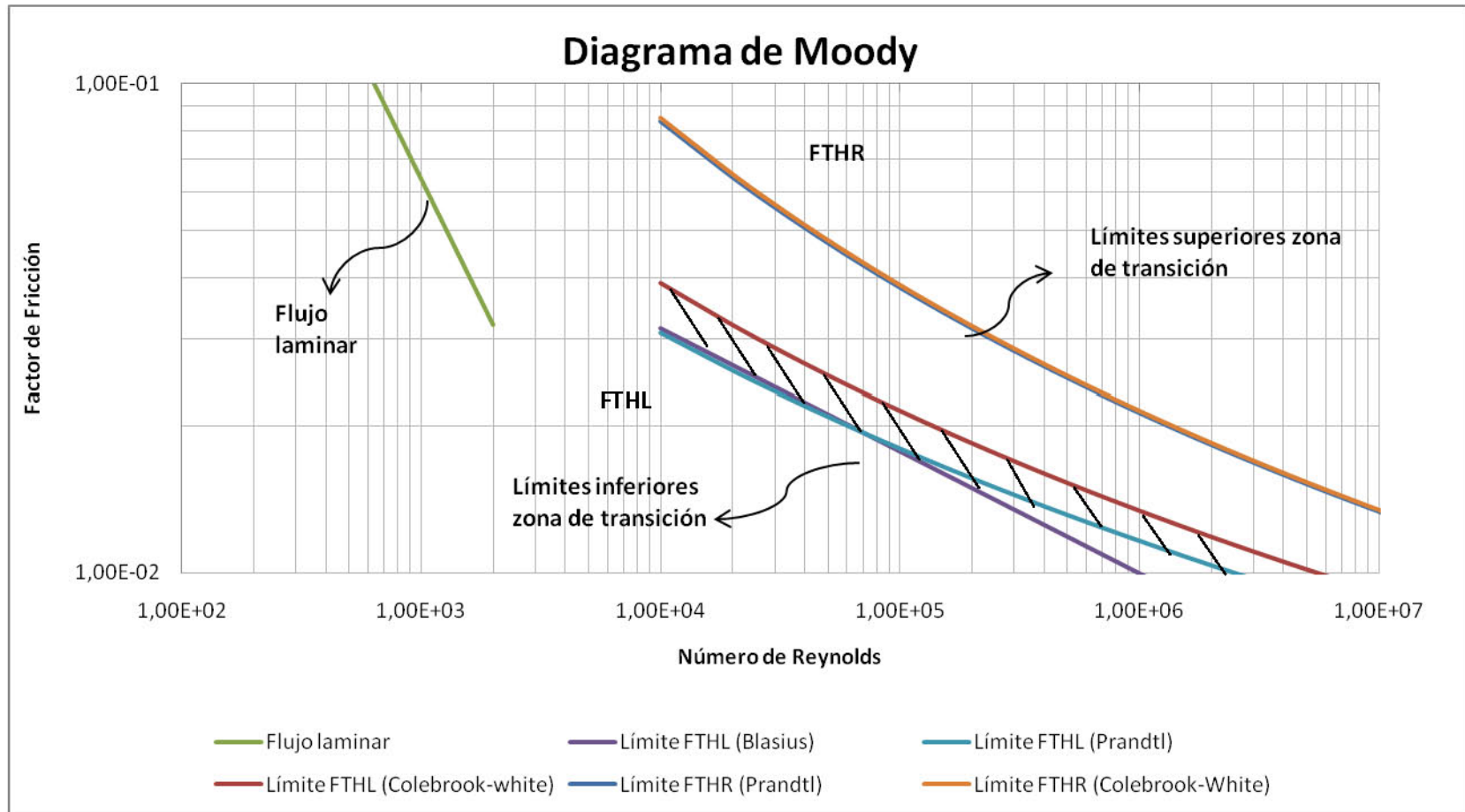
## ANÁLISIS

Para entender el efecto que puede tener estos nuevos límites de la zona de transición en el diagrama de Moody, se dibujó el límite inferior y superior de la zona de transición en el diagrama de Moody con base en las ecuaciones [16] y [21] respectivamente. Luego, se demarcaron los límites de esta zona en dicho diagrama a partir de las ecuaciones de Blasius [4] y Prandtl-Von Kármán (ver ecuaciones [5] y [6]), para luego compararlos con los límites obtenidos a partir de la ecuación de Colebrook-White. Lo anterior se puede ver en la Figura 2.

Si se compara el límite superior de la zona de transición obtenido a partir de la ecuación de Colebrook-White (ver ecuación [21]) vs. la ecuación de Prandtl-Von Kármán (ver ecuación [6]), se puede ver en la Figura 2 que estos coinciden en toda la extensión del diagrama de Moody. Lo anterior se debe a que el segundo sumando del paréntesis de la ecuación de Colebrook-White se puede considerar despreciable en comparación con el orden de magnitud del primer sumando como se puede observar detalladamente en el proceso deductivo de la ecuación [21].

En relación con el límite inferior de la zona de transición, se puede ver en la Figura 2 que el límite descrito por la ecuación de Blasius coincide con el definido por la ecuación de Prandtl-Von Kármán en el rango de validez que fue deducida esta primera ecuación. Sin embargo, el límite inferior de esta zona demarcado a partir de estas dos ecuaciones difiere del dibujado en el diagrama de Moody con base en la ecuación de Colebrook-White y la ecuación [7] (ver ecuación [16]) ya que el obtenido a partir de estas dos últimas ecuaciones hace más estrecha esta zona en el diagrama de Moody, lo cual facilita que se presenten flujos turbulentos hidráulicamente lisos en el diseño de tuberías en comparación con la ecuación de Prandtl-Von Kármán y Blasius. Esto se refleja claramente en la región sombreada de la Figura 2 y se presenta debido a que el orden de magnitud del primer sumando del paréntesis de la ecuación de Colebrook-White (ver ecuación [8]) es igual al orden de magnitud del segundo sumando como se puede ver en el proceso deductivo de la ecuación [16] ilustrado anteriormente.





**Figura 2.** Delimitación de la zona de transición en el diagrama de Moody.

Teniendo en cuenta lo anterior, es necesario analizar el efecto que pueden tener estos nuevos límites de la zona de transición del diagrama de Moody en el diseño de RDAP. Para ello, se diseñaron diversas redes de distribución de agua potable (RDAP) de Colombia tales como La Cumbre, Red Bogotá-Cazucá y Red San Vicente utilizando las ecuaciones de Darcy-Weisbach (ver ecuación [1]) y Hazen-Williams (ver ecuación [9]). Para diseñar estas redes se utilizó el programa REDES, programa creado en la Universidad de los Andes (1988) para realizar el análisis y diseño optimizado de RDAP, por medio de la metodología de diseño Superficie Optima del Gradiente Hidráulico (Ochoa, 2009), teniendo en cuenta los siguientes parámetros de diseño en común para estas tres redes:

- Presión mínima de diseño: 20 metros de columna de agua
- Los materiales utilizados para el diseño de estas redes fueron el PVC, Hierro dúctil, polietileno y acero. Por ello, se adoptó la rugosidad absolutas (**ks**) y los coeficientes de Hazen-Williams (**CHw**) de dichos materiales de las normas de las Empresas Públicas de Medellín (EPM,2009):

**Tabla 1.** Rugosidades de las tuberías

<b>Material\Rugosidad tubería</b>	<b>ks (mm)</b>	<b>CHw</b>
<b>Acero</b>	0.45	120
<b>Hierro dúctil</b>	0.25	140
<b>Polietileno</b>	0.007	150
<b>PVC</b>	0.0015	150

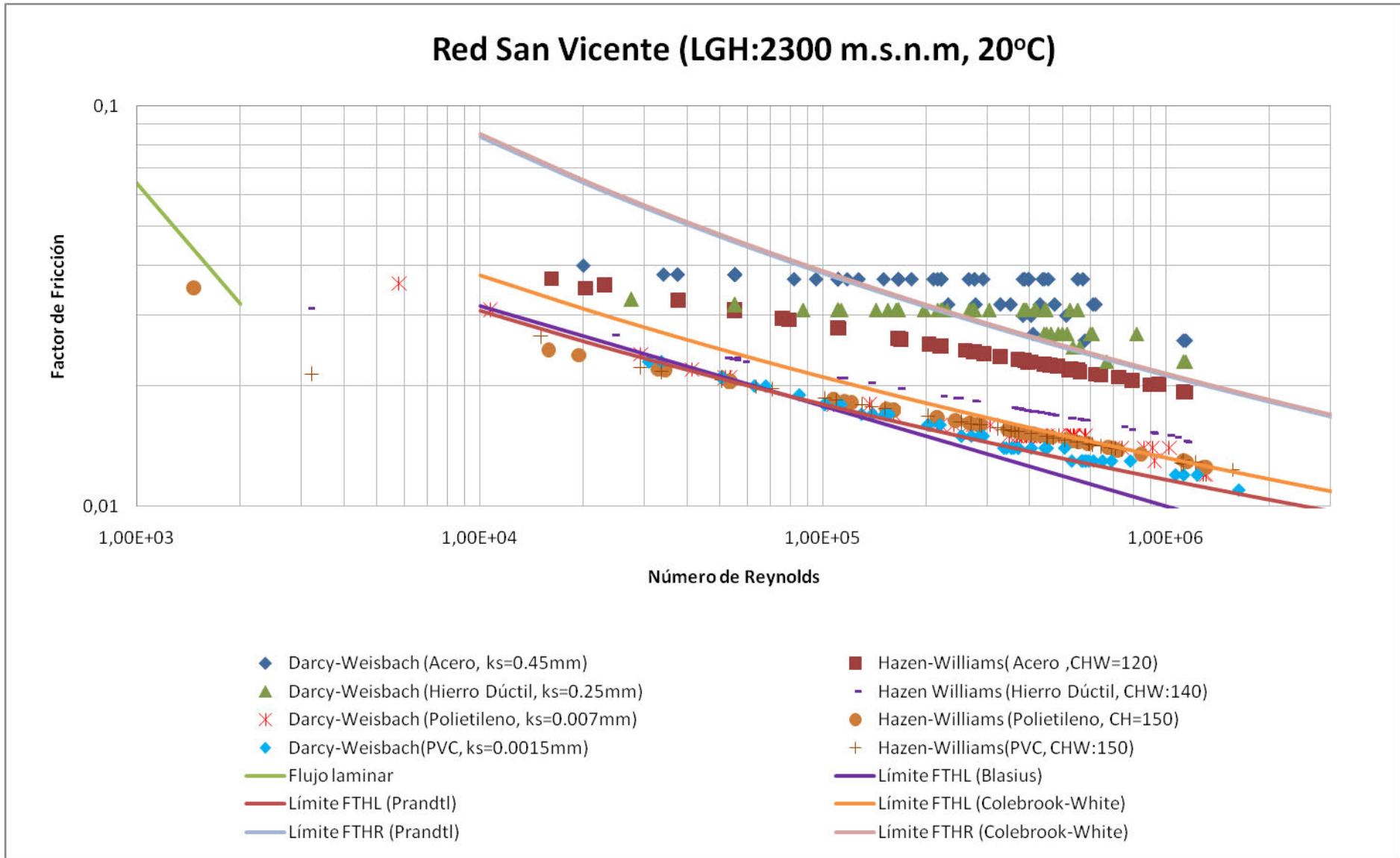
- Se adoptó el valor de viscosidad cinemática del agua para una temperatura de 20°C.
- Se asignaron coeficiente de pérdidas menores a cada una de las tuberías de 0.01 por metro.
- La estimación de la demanda en cada uno de los nodos se hizo de forma uniforme en toda en la red, dividiendo la demanda total de esta por el número de nodos totales de la red de diseño, de tal forma que en ninguno de los nodos se presentara un caudal de consumo inferior a 1.48 L/s o mayor a 2.6 L/s.

A partir de lo anterior, se definió la demanda total de la red, consumo por nodo y línea de gradiente hidráulico (LGH) de la fuente de abastecimiento de cada una de las redes mencionadas anteriormente con respecto al nivel del mar (m.s.n.m), tal como se ilustra en la siguiente tabla.

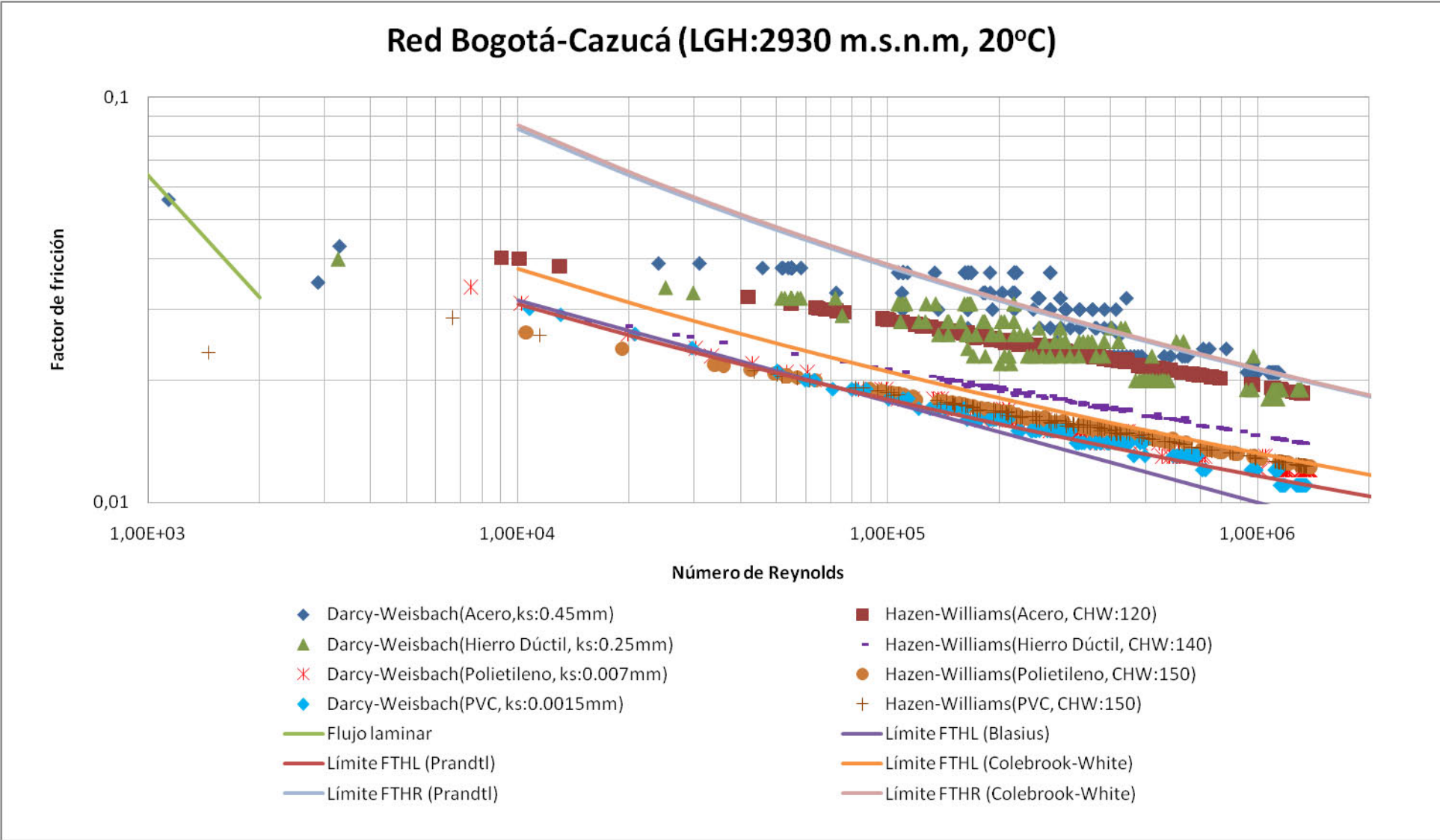
**Tabla 2.** Parámetros de diseño de las Redes La Cumbre, Bogotá-Cazucá y Red Elevada.

<b>Parámetro\RDAP</b>	<b>Red San Vicente</b>	<b>Bogotá-Cazucá</b>	<b>La Cumbre</b>
<b>No Nodos</b>	62	145	338
<b>No Tubos</b>	71	150	378
<b>Demanda total (L/s)</b>	135	315	500
<b>Consumo por nodo (L/s)</b>	2.18	2.17	1.48
<b>Altura promedio (m.s.n.m)</b>	2150	2720	950
<b>Línea del gradiente hidráulico de la fuente de Abastecimiento (m.s.n.m)</b>	2300	2930	1200

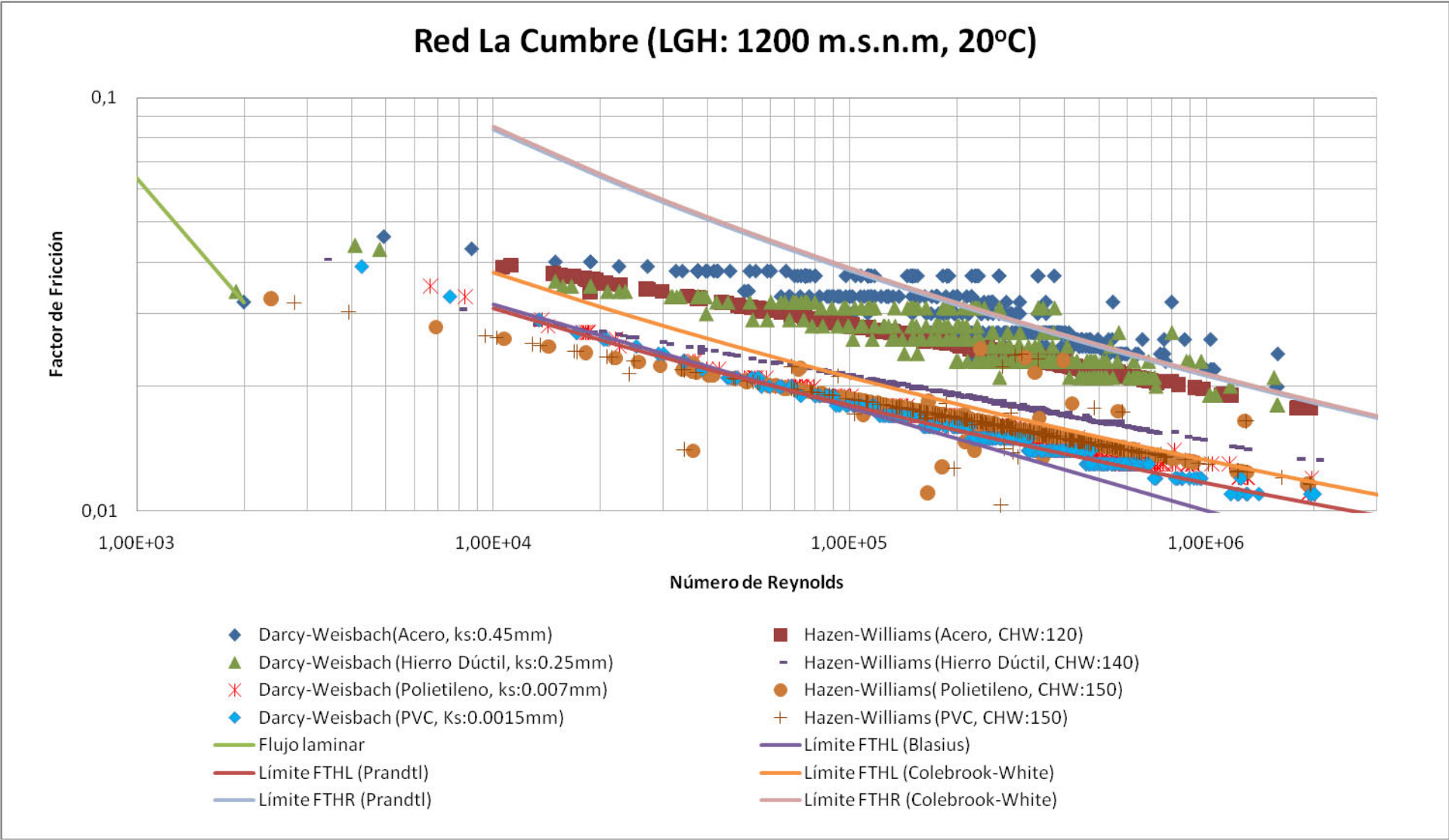
Posteriormente, se localizaron los factores hidráulicos obtenidos a partir de cada uno de los diseños de la Red San Vicente, Red Bogotá –Cazucá y La Cumbre en el diagrama de Moody de la Figura 2, como se puede ver en las Figuras 3, 4 y 5 respectivamente.



**Figura 3.** Factores hidráulicos obtenidos para la Red San Vicente con una LGH: 2300 m.s.n.m y temperatura de 20°C.



**Figura 4.** Factores hidráulicos obtenidos para la Red Bogotá-Cazucá con una LGH: 2930 m.s.n.m y temperatura de 20°C



**Figura 5.** Factores hidráulicos obtenidos para la Red La Cumbre con una LGH: 1200 m.s.n.m y temperatura de 20°C.

En relación con el diseño de la Red San Vicente, en la Figura 3 se puede ver que los factores hidráulicos obtenidos para el diseño de esta red con el Acero y Hierro Dúctil, se localizan en su mayoría en la zona de flujo turbulento hidráulicamente rugoso (FTHR) cuando se utiliza en el diseño la ecuación de fricción de Darcy-Weisbach. Sin embargo, se puede observar que los factores hidráulicos obtenidos por medio de la ecuación de Hazen-Williams se ubican en su mayoría en la zona de transición definida a partir de las ecuaciones de Prandtl-Von Kármán y Colebrook-White, pero se distingue claramente que para números de Reynolds inferiores a 100000 los factores hidráulicos calculados para el Hierro dúctil con esta última ecuación se localizan dentro de la zona de FTHL definida a partir de la ecuación de Colebrook-White. Igualmente, en esta figura se puede observar que la tendencia que se presenta para el Acero y Hierro Dúctil no sucede de igual forma para el PVC y el Polietileno, debido a que los factores de fricción obtenidos por medio de la ecuación de Darcy-Weisbach tienden a igualarse con los computados en la ecuación de Hazen-Williams, los cuales se ubican en su mayoría en la región sombreada de la Figura 2, y específicamente en la zona de FTHL con base en el nuevo límite inferior de la zona de transición definido a partir de la ecuación de Colebrook-White y la zona de transición demarcada con base en la ecuación de Prandtl-Von Kármán. Lo anterior, significa que el uso de la ecuación de Hazen-Williams para el diseño de la Red San Vicente no se limita exclusivamente para la zona de transición con base en el nuevo límite inferior de esta zona deducido a partir de la ecuación de Colebrook-White (ver Ecuación [16]).

A partir de la Figura 4, se puede observar que los factores hidráulicos obtenidos para el diseño de la Red Bogotá-Cazucá con el Acero y Hierro Dúctil, se localizan en su mayoría en la zona de transición cuando se utiliza en el diseño la ecuación de fricción de Darcy-Weisbach. Por otro lado, se puede ver que los factores hidráulicos obtenidos por medio de la ecuación de Hazen-Williams se ubican por debajo de los calculados por esta ecuación o se alejan del límite superior de la zona de transición dibujado a partir de la ecuación de Prandtl-Von Kármán o la ecuación de Colebrook-White. En esta misma figura; se puede observar que la tendencia que se presenta para el Acero y Hierro Dúctil no ocurre de igual forma para el Polietileno y PVC, ya que los factores de fricción obtenidos por la ecuación de Darcy-Weisbach tienden a igualarse con los computados en la ecuación de Hazen-Williams y se ubican en su mayoría en la región sombreada de la Figura 2 o en el FTHL con base en el nuevo límite inferior de la zona de transición definido a partir de la ecuación de Colebrook-White. Es importante aclarar que, para números de Reynolds inferiores a 10000, los factores hidráulicos calculados para el Polietileno y PVC se ubican en la zona de FTHL definida a partir de la ecuación de Colebrook-White y la ecuación de Prandtl-Von Kármán, pero después de dicho número esta similitud no se cumple, ya que se ubican en la región sombreada de la Figura 2.

Finalmente, con base en la Figura 5 se puede observar que, para una temperatura de 20°C y LGH=1200 m.s.n.m, los factores hidráulicos obtenidos en el diseño de la Red La Cumbre con el Acero y Hierro Dúctil, se localizan en su mayoría cerca al límite superior de la zona de transición cuando se utiliza en el diseño la ecuación de fricción de Darcy-Weisbach. Por otro lado, se puede ver que los factores hidráulicos obtenidos por medio de la ecuación de Hazen-Williams para estos materiales se alejan de este límite descrito por la ecuación de Prandtl-Von Kármán y la ecuación de Colebrook-White. Adicionalmente, de esta misma figura se puede observar que la tendencia que se presenta para el Acero y Hierro Dúctil ocurre de igual forma para el Polietileno y el PVC para números de Reynolds inferiores a 100000 ya que los factores de fricción obtenidos por la ecuación de Darcy-Weisbach tienden a ser mayores comparados con los calculados con la ecuación de Hazen-Williams. Sin embargo, es importante mencionar que los factores de fricción obtenidos por estas ecuaciones tienden a igualarse para estos dos materiales, los cuales se ubican en su mayoría en la región sombreada de la Figura 2, y específicamente en el FTHL con base en el nuevo límite inferior de la zona de transición definido a partir de la ecuación de Colebrook-White y la zona de transición demarcada con base en la ecuación de Prandtl-Von Kármán. Por último, en esta figura se puede ver que en comparación al diseño de la Red San Vicente, para números de Reynolds

inferiores a 100000, se obtienen de igual forma factores hidráulicos dentro del FTHL para materiales rugosos como el Hierro Dúctil cuando se diseña esta red con la ecuación de Hazen-William a partir del nuevo límite inferior de la zona de transición con base en la ecuación de Colebrook-White.

## CONCLUSIONES

- Para materiales que presentan rugosidades absolutas inferiores a 0.007 mm o coeficientes de Hazen-Williams superiores a 140, los factores hidráulicos obtenidos a partir del diseño de las redes analizadas en este artículo utilizando las ecuaciones de Darcy-Weisbach y Hazen-Williams, se localizan en la región sombreada de la Figura [2]. Por lo anterior, se puede concluir que el nuevo límite inferior de la zona de transición definido a partir de la ecuación de Colebrook-White y los límites establecidos claramente por estos dos investigadores para esta zona (ver ecuación [7]) pueden contribuir a entender mejor el comportamiento hidráulico de las redes de distribución de agua potable (RDAP) en el FTHL, ya que este nuevo límite hace más estrecha la zona de transición y permite identificar este tipo de flujo con mayor exactitud.
- Con base en los límites de la zona de transición del diagrama de Moody obtenidos a partir de la ecuación de Colebrook-White (ver Figura 2), deberían redefinirse los límites de aplicabilidad de la ecuación de Hazen-Williams para analizar esta ecuación desde el punto de vista hidráulico en el diseño de RDAP. Como se pudo observar en los diagramas de Moody ilustrados en este documento, los factores hidráulicos obtenidos con coeficientes de Hazen-Williams mayores a 140 no se localizaban exclusivamente en la zona de transición definida por la ecuación de Prandtl-Von Kármán, como lo definió en su momento Diskin (1960) como límite de aplicabilidad de la ecuación de Hazen-Williams, sino también en la zona de FTHL del diagrama de Moody basado en la ecuación de Colebrook-White y los límites establecidos claramente por estos dos investigadores para la zona de transición, debido a que esta ecuación reduce la zona de transición y permite obtener factores de fricción que no dependen de la rugosidad sino del flujo y el fluido, como se puede en la región sombreada de la Figura [2].
- A partir del diagrama de Moody ilustrado en la Figura 2, se puede concluir que el límite superior de la zona de transición no se ve afectado si se utiliza la ecuación de Prandtl-Von Kármán o la ecuación de Colebrook-White para delimitar el FTHL, debido a que el segundo término del paréntesis de la ecuación de Colebrook-White presenta un orden de magnitud mucho menor al primer sumando de dicho paréntesis y por lo tanto la ecuación [21] se asemeja a la ecuación [6].
- Con base en la Figura 2, se puede concluir que el límite inferior de la zona de transición definido a partir de la ecuación de Colebrook-White y los límites establecidos por estos dos investigadores para esta zona difiere del demarcado por las ecuaciones de Prandtl-Von Kármán y Blasius, ya que el orden de magnitud del primer sumando del paréntesis de la ecuación de Colebrook-White (ver ecuación [8]) es igual al orden de magnitud del segundo sumando de este paréntesis como se pudo demostrar en el proceso deductivo de la ecuación [16], y por lo tanto esta no se asemeja a la ecuación de Prandtl-Von Kármán. Lo anterior, desvirtúa la teoría que se tenía sobre el límite inferior de la zona de transición a partir de la ecuación de Colebrook-White, ya que se pensaba que el primer sumando de esta ecuación era de un orden de magnitud menor al segundo debido a que la rugosidad absoluta es mucho menor al diámetro de la tubería en el FTHL.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Bombardelli F. & Garcia M. (Noviembre de 2003). "Hydraulic Design of Large-Diameter Pipes". Recuperado el Marzo de 13 de 2010, de *ascelibrary*: [http://: www.ascelibrary.com](http://www.ascelibrary.com)

2. Brown, G. O. (2004). "The History of the Darcy-Weisbach Equation for Pipe flow resistance". Recuperado el 4 de Marzo de 2010, de *ascelibrary*: <http://www.ascelibrary.org>
3. Colebrook, C.F (1939). "Turbulent flow in pipes, whit particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws". *Journal of Institution of Civil Engineers*, Vol 11, 133-156.
4. Diskin, M. (1960). "The limits of applicability of the Hazen-Williams formula". *Houille Blanche* , 720-723.
5. EPM. (2009). *Normas de diseño de sistemas de acueducto*. Medellin.
6. Liou, C. P. (septiembre de 1998). "Limitations and proper use of the Hazen-Williams equation". Recuperado el 5 de Marzo de 2010, de *ascelibrary*: <http://www.ascelibrary.com>
7. Moody, L. (1944). "Friction factors for pipe flow". *Trans. ASME*. 671-684.
8. Ochoa, S. (2009). *Diseño optimizado de redes de distribucion de agua potable con base en el concepto energético de superficie óptima de gradiente hidráulico*. Bogotá D.C.: Trabajo de grado, Universidad de los Andes.
9. Saldarriaga Valderrama, J. G. (2007). *Hidráulica de tuberías: abastecimiento de agua, redes, riegos* . Bogotá, D.C.: Alfaomega: Uniandes.